2020 年 03 月 12 日

部分積分の一般項

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

部分積分が適用できる関数の例として数学の教科書で良く取り上げられるものに、多項式と指数関数の積の積分と、多項式と三角関数の積の積分がある。

これらは、1 回部分積分を行うことにより、次数が 1 つ小さい多項式の積の積分に帰着できるため、その多項式が定数になるまで部分積分を繰り返せば、いずれ積分が終了する。

もちろん、これで原理的にはどんな場合でも複数回の部分積分を実際にやれば求まることがわかり、教科書の説明は普通はこれで終わり、x^n と指数関数、x^n と三角関数の積分の最終形を表す式は、高校の教科書にも大学の本にも出てこない。

本稿では、部分積分によって漸化式を導くことで、x^n と指数関数の積、x^n と三角関数の積の積分の具体的な表現式を作成することを目標とする。

2 巾乗と指数関数の積の積分

本節では、x^n と $e^{\alpha x}$ の積の積分

$$I_1(x;n,\alpha)=\int x^n e^{\alpha x}dx \quad (n\geq 0:\ 整数,\ \alpha\neq 0) \tag{1}$$

を考える。まず、簡単な置換により、この積分は $\alpha=1$ の場合に帰着できる。$\alpha x=t$ により、

$$I_1(x;n,\alpha)=\int\left(\frac{t}{\alpha}\right)^n e^t\frac{dt}{\alpha}=\frac{1}{\alpha^{n+1}}I_1(t;n,1)=\frac{1}{\alpha^{n+1}}I_1(\alpha x;n,1) \tag{2}$$

となるからである。よってとりあえず、$\alpha=1$ の場合を考える。

部分積分

$$\int f'gdx = fg - \int fg'dx \tag{3}$$

により $I_1(x;n,1)$ は、

$$\begin{aligned} I_1(x;n,1) &= \int x^n e^x dx = \int x^n (e^x)' dx = x^n e^x - \int (x^n)' e^x dx \\ &= x^n e^x - nI_1(x;n-1,1) \end{aligned} \tag{4}$$

と n を一つ下げた積分に帰着でき、これを繰り返すことで最終的に

$$I_1(x;0,1) = \int e^x dx = e^x + C$$

に帰着でき、積分が終わる、というのが通常の大まかな方針である。

一方、(4) の式の両辺を $(-1)^n/n!$ 倍すれば、

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n!} I_1(x;n,1) &= \frac{(-1)^n}{n!} x^n e^x - \frac{(-1)^n}{n!} nI_1(x;n-1,1) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} x^n e^x + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} I_1(x;n-1,1) \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{n!} I_1(x;n,1) - \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} I_1(x;n-1,1) = \dfrac{(-1)^n}{n!} x^n e^x \quad (n \geq 1), \\ \dfrac{(-1)^0}{0!} I_1(x;0,1) = e^x + C = \dfrac{(-1)^0}{0!} e^x + C \end{cases} \tag{5}$$

と書けるので、この階差数列から、

$$\frac{(-1)^n}{n!} I_1(x;n,1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k e^x + C \tag{6}$$

という一般式が得られる。この式の右辺は、e^{-x} の n 次のマクローリン展開式と、e^x との積の形になっているが、それについては、5 節で改めて紹介する。

また、(2) を考えれば、

$$I_1(x;n,\alpha) = \frac{1}{\alpha^{n+1}} I_1(\alpha x;n,1) = \frac{n!(-1)^n}{\alpha^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} (\alpha x)^k e^{\alpha x} + C$$

となるので、

$$\frac{(-\alpha)^n}{n!}I_1(x;n,\alpha) = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-\alpha)^k}{k!}x^k e^{\alpha x} + C \tag{7}$$

