2022 年 10 月 24 日

合成関数の微分に関する補足 その 2

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

以前、合成関数の微分に関する補足として、[2] でその公式のラフな証明、すなわち高校の教科書で良く紹介されいている証明と、合成関数らしいがそうではない関数の微分の方法を紹介した。

講義で使用している教科書の今の版 [1] では、そのラフな証明の問題点もクリアにするものが付録に書かれているのだが、少しわかりにくいところもあるので、本稿では、その証明を少しわかりやすくしたものを紹介する。

また、教科書の証明は、実は普通の解析の本に書いてある証明とは少し違っていて、場合分けを行う証明なのだが、良く見られる場合分けによらない証明も紹介する。

2 教科書の証明

まず、公式 2.6 の正確な形を紹介する。

$u=g(x)$ が $x=a$ で微分可能、すなわち

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x}=g'(a) \tag{1}$$

の極限値が存在し、$y=f(u)$ が $u=b=g(a)$ で微分可能、すなわち

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(b+\Delta u)-f(b)}{\Delta u}=f'(b) \tag{2}$$

の極限値が存在するとき、合成関数 $y=h(x)=f(g(x))$ は $x=a$ で微分可能で、その微分係数 $h'(a)$ は

$$h'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(a+\Delta x)-h(a)}{\Delta x}=f'(b)g'(a)=f'(g(a))g'(a) \tag{3}$$

となる。

まず、この公式の、高校の教科書などに書かれている証明を改めて紹介する。

証明

$$\frac{h(a+\Delta x)-h(a)}{\Delta x}=\frac{f(g(a+\Delta x))-f(g(a))}{\Delta x} \tag{4}$$

であり、$\Delta u=g(a+\Delta x)-g(a)$ とすれば $g(a+\Delta x)=\Delta u+g(a)=\Delta u+b$ で、また仮定 (1) より

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u=\lim_{\Delta x\to 0}\{g(a+\Delta x)-g(a)\}=0 \tag{5}$$

となるので、(4) は、

$$\begin{aligned}\frac{h(a+\Delta x)-h(a)}{\Delta x}&=\frac{f(b+\Delta u)-f(b)}{\Delta x}\\ &=\frac{f(b+\Delta u)-f(b)}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x} &(6)\\ &=\frac{f(b+\Delta u)-f(b)}{\Delta u}\times\frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x} &(7)\end{aligned}$$

と書ける。よって、(5), および仮定 (1), (2) により (7) は $\Delta x\to 0$ のときに $f'(b)g'(a)=f'(g(a))g'(a)$ に収束するので (3) が成り立つ。
(証明おわり)

高校の教科書などの証明はこれで終わりなのであるが、講義の教科書 [1] の付録にある証明で指摘している通り、上の証明には問題がある。それは、(6) の式変形の部分である。元々、

$$\lim_{x\to a}F(x)=p \tag{8}$$

の定義は、「x が $x\neq a$ の状態を保ちながら a に近づくとき、それはどのような近づきかたをしても $F(x)$ の値が p に近づくこと」であり、特定の点列を除外して近づくことは許されない。

一方で、$\Delta u=g(a+\Delta x)-g(a)$ は、Δx が 0 に近づくときに途中で Δu が 0 の値を取ることは十分ありうるし、それが無限個の場合もありうる。その簡単な例は、$g(x)=c$ (定数) の場合であり、教科書 [1] に書いてあるような a の近くで無限に振動する場合もある。ところが $\Delta u=0$ となる Δx では当然 (6) の式変形が行えず、よってそのような Δx に対しては (6), (7) では $f'(b)g'(a)$ に収束することが示せていない、ということが問題となる。

これを、場合分けして考えるのが教科書の付録にある証明であるが、少しそれを明確にするために次のような集合を導入しよう。十分小さい $\delta>0$ に対して、集合 $A(\delta)$, $B(\delta)$ を

$$\begin{cases} A(\delta) & = \{\Delta x \in (-\delta,\delta)\setminus\{0\};\ g(a+\Delta x)-g(a)\neq 0\} \\ B(\delta) & = \{\Delta x \in (-\delta,\delta)\setminus\{0\};\ g(a+\Delta x)-g(a)= 0\} \end{cases} \tag{9}$$

