平成 22 年 3 月 16 日

部分積分の公式について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

部分積分の公式というと、大学向け、高校向けのどの教科書も、次の形で書かれているものが多いと思う。

公式 1:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

もちろん、$u(x)$, $v(x)$ を逆にした形のものはあるものの、普通この形以外のものを見ることはほとんどないし、私自身この形で学び、この形で使ってきた。

しかし、現在基礎数理で使用している教科書 [1] は、部分積分の公式を次の形で書いている。

公式 2:

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx \quad (G'(x) = g(x))$$

これは、公式 1 の $u(x)$ を $f(x)$、$v(x)$ を $G(x)$ と見た形をしている。

一般的には公式 1 が使われることや、高校の教科書でもそれで書いていることから、以前は講義では教科書とは別に公式 1 の形で教えていたが、数年前から 公式 1、公式 2 の両方を紹介し、

- 公式 1 はどちらかというと標準的である
- 公式 2 は、公式 1 よりも計算が少しやさしい

という形で教えている。

本稿では、この両者の長所、短所を比較し、それらについて考察し、その他の方法についても少し考えてみたいと思う。

2 通常の公式の性質

まず、公式 1 と公式 2 が同等であるのは明らかだと思うが、部分積分の公式自体は「積の微分の公式」を積分することで得られる。

$$(uv)' = u'v + uv'$$

であるから、

$$uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$$

より、右辺の積分を左辺に 1 つ移項すれば公式 1 が得られるわけである。

公式 1 の長所は以下の点であろう。

- 長所 1: 部分積分の証明である積の微分に近い形なので、公式を忘れたときに思い出しやすい
- 長所 2: 公式 2 よりも間違いにくい点もある

逆に以下のような短所もある。

- 短所 1: 初学者は積の一方を微分の形に一度直してから適用するところがやりにくいらしい (そういう間違いが多い)
- 短所 2: 思い出しやすいとはいっても、やはり公式を間違えて記憶する者も少なくない (真ん中の $-$ であるとか、微分をつける場所とか)

公式 1 を使用する場合の典型的な間違いは、$\int x\cos x\,dx$ を例にとれば以下のようなものである。

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\cos x)'\,dx = x\cos x - \int (x)'\cos x\,dx \tag{1}$$

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\cos x)'\,dx = x\sin x - \int (x)'\cos x\,dx \tag{2}$$

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\cos x - \int (x)'\sin x\,dx \tag{3}$$

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x + \int (x)'\sin x\,dx \tag{4}$$

$$\int x\cos x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)'\cos x\,dx = \frac{x^2}{2}\,\cos x - \int \frac{x^2}{2}\,(\cos x)'\,dx \tag{5}$$

(1) から (4) は公式の記憶ミスや使い方のミスで、(1), (2) は 短所 1 によるもの、(3), (4) は 短所 2 による間違いである。(5) は計算自体に間違いはないが、方針のミスである。

この 短所 1 による間違いは、教科書 [1] に載っている例が $\int xe^x\,dx$ であることにも原因があるように思う。e^x は微分も積分も e^x だから、その例で部分積分の公式を理解しようとする学生は (1), (2) のようにしてよい、と考えた可能性はある。

もちろん、講義ではそのような勘違いが起きないように、xe^x ではなく上の $x\cos x$ の積分で説明をしているのであるが、それでもこのような間違いがでるところを見ると、学生は、

- 普段の講義をほとんど聞いておらず (ノートも取らず)、試験前に初めて勉強しだす
- ノートは取るものの、ノートよりも教科書を信用する

という状況なのかもしれないが、このような間違いが必ずある割合は出てくるように思う。

最近、どうせ公式の記憶違いをするのであれば、短所 2 よりも多分ハードルが高いと思われる 短所 1 を解消できる公式 2 の方がいいのでは、と思うようになってきた。しかし、公式 1 もちゃんと使えるようになると、長所 2 に書いたように公式 2 よりも間違いにくいところもある。これは、3 節で説明しよう。

3 教科書に出ている公式

次は教科書 [1] に出ている公式 2 の性質について考える。

長所は以下の通りである。

- 長所 1: 公式 1 に比べて計算が 1 手少ない分やさしく、特に公式 1 の 短所 1 に対する間違いは防げる
- 長所 2: そもそも公式 1 で積の一方を「何かの微分」と書き戻すということは、そこは 1 回積分していることになるので、その意味では公式 1 より公式 2 の方が自然である