となっていることがわかる。

なお、(6) は、積の微分から得ることもできる。今、$f_1(x;n,\alpha)$ を

$$f_1(x;n,\alpha) = \frac{(-\alpha)^n}{n!}x^n e^{\alpha x} = \frac{(-\alpha x)^n}{n!}e^{\alpha x} \quad (= f_1(\alpha x;n,1)) \tag{8}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
f_1'(x;k,1) &= \left\{\frac{(-1)^k}{k!}x^k e^x\right\}' = \frac{(-1)^k}{k!}(kx^{k-1}e^x + x^k e^x) \\
&= \frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^x + \frac{(-1)^k}{k!}x^k e^x = -f_1(x;k-1,1) + f_1(x;k,1), \\
f_1'(x;0,1) &= (e^x)' = e^x = f_1(x;0,1)
\end{aligned}$$

なので、$k=1$ から $k=n$ までの和に $f_1'(x;0,1) = f_1(x;0,1)$ を追加すれば、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} f_1'(x;k,1) &= f_1'(x;0,1) + \sum_{k=1}^{n} f_1'(x;k,1) \\
&= f_1(x;0,1) + \sum_{k=1}^{n}(f_1(x;k,1) - f_1(x;k-1,1)) = f_1(x;n,1)
\end{aligned}$$

となって、これを積分すれば、

$$\int f_1(x;n,1)dx = \sum_{k=0}^{n} f_1(x;k,1) + C \tag{9}$$

が得られる。これが丁度 (6) になっている。

同様のことを $f_1(x;n,\alpha)$ に行えば、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
f_1'(x;k,\alpha) &= \frac{(-\alpha)^k}{k!}(kx^{k-1}e^{\alpha x} + \alpha x^k e^{\alpha x}) = \frac{(-\alpha)^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{\alpha x} + \alpha\frac{(-\alpha)^k}{k!}x^k e^{\alpha x} \\
&= -\alpha f_1(x;k-1,\alpha) + \alpha f_1(x;k,\alpha), \\
f_1'(x;0,\alpha) &= (e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x} = \alpha f_1(x;0,\alpha)
\end{aligned}$$

なので、

$$\sum_{k=0}^{n} f_1'(x;k,\alpha) = \alpha f_1(x;n,\alpha)$$

となり、よって、これを積分すれば

$$\int f_1(x;n,\alpha)dx = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{n} f_1(x;k,\alpha) + C \tag{10}$$

が得られる。これが (7) である。

3 巾乗と三角関数の積の積分

次は、x^n と $\sin\alpha x, \cos\alpha x$ の積の積分を考える。

これも、大まかな方針は、部分積分を繰り返して、巾乗の方の次数を一つずつ下げることで、最終的に三角関数のみの積分に帰着させることである。

一般的な式を求める方法はいくつか考えられるが、例えば以下のようなものがある。

1. 2 節の (4) のように、部分積分により漸化式を作り、そこから求める
2. 2 節の $f_1(x;n,\alpha)$ のような関数を見つけて、積の微分により求める
3. 複素数を利用して、三角関数を複素指数関数で表現することで、(7) を利用して求める

ただし、$x^n\sin\alpha x, x^n\cos\alpha x$ の部分積分は、毎回の部分積分で、sin と cos が交互に入れ替わるので、1. の方針では 2 節ほど簡単ではない。本節ではまずそれを考えてみる。

$$I_2(x;n,\alpha) = \int x^n\cos\alpha x dx,\quad I_3(x;n,\alpha) = \int x^n\sin\alpha x dx \tag{11}$$

とすると、これも当然

$$I_2(x;n,\alpha) = \frac{1}{\alpha^{n+1}}I_2(\alpha x;n,1),\quad I_3(x;n,\alpha) = \frac{1}{\alpha^{n+1}}I_3(\alpha x;n,1) \tag{12}$$

となって $\alpha=1$ の場合に帰着される。部分積分により、

$$\begin{aligned} I_2(x;k,1) &= \int x^k(\sin x)'dx \;=\; x^k\sin x - kI_3(x;k-1,1) \\ I_3(x;k,1) &= \int x^k(-\cos x)'dx \;=\; -x^k\cos x + kI_2(x;k-1,1) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{cases} \dfrac{1}{k!}I_2(x;k,1)+\dfrac{1}{(k-1)!}I_3(x;k-1,1) = \dfrac{x^k}{k!}\sin x \\ \dfrac{1}{k!}I_3(x;k,1)-\dfrac{1}{(k-1)!}I_2(x;k-1,1) = -\dfrac{x^k}{k!}\cos x \end{cases} \tag{13}$$