と定める。もし十分小さい δ に対して $B(\delta)$ が空集合になれば、$-\delta<\Delta x<\delta$, $\Delta x\neq 0$ に対して、$\Delta u = g(a+\Delta x)-g(a)\neq 0$ なので上の論法で証明は終了する。

問題なのは、どんなに小さい δ に対しても $B(\delta)$ が空集合にならない場合、すなわち $B(\delta)$ の中に少なくとも 0 に収束するような Δx の無限列が存在する場合である。以下、そのような場合を考える。

この場合、逆に $A(\delta)$ が空になる場合もあるが、$A(\delta)$ 内で 0 に収束するような Δx の列に対しては、上の論法により (4) が $f'(b)g'(a)$ に収束することは言える。

$B(\delta)$ 内で 0 に収束するような Δx の列を $\{\Delta x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ $(\subset B(\delta))$ と書くことにすると、$g(a+\Delta x_n)-g(a)=0$ であり、よって $n\to\infty$ に対して、仮定 (1) により

$$0 = \frac{g(a+\Delta x_n)-g(a)}{\Delta x_n} \to g'(a)$$

なので、この場合は $g'(a)=0$ でなければいけないことになる。そして、当然

$$h(a+\Delta x_n)-h(a) = f(g(a+\Delta x_n))-f(g(a)) = f(g(a))-f(g(a)) = 0$$

であるから、以上により以下が言えたことになる。

- $A(\delta)$ 内の 0 に収束する Δx に対しては、(4) は $f'(b)g'(a)$ に収束
- $g'(a)=0$
- $B(\delta)$ 内の 0 に収束する Δx に対しては、(4) は 0

これらにより、Δx がどのように近づいても (4) は 0 に収束することになり、すなわちその極限の存在が保証され、まず $h(x)$ が $x=a$ で微分可能であることがわかる。そして、その微分係数 $h'(a)$ は 0 であり、それは確かに $f'(b)g'(a)=0$ に一致することになる。

これで、$B(\delta)$ の中に少なくとも 0 に収束するような Δx の無限列が存在する場合でも、公式 2.6 が成り立つことが示されたことになる。

教科書 [1] 付録の証明も、ほぼ同じことを言っているのであるが、若干説明が足りないので、やや理解しにくいのではないかと思う。

3 場合分けしない証明

本節では、公式 2.6 の場合分けをしない証明を紹介する。むしろ、解析の教科書で「公式 2.6 の厳密な証明」という場合は、通常はこちらの証明が書いてあることの方が多い。

まず、仮定 (1), (2) を書き直すところから始める。

一般に極限 (8) は、$G(x) = F(x) - p$ とおけば、これは $x \neq a$ の a の近くで定義され、

$$\lim_{x \to a} G(x) = 0 \tag{10}$$

となるが、さらに $G(a)$ を $G(a) = 0$ と定義すれば、$G(x)$ は a の近くで定義され、(8) は $G(x)$ が $x = a$ で連続、ということと同値になる。

これと同様にして、(1) から $G(\Delta x)$ を

$$G(\Delta x) = \begin{cases} \dfrac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x} - g'(a) & (\Delta x \neq 0) \\ 0 & (\Delta x = 0) \end{cases} \tag{11}$$

と定義し、(2) から $F(\Delta u)$ を

$$F(\Delta u) = \begin{cases} \dfrac{f(b + \Delta u) - f(b)}{\Delta u} - f'(b) & (\Delta u \neq 0) \\ 0 & (\Delta u = 0) \end{cases} \tag{12}$$