- 長所 3: 「部分積分」という言葉自体も公式 2 の方が説明しやすい

逆に短所は以下のようなものであろう。

- 短所 1: 公式 2 は対称性がないので覚えにくく、積の微分とも少し違う形なので、忘れたときにも思い出しにくい
- 短所 2: 公式 1 より覚えにくいためその点で間違いやすい (右辺の G を g としたり f' が f になっていたり)

公式 2 の長所、短所は、ほぼ公式 1 の短所、長所と表裏の関係にあるのだが、少し説明しよう。

まず 長所 1 であるが、$x\cos x$ の積分に公式 1 を用いた場合は、

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int (x)'\sin x\,dx$$

となるが、公式 2 を用いた場合は

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int (x)'\sin x\,dx$$

となるので、公式 2 は公式 1 よりも 1 手少なく、そして 2 節の (1), (2) のような間違いは起こらない。

長所 2 は、特に xe^{2x} の積分のような場合によくわかる。公式 1 を用いるなら「e^{2x} は何の微分であるか」と考え、

$$(e^{2x})' = 2e^{2x} \quad \text{だから} \quad \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' = e^{2x}$$

なので、

$$\int xe^{2x}\,dx = \int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\,dx$$

とすることから始めることになる。しかし、この「e^{2x} が何の微分であるのか」と考えることが不慣れな者には苦手なようである。

一方、公式 2 ならばそうは考えず、「e^{2x} を積分する」と考えるので、直接

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

という公式を利用できるのでその点で公式 2 の方がやさしい。「それが何の微分か」と考えることは「その積分は何か」と同じであり、むしろ後者の方がストレートでわかりやすいと思う。

長所 3 は、「部分積分」が英語の「integration by parts」の訳語である通り、「部分的に一方のみ積分する」ということを指しているわけだから、その点でも公式 2 の方が自然である、ということである。

ただし、公式 2 を使用した場合も間違いは多い。典型的には以下のようなものである。

$$\begin{aligned}
\int x\cos x\,dx &= x\sin x - \int (x)'\cos x\,dx &\quad (6)\\
\int x\cos x\,dx &= x\sin x - \int x(\sin x)'\,dx &\quad (7)\\
\int x\cos x\,dx &= x\cos x - \int (x)'\sin x\,dx &\quad (8)\\
\int x\cos x\,dx &= (x)'\sin x - \int x\sin x\,dx &\quad (9)
\end{aligned}$$

いずれも 短所 2 による間違いであるが、(7), (9) のような間違いは 公式 1 では起きにくい。つまり、公式 1 では「積分の中の微分が v から u に移る」と説明できるためにそのように間違えることは少ないのであるが、公式 2 では右辺に急に微分が出てくるために、右辺のどこに微分がつくのであったかを間違えることが多いようである。

また、公式 1 ならば

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx$$

と書いた後は、「右辺には $\sin x$ しか表われず、$\cos x$ は出てこないはず」ということを身につければ (6), (7), (8) のような間違いは起こらない ((2), (3) も)。これが 2 節の最後に書いた 公式 1 の 長所 2 の利点である。しかし、これに対し公式 2 は 短所 2 に由来する間違いが起こりやすく、これを防ぐことは難しく、この点では公式 2 は不利である。

4 公式を利用しない部分積分

ここまでは、公式 1、あるいは公式 2 を用いた部分積分を議論してきたが、「公式を用いない部分積分」もある。やや手間がかかる方法であるが、「部分的に一方を積分する」という考え方を利用する以下のような方法である。

方法 3:

1. $\int f(x)g(x)\,dx$ の一方を積分した $f(x)G(x)$ を作る
2. その残り (差) を $H(x)$ とし、
$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) + H(x) \tag{10}$$
と置いてこの両辺を微分する:
$$f(x)g(x) = f'(x)G(x) + f(x)g(x) + H'(x), \quad H'(x) = f'(x)G(x)$$
3. この最後の式を積分して
$$H(x) = \int f'(x)g(x)\,dx$$
を計算して、その結果を (10) に代入する

例として、$I = \int (3x-1)\sin x\,dx$ を計算してみる。$\sin x$ の方のみを積分して、その余りを $f(x)$ と置くと、

$$I = \int (3x-1)\sin x\,dx = (3x-1)(-\cos x) + f(x) \tag{11}$$

となるが、この (11) の両辺を微分すると、

$$(3x-1)\sin x = 3(-\cos x) + (3x-1)\sin x + f'(x)$$

となるので、$f'(x) = 3\cos x$ となるからこれを積分して

$$f(x) = \int 3\cos x\,dx = 3\sin x + C$$

となる。これを (11) に代入すれば

$$I = -(3x-1)\cos x + 3\sin x + C$$

が得られる、といった具合である。

この方法 3 の長所は、

- 長所 1: 公式を覚える必要はないので、公式の覚え間違いによる誤答は防げる
- 長所 2: 微分計算もしているので、検算もしやすい (逆に読んでいけばよい)