となり、漸化式に I_2 と I_3 が混在するので 2 節よりはだいぶ厄介になる。その回避策としては、例えばもう 1 段下げて k と $k-2$ の関係式にする、という手がある。

$$\begin{aligned} I_2(x;k,1) &= x^k\sin x - kI_3(x;k-1,1) \\ &= x^k\sin x - k\{-x^{k-1}\cos x + (k-1)I_2(x;k-2,1)\} \\ &= x^k\sin x + kx^{k-1}\cos x - k(k-1)I_2(x;k-2,1) \\ I_3(x;k,1) &= -x^k\cos x + kI_2(x;k-1,1) \\ &= -x^k\cos x + k\{x^{k-1}\sin x - (k-1)I_3(x;k-2,1)\} \\ &= -x^k\cos x + kx^{k-1}\sin x - k(k-1)I_3(x;k-2,1) \end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{1}{k!}I_2(x;k,1) = \frac{x^k}{k!}\sin x + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\cos x - \frac{1}{(k-2)!}I_2(x;k-2,1) \tag{14}$$

$$\frac{1}{k!}I_3(x;k,1) = -\frac{x^k}{k!}\cos x + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\sin x - \frac{1}{(k-2)!}I_3(x;k-2,1) \tag{15}$$

と、ひとつ跳んだ形ではあるが、I_2 と I_3 が混在しない漸化式が得られるので、あとは n が奇数か偶数かで場合分けすれば $I_2(x;n,1)$, $I_3(x;n,1)$ の一般的な式を得ることができる。ただし、その場合分けも含めて、その一般的な式は 2 節のものよりはだいぶ複雑になる (が、これも不思議と $\sin x$, $\cos x$ のマクローリン展開に似た形になる)。

それを解消する方法として、さらに次のような手がある。

$$I_4(x;n,\alpha,\beta) = \int x^n\cos\left(\alpha x - \frac{n\pi}{2}+\beta\right)dx \quad \left(= \frac{1}{\alpha^{n+1}}I_4(\alpha x;n,1,\beta)\right) \tag{16}$$

とすると、これは、

$$I_4\left(x; n, \alpha, \frac{n\pi}{2}\right) = I_2(x; n, \alpha), \quad I_4\left(x; n, \alpha, \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = I_3(x; n, \alpha) \tag{17}$$

となるので、I_4 は I_2, I_3 を特別な場合として含んでいて、つまり I_2, I_3 を一般化したものとも見ることができる。$I_4(x; k, 1, \beta)$ を部分積分すると、

$$\begin{aligned} I_4(x; k, 1, \beta) &= \int x^k \left\{\sin\left(x - \frac{k\pi}{2} + \beta\right)\right\}' dx \\ &= x^k \sin\left(x - \frac{k\pi}{2} + \beta\right) - k\int x^{k-1} \sin\left(x - \frac{k\pi}{2} + \beta\right) dx \end{aligned}$$

となるが、

$$\sin\left(x - \frac{k\pi}{2} + \beta\right) = \sin\left(x - \frac{(k-1)\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\cos\left(x - \frac{(k-1)\pi}{2} + \beta\right)$$

より、

$$\frac{1}{k!} I_4(x; k, 1, \beta) = \frac{x^k}{k!} \sin\left(x - \frac{k\pi}{2} + \beta\right) + \frac{1}{(k-1)!} I_4(x; k-1, 1, \beta) \tag{18}$$

となり、

$$I_4(x; 0, 1, \beta) = \int \cos(x + \beta) dx = \sin(x + \beta) + C$$

なので、結局

$$\frac{1}{n!} I_4(x; n, 1, \beta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \sin\left(x - \frac{k\pi}{2} + \beta\right) + C \tag{19}$$