と定義すると、$G(\Delta x), F(\Delta u)$ はそれぞれ 0 で連続となり、それがそれぞれ (1), (2) の仮定と同値になる。

$\Delta x \neq 0$ のときは、(11) より

$$g(a + \Delta x) - g(a) = (g'(a) + G(\Delta x))\Delta x \tag{13}$$

となるが、これは $\Delta x = 0$ のときも両辺 0 となるので成立する。同様に、$\Delta u \neq 0$ のときは、(12) より

$$f(b + \Delta u) - f(b) = (f'(b) + F(\Delta u))\Delta u \tag{14}$$

となるが、これも $\Delta u = 0$ のときも両辺 0 となり成立する。

これらにより、$\Delta u = g(a + \Delta x) - g(a)$ とし、$h(a + \Delta x) - h(a)$ を $F, G, \Delta x$ で表すと (Δu が 0 であるかないかに関わらず)、

$$\begin{aligned} h(a + \Delta x) - h(a) \ &= \ f(g(a + \Delta x)) - f(g(a)) \ = \ f(b + \Delta u) - f(b) \\ &= \ (f'(b) + F(\Delta u))\Delta u \\ &= \ \{f'(b) + F((g'(a) + G(\Delta x))\Delta x)\}\{g'(a) + G(\Delta x)\}\Delta x \end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{h(a + \Delta x) - h(a)}{\Delta x} = \{f'(b) + F((g'(a) + G(\Delta x))\Delta x)\}\{g'(a) + G(\Delta x)\} \tag{15}$$

となり、よって $\Delta x \to 0$ とすると、F, G の 0 での連続性、およびその値 (極限) が 0 であることから、右辺は $f'(b)g'(a)$ に収束することがわかる。よって、$h(x)$ は $x = a$ で微分可能で、その微分係数は $f'(b)g'(a)$ となる。これで公式 2.6 が証明されたことになる。

この証明の場合は、微分可能性を F, G を使って表現することにより Δu での割算を避けていて、それにより前節の証明のような場合分けが必要なくなっている。しかしこの証明の場合メリットはそれ位で、逆にこの証明だと元々の合成関数の微分がどうしてその形になるのかが見えにくくなっていて、よってそれほどいい証明とも言えないと思う。

4 変化率での説明

最後に一つ、変化率による合成関数の微分の説明を紹介する。

$g'(a) = du/dx$ は $x = a$ での g の変化率、すなわち x の 1 の変化に対する u の変化を意味する。

例えば、ある鉄の棒を熱したとき、x を熱した時間 [秒]、$u = g(x)$ をそのときの温度 [度] とすると、$g(10)$ は 10 秒後の温度、$g'(10)$ は 10 秒経過時点での、1

秒当たりの温度上昇、を意味する。だから $g(10) = 45$, $g'(10) = 2.5$ であれば、10 秒後は 45 度で、10 秒経過時点では 1 秒当たり 2.5 度 (2.5 度/秒) 温度が上昇していることを意味し、例えば 10.2 秒後は約 0.5 度上がり約 45.5 度となる。

そして $y = f(u)$ を温度 u のときの棒の長さ [m] とすると、合成関数 $h(x) = f(g(x))$ は、x 秒後の棒の長さとなる。$f'(u)$ は温度 u 度のときの 1 度当たりの棒の伸びを意味し、例えば $f(45) = 5.5$, $f'(45) = 0.4$ であれば、温度 45 度のときは 5.5m で、温度 45 度付近では、1 度温度が上昇すると 0.4m の割合で伸びることになる (0.4m/度)。

このとき、10 秒後の棒の長さは、$h(10) = f(g(10)) = f(45) = 5.5\mathrm{m}$ で、その 10 秒経過時点での棒の 1 秒当たりの伸び L [m/秒] は、1 秒当たり温度が 2.5 度上昇し、温度 1 度の上昇毎に棒は 0.4 m 伸びるので、

$$L = 2.5 \times 0.4 = 1.0\mathrm{m}/\text{秒}$$

となる。これは、$a = 10$, $b = g(10) = 45$ に対して

$$h'(a) = f'(b)g'(a)$$

となること、すなわち公式 2.6 を意味する。

参考文献

[1] 石川琢磨、植野義明、中根静男、「微分積分学」(2017; 第 1 版第 5 刷)、学術図書出版社

[2] 竹野茂治「合成関数の微分に関する補足」(2021) `http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/data/gosei1.pdf`