等だろう。これらの点では公式 1 や公式 2 よりも優れていると言えるが、逆に欠点は、

- 短所 1: 積の微分でミスをする学生にはむしろ間違いの元となりうる (特に積分と微分が混ざった計算では、$\sin x$ と $\cos x$ のどちらに $-$ がつくのかを間違える学生が多い)
- 短所 2: 公式 1、公式 2 よりも手間がかかる (少なくともそのように見える) ので、学生には敬遠されるかもしれない
- 短所 3: 特に複数回部分積分が必要な場合は、余計に面倒である。
- 短所 4: 部分積分の有効性を教え (理解し) にくい

であろうか。

積の微分は苦手な学生も多いので、短所 1 は大きな欠点かもしれないが、そのような学生には、例えば公式 1 の 長所 1 も長所にはならないので、その点では公式 1 とは差し引きされるかもしれない。

また、短所 2 の「手間がかかる」という欠点も、むしろ手間をかけて丁寧にやれば間違いが少ないということであり、途中の計算も残りやすいので、そういう点ではよいことも多い。

しかし、最後の 短所 4 は、例えば公式 1 であれば「uv' よりも $u'v$ の積分の方が楽になる場合に部分積分は有効である」と説明できるが、方法 3 ではそうはいかない、ということを意味していて、これはある意味致命的で、その有効性を認識してもらうためには公式 1 や公式 2 を示す必要があり、方法 3 は補助的な使用に留まらざるを得ないと思う。

5 微分のない公式

次に、部分積分の微分のない公式を紹介する。

公式 2 は、公式 1 の「関数と導関数の関係」を、一つ「原始関数と関数の関係」に書き直したものと見ることができる。それをもう一方にも行えば、微分のない部分積分の公式を作ることができる。それは以下の形となる。

公式 4:

$$\int Fg\,dx = FG - \int fG\,dx \quad (F' = f,\ G = g)$$

微分が公式に入らないことでいいところもあるように見えるかもしれないが、実際には、微分を表す u' の記号に対して、原始関数を表す記号が $\int u\,dx$ しかないため、残念ながらこの公式 4 はあまり有用ではない。例えば $x\cos x$ の積分で考えてみると、x は 1 の積分なので、

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= \int\left(\int 1\,dx\right)\cos x\,dx\\ &= \left(\int 1\,dx\right)\left(\int \cos x\,dx\right) - \int 1\left(\int \cos x\,dx\right)\,dx\\ &= x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

といった感じである。

今、仮に $u = u(x)$ の原始関数を $u^* = u^*(x)$ と書くことにすると、公式 4 は、

$$\int f^*g\,dx = f^*g^* - \int fg^*\,dx$$

となるが、これで上の計算をしてみると

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= \int (1)^*\cos x\,dx\\ &= (1)^*(\cos x)^* - \int 1(\cos x)^*\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx\\ &= x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

となる。

しかし、これは通常の部分積分の公式 1 とほぼ同等であり、楽になっているわけではないし、独自の記号を用いる点、あるいは原始関数の積分定数の不定部分の処理などの点で不利だと思われる。

6 最後に

本稿では、部分積分に関する 4 つの公式、方法を考察してきたが、

- 公式 4 はあまり意味がない
- 方法 3 は、公式は覚えなくてよいが手間がかかるし、部分積分の有効性を教える (理解する) ことが難しいので、使うとしても補助的なものだろう (例えば検算とか)

ということがわかった。

公式 1、公式 2 については、

- 覚えやすさでは公式 1 の方が上
- 計算しやすさでは公式 2 の方が上

であり、そのどちらかを取るかでどちらが良いかは変わってくるが、

- 公式 2 の方が記憶違いのミスは多い
- 公式 1 の方がクリアしないといけない壁は高い

ので、大学の講義では演習の時間が高校に比べて少ないことから、大学で初めて部分積分を学ぶ学生にはむしろ公式 1 の方が適していると言えるだろう。

よって、しばらく講義では公式 2、公式 1 の併用 (方法 3 は余談としてプリントででも紹介するかも) することになるだろう。そして、公式 2 の覚え方を何とか工夫できれば、ほとんどの本で見ることのない公式 2 にも大きな可能性があることも、今回改めて確認できた。

参考文献

[1] 石原繁、浅野重初「理工系入門 微分積分」(1999)、裳華房