が得られる。一般の α の場合も、

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^n}{n!} I_4(x; n, \alpha, \beta) &= \frac{\alpha^n}{\alpha^{n+1}} \frac{1}{n!} I_4(\alpha x; n, 1, \beta) \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha x)^k}{k!} \sin\left(\alpha x - \frac{k\pi}{2} + \beta\right) + C \end{aligned} \tag{20}$$

となる。

例えば、これを簡単なものに適用すると、(17), (19) より

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \cos x dx &= I_2(x;2,1) = I_4(x;2,1,\pi) \\
&= 2!\left\{\sin(x+\pi) + x\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^2}{2}\sin x\right\} + C \\
&= -2\sin x + 2x\cos x + x^2 \sin x + C, \\
\int x^2 \sin x dx &= I_3(x;2,1) = I_4\left(x;2,1,\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 2!\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + x\sin x + \frac{x^2}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\} + C \\
&= 2\cos x + 2x\sin x - x^2\cos x + C
\end{aligned}
$$

のようになる。

4 その他の方法

次は、巾乗と三角関数の積の積分を、4 節の 2. の方針、すなわち微分によって求める方法を考える。$\alpha = 1$ のみ紹介する。

$$
f_2(x;n,\beta) = \frac{x^n}{n!}\sin\left(x - \frac{n\pi}{2} + \beta\right), \quad f_3(x;n,\beta) = \frac{x^n}{n!}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} + \beta\right) \tag{21}
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
f_2'(x;k,\beta) &= \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\sin\left(x - \frac{k\pi}{2} + \beta\right) + \frac{x^k}{k!}\cos\left(x - \frac{k\pi}{2} + \beta\right) \\
&= -\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\cos\left(x - \frac{(k-1)\pi}{2} + \beta\right) + \frac{x^k}{k!}\cos\left(x - \frac{k\pi}{2} + \beta\right) \\
&= -f_3(x;k-1,\beta) + f_3(x;k,\beta), \\
f_2'(x;0,\beta) &= (\sin(x+\beta))' \ = \ \cos(x+\beta) = f_3(x;0,\beta)
\end{aligned}
$$

より、

$$
f_3(x;n,\beta) = \sum_{k=0}^{n} f_2'(x;k,\beta)
$$

となり、よって、

$$
\int f_3(x;n,\beta)dx = \sum_{k=0}^{n} f_2(x;k,\beta) + C \tag{22}
$$

となる。これが (19) である。

次は 4 節の 3. の方針、すなわち複素数を利用する方法も考えておく。例えば $I_2(x;n,1)$ は、

$$\begin{aligned} I_2(x;n,1) &= \int x^n \cos x dx = \int x^n \operatorname{Re}(e^{ix})dx = \operatorname{Re}\left(\int x^n e^{ix}dx\right) \\ &= \operatorname{Re}(I_1(x;n,i)) \end{aligned}$$

と見ることができる (あるいは $I_1(x;n,i) = I_2(x;n,1) + iI_3(x;n,1)$ と見てもよい)。よって、(7) より、

$$\frac{(-i)^n}{n!}I_1(x;n,i) = \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-i)^k}{k!}x^k e^{ix} + C = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-i)^{k+1}}{k!}x^k e^{ix} + C$$

なので、

$$\frac{1}{n!}I_1(x;n,i) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-i)^{k+1-n}}{k!}x^k e^{ix} + C = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{i\pi(n-k-1)/2}e^{ix} + C$$

となり、よってこの実数部分を取れば

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!}I_2(x;n,1) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\cos\left(x + \frac{(n-k-1)\pi}{2}\right) + C \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2} - \frac{k\pi}{2}\right) + C \end{aligned}$$

となるが、これは (19) の展開の $\beta = n\pi/2$ の場合と同じものであり、すなわち (17) の最初の式を意味する。

また、$I_4(x;n,1,\beta)$ も、複素数を使って、

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!}I_4(x;n,1,\beta) &= \int \frac{x^n}{n!}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} + \beta\right)dx = \operatorname{Re}\left(\int \frac{x^n}{n!}e^{i(x-n\pi/2+\beta)}dx\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{i(\beta-n\pi/2)}i^n\frac{(-i)^n}{n!}I_1(x;n,i)\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i\beta}\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-i)^k}{k!}x^k e^{ix}\right) + C \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\cos\left(\beta - \frac{(k+1)\pi}{2} + x\right) + C = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\sin\left(x - \frac{k\pi}{2} + \beta\right) + C \end{aligned}$$

のようにして、(7) から (19) を得ることができることがわかる。

5 マクローリン展開による表示

2 節、3 節の途中でも少し触れたが、実は I_1, I_2, I_3 の最終的な形は、e^{-x} や $\sin x$, $\cos x$ のマクローリン展開の有限部分を持っている。この節で、その表現を見ておこう。そのため、関数 $f(x)$ の n 次のマクローリン展開を、便宜的に

$$[f(x)]_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \tag{23}$$

と書くことにする。なお、本節も $\alpha = 1$ の場合のみを考える。

まず、巾乗と指数関数の積の (6) には e^{-x} のマクリーーリン展開が含まれていて、

$$\frac{(-1)^n}{n!} I_1(x;n,1) = \int \frac{(-x)^n}{n!} e^x dx = e^x [e^{-x}]_n + C \tag{24}$$

となる。

三角関数の I_2, I_3 の展開形式の表現は、(14), (15) から得るか、または (17) と (19) (と加法定理) から得ることもできるが、ここでは前者でやってみる。

まず、(13) より

$$\begin{aligned}
I_2(x;0,1) &= \int \cos x dx = \sin x + C \\
I_3(x;0,1) &= \int \sin x dx = -\cos x + C \\
I_2(x;1,1) &= -I_3(x;0,1) + x\sin x = x\sin x + \cos x + C \\
I_3(x;1,1) &= I_2(x;0,1) - x\cos x = -x\cos x + \sin x + C
\end{aligned}$$

となる。(14) より、

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^n}{(2n)!} I_2(x;2n,1) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} I_2(x;2n-2,1) + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \sin x + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} \cos x \\
&= I_2(x;0,1) + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \sin x + \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{(2k-1)!} \cos x \right\} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right) \sin x + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) \cos x + C
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{(2n)!}I_2(x;2n,1) &= \int \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\cos x dx \\ &= [\cos x]_{2n}\sin x - [\sin x]_{2n-1}\cos x + C \qquad (25)\end{aligned}$$

が得られる。同様に、

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}I_2(x;2n+1,1) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}I_2(x;2n-1,1) + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin x + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\cos x \\ &= I_2(x;1,1) + \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin x + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\cos x\right\} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\sin x + \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right)\cos x + C\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}I_2(x;2n+1,1) &= \int \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos x dx \\ &= [\sin x]_{2n+1}\sin x + [\cos x]_{2n}\cos x + C \qquad (26)\end{aligned}$$

となる。

I_3 の方は、(14) と (15) より、I_2 の $\sin x$ を $-\cos x$ に、$\cos x$ を $\sin x$ にすればよいので、

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{(2n)!}I_3(x;2n,1) &= \int \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\sin x dx \\ &= -[\cos x]_{2n}\cos x - [\sin x]_{2n-1}\sin x + C \qquad (27) \\ \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}I_3(x;2n+1,1) &= \int \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin x dx \\ &= -[\sin x]_{2n+1}\cos x + [\cos x]_{2n}\sin x + C \qquad (28)\end{aligned}$$

となる。なお、(25) と (28)、(26) と (27) の形が似ている (実際 1 項しか違わない) のは、(13) がその理由である。

なぜ、このようなマクローリン展開が含まれるのかを少し考えてみる。マクローリン展開 $[f]_n$ の性質として、次の 2 つが容易にわかる。

$$\begin{aligned}[f]_n &= [f]_{n-1} + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) \qquad (29) \\ [f]_n &= [f']_{n-1} \qquad (30)\end{aligned}$$

なお後者は、f の n 次のマクローリン展開の導関数が、f' の $(n-1)$ 次のマクローリン展開となることを意味している。

これらを用いれば、例えば (24) は、右辺を微分すると、

$$\begin{aligned}(e^x[e^{-x}]_n)' &= (e^x)'[e^{-x}]_n + e^x([e^{-x}]_n)' \ = \ e^x[e^{-x}]_n + e^x[(e^{-x})']_{n-1}\\ &= e^x[e^{-x}]_n + e^x[-e^{-x}]_{n-1} \ = \ ([e^{-x}]_n - [e^{-x}]_{n-1})e^x\\ &= (e^{-x})^{(n)}\Big|_{x=0}\frac{x^n}{n!}e^x \ = \ \frac{(-1)^n x^n}{n!}e^x\end{aligned}$$

となり、確かに (24) の左辺の被積分関数に一致することがわかる。

同様に、例えば (25), (26) も

$$\begin{aligned}&([\cos x]_{2n}\sin x - [\sin x]_{2n-1}\cos x)'\\ &\quad= [-\sin x]_{2n-1}\sin x + [\cos x]_{2n}\cos x - [\cos x]_{2n-2}\cos x + [\sin x]_{2n-1}\sin x\\ &\quad= ([\cos x]_{2n} - [\cos x]_{2n-2})\cos x \ = \ \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\cos x\\ &([\sin x]_{2n+1}\sin x + [\cos x]_{2n}\cos x)'\\ &\quad= [\cos x]_{2n}\sin x + [\sin x]_{2n+1}\cos x - [\sin x]_{2n-1}\cos x - [\cos x]_{2n}\sin x\\ &\quad= ([\sin x]_{2n+1} - [\sin x]_{2n-1})\cos x \ = \ \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\cos x\end{aligned}$$

となって、それぞれ左辺の非積分関数に一致することがわかる。I_3 の方も同様に直接これらが成り立つことを証明できる。

ただし、これらはあくまで「証明」であって、マクローリン展開が現われることの説明や理由にはなっていない。そしてそれを考えていて、もう一つ、I_1, I_2, I_3 の計算方法を見つけることができたので、まずそれを以下に紹介する。

$x^n f^{(n+1)}(x)$ の積分を部分積分すると、

$$\int x^n f^{(n+1)}(x)dx = x^n f^{(n)}(x) - n\int x^{n-1}f^{(n)}(x)dx$$

となるので、両辺 $(-1)^n/n!$ 倍すれば

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int x^n f^{(n+1)}(x)dx = \frac{(-1)^n}{n!}x^n f^{(n)}(x) + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int x^{n-1}f^{(n)}(x)dx$$

となり、よって、

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int x^n f^{(n+1)}(x)dx \ = \ \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}x^k f^{(k)}(x) + \int f'(x)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k f^{(k)}(x) + C \tag{31}$$

となることがわかる。これを用いると (24) は、

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{n!} I_1(x;n,1) &= \frac{(-1)^n}{n!} \int x^n (e^x)^{(n+1)} dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k e^x + C \\ &= e^x [e^{-x}]_n + C\end{aligned}$$

のようにして得られ、同様に、I_2 の (25), (26) は

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{(2n)!} I_2(x;2n,1) &= \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \int x^{2n} (-1)^n \cos x dx \\ &= \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \int x^{2n} (\sin x)^{(2n+1)} dx = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k (\sin x)^{(k)} + C \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2j}}{(2j)!} (\sin x)^{(2j)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{-x^{2j-1}}{(2j-1)!} (\sin x)^{(2j-1)} + C \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2j}}{(2j)!} (-1)^j \sin x + \sum_{j=1}^{n} \frac{-x^{2j-1}}{(2j-1)!} (-1)^{j-1} \cos x + C \\ &= [\cos x]_{2n} \sin x - [\sin x]_{2n-1} \cos x + C, \\ \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} I_2(x;2n+1,1) &= \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} \int x^{2n+1} (-1)^{n+1} \cos x dx \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} \int x^{2n+1} (\cos x)^{(2n+2)} dx = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!} x^k (\cos x)^{(k)} + C \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2j}}{(2j)!} (\cos x)^{(2j)} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{-x^{2j-1}}{(2j-1)!} (\cos x)^{(2j-1)} + C \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2j}}{(2j)!} (-1)^j \cos x + \sum_{j=1}^{n} \frac{-x^{2j-1}}{(2j-1)!} (-1)^j \sin x + C \\ &= [\cos x]_{2n} \cos x + [\sin x]_{2n-1} \sin x + C\end{aligned}$$

として得られることがわかる。

ここから考えると、(31) の式は若干マクローリン展開の式に似てなくもないが、実際には $x=0$ を代入した微分係数も含まれておらずだいぶ違っていて、よって I_1, I_2, I_3 にマクローリン展開が含まれるのは、e^x や $\sin x, \cos x$ が n 階導関数で形が変わらないことによる偶然で、たまたまそのような形になっている、と思われる。すなわち、$f(x)=e^x$ ならば

$$f^{(k)}(x) = e^x = e^x f^{(k)}(0)$$

$f(x) = \cos x,\ g(x) = \sin x$ ならば

$$\begin{aligned}
f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \cos x = f^{(2k)}(0)\cos x - g^{(2k)}(0)\sin x \\
f^{(2k-1)}(x) &= (-1)^k \sin x = f^{(2k-1)}(0)\cos x - g^{(2k-1)}(0)\sin x \\
g^{(2k)}(x) &= (-1)^k \sin x = f^{(2k)}(0)\sin x + g^{(2k)}(0)\cos x \\
g^{(2k-1)}(x) &= (-1)^{k-1} \cos x = f^{(2k-1)}(0)\sin x + g^{(2k-1)}(0)\cos x
\end{aligned}$$

なので、これらの高階導関数が高階微分係数で表されて、たまたま (31) がマクローリン展開の形となる、といった具合である。

そのことを示す例を一つ紹介する。部分積分が良く使われる例として、次のようなものもある。

$$I_5(x; n, p, \alpha) = \int x^n (x+\alpha)^p dx \quad (\alpha \neq 0) \tag{32}$$

これも、$(x+\alpha)^p$ の方を積分する部分積分で x^n の次数を一つずつ下げることで積分できるものであるが、例えば $p = 5,\ \alpha = 1,\ n = 2$ の場合を考えると、(31) により

$$\begin{aligned}
I_5(x; 2, 5, 1) &= \int x^2 (x+1)^5 dx \ = \ 2 \cdot \frac{(-1)^2}{2!} \int x^2 \cdot \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6} ((x+1)^8)''' dx \\
&= \frac{2}{8 \cdot 7 \cdot 6} \left\{ (x+1)^8 - x \cdot 8(x+1)^7 + \frac{x^2}{2!} \cdot 8 \cdot 7 (x+1)^6 \right\} + C
\end{aligned}$$

となることがわかるが、これは $(x+1)^p$ のマクローリン展開は含まれてはいない。

よって (31) の積分結果にマクローリン展開が含まれるのは、微分によって形が変わらない e^x や $\sin x, \cos x$ だけに起こる特別な現象であることがわかる。

6 最後に

本稿では、通常の教科書ではあまり紹介されない、x^n と指数関数、三角関数の積の積分の表現式、およびそれを導く方法を紹介した。本文でも示したように、高校の教科書などでもこの形の部分積分の原理的な話は説明されるので、その続きの話として高校生でも十分に読めるかと思う。

過去に部分積分に関して、部分積分の公式自体について ([1])、および三角関数同士の積の積分の話 ([2]) を書いてきたが、本稿で取り上げたもの以外の典型

的な部分積分の例として、指数関数と三角関数の積、あるいはさらにそれに巾乗がかけ算されたものもある。それについても気が向いたらまたそのうちに書いてみようと思う。

参考文献

[1] 竹野茂治「部分積分の公式について」(2010)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/basic3.html#intpart1

[2] 竹野茂治「$\cos^m x \sin^n x$ の積分について」(2010)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/basic3.html#cosn-1