2021 年 11 月 05 日

合成関数の微分に関する補足

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

本稿では、講義で紹介できなかった、合成関数の微分に関する補足を 2 つ、定理のラフな証明と、複雑だが合成関数とは見られない関数の微分の方法を紹介する。

2 ラフな証明

まず、この教科書 [1] の合成関数の微分の公式 2.6 の、ラフな証明を紹介する。教科書ではこの公式の証明は付録に書かれていて、ここで紹介する「ラフ」な証明とは、実はその証明の前半部分の (i) のことである。後半の (ii) まで含めて厳密な証明となるが、雰囲気は (i) で十分わかると思う。ただし、[1] の (i) の説明は、多少省略されて書かれていてややわかりにくそうなので、それを少し丁寧に紹介する。

合成関数 $y = h(x) = f(g(x))$ に対して、$y = f(u)$, $u = g(x)$ と分けたときに、証明すべき公式 2.6 は

$$y' = h'(x) = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{1}$$

である。これは、通常

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \tag{2}$$

の形でも書かれる。dy/du は y を u の関数として微分したもの、すなわち $f'(u)$ であり、du/dx は u を x の関数として微分したもの、すなわち $g'(x)$、dy/dx は y を x の関数として微分したもの、すなわち $h'(x)$ となるので、(1) と (2) は同じことを意味することになる。

(2) のように書くのは、これが分数の約分のように見えて覚えやすい形であるから、という理由もあるが、dy/dx という記号は、少なくとも現代では「y を x で微分したもの」を意味する記号であり、「dy を dx で割った商」ではなく、「Δy を Δx で割った商の極限 (0/0 の不定形の極限)」と考えるので、直接その約分により (2) が証明されるわけではない。

導関数は、極限によって、

$$y' = h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

と定義される。ここで、Δy は、x を Δx だけ増やしたときの y の増加量 (「増分」) を意味し、式で書けば

$$\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x)$$

である。この、x の Δx の変化に対する u の増分 Δu は

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

であり、これにより

$$g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta u = u + \Delta u$$

と書けるので、y の増分 Δy は、

$$\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)) = f(u + \Delta u) - f(u)$$

とも書けることになり、よって Δy は、u の変化量 Δu に対する y の増分と見ることもできる。これにより、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \times \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \end{aligned} \tag{4}$$

となる。$\Delta x \to 0$ の際に、当然 $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \to 0$ となるので、よって (4) でその極限を考えれば

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(u)g'(x)$$

となり、これと (3) を合わせれば (1) が示されたことになる。

なお、(4) は、意味はわかりにくくなるが、簡単に

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

と書くこともできる。こう書くと、これはほぼ (2) と同形で、よって (2) は「分数の約分」ではないのだが、その証明自体は極限を取る前の「分数の約分」の形で行われていることになり、結局 (2) はある意味で「分数の約分」を意味することになる。

3 複雑な関数の微分

次は、単純には合成関数と見ることができない複雑な関数の微分について紹介する。

講義では、以下のような関数は合成関数とは見られないと例示した。

$$y = \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}} \tag{5}$$

例えば、$u = x^2 + 4$ と置いても $y = 3x/\sqrt{u}$ となって x が残ってしまうため、これは合成関数にはならない。合成関数であるためには、y は u だけの関数でなければいけない。

では、この関数は微分できないかと言えば、そうではなく、積の微分などと組み合わせればちゃんと微分できる。つまり、

$$y = \frac{3}{\sqrt{x^2+4}} \times x$$

のように、合成関数と x の積と見て、積の微分を先に適用すればよい。まず、

$$z = \frac{3}{\sqrt{x^2+4}} \tag{6}$$

と置くと $y = zx$ となる。ここで、y, z は x を変数とする関数であることに注意する。積の微分により、

$$y' = (zx)' = (z)'x + z(x)' = z'x + z \tag{7}$$

となる。次にこの z' を求める。z は (6) より合成関数で、$u=x^2+4$ とすれば $z=3/\sqrt{u}=3u^{-1/2}$ なので、合成関数の微分により、

$$z'=(3u^{-1/2})'(x^2+4)'=-\frac{3}{2}u^{-3/2}\cdot 2x=-3u^{-3/2}x=-3(x^2+4)^{-3/2}x$$

と求まる。これを (7) に代入すれば、

$$y'=z'x+z=-3(x^2+4)^{-3/2}x^2+\frac{3}{\sqrt{x^2+4}}=-\frac{3x^2}{(\sqrt{x^2+4})^3}+\frac{3}{\sqrt{x^2+4}} \tag{8}$$

と求まることになる。合成関数と見られる部分を分離して、合成関数部分の微分にのみあらためて合成関数の微分を使えばよい。なお、この式はさらに変形すると、

$$y'=-\frac{3x^2}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}+\frac{3}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{-3x^2+3(x^2+4)}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}=\frac{12}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} \tag{9}$$

となる。

同様に、

$$y=\frac{3}{x+\sqrt{x^2+4}} \tag{10}$$

も、$u=x^2+4$ では y に x が残るので単純な合成関数ではないが、合成関数が含まれる商と見ることで微分ができる。$z=\sqrt{x^2+4}$ とすれば、z は合成関数で $y=3/(x+z)$ なので、まず商の微分により、

$$y'=\frac{(3)'(x+z)-3(x+z)'}{(x+z)^2}=-\frac{3(1+z')}{(x+z)^2} \tag{11}$$

となる。次は z' を求める。$u=x^2+4$ とすれば $z=\sqrt{u}=u^{1/2}$ より、

$$z'=(u^{1/2})'(x^2+4)'=\frac{1}{2}u^{-1/2}2x=(x^2+4)^{-1/2}x$$

となるので、これを (11) に代入すれば、

$$y'=-\frac{3\{1+(x^2+4)^{-1/2}x\}}{(x+\sqrt{x^2+4})^2} \tag{12}$$

と求まることになる。なお、さらに変形すると、

$$y' = \frac{-3\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)}{(x+\sqrt{x^2+4})^2} = \frac{-3(\sqrt{x^2+4}+x)}{\sqrt{x^2+4}(x+\sqrt{x^2+4})^2} = \frac{-3}{\sqrt{x^2+4}(x+\sqrt{x^2+4})}$$

となる。

さらに、合成関数と合成関数の組み合わせもありうる。例えば、

$$y = \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{x^2+4}}} \tag{13}$$

のような場合である。これも単純な合成関数ではなく、$u = x^2+4$ では、y は u のみの関数にはならない。この場合は、$u = x-\sqrt{x^2+4}$ と置くと、$y = 1/\sqrt{u} = u^{-1/2}$ となり、dy/du は難しくない。ただし、du/dx がまだ簡単には求まる形ではないが、$z = \sqrt{x^2+4}$ とすると、$u = x-z$ で、z が合成関数なので、z' は別に合成関数の微分で求めることができる。外側から順番に計算すると、合成関数の微分により

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} = (u^{-1/2})'(x-z)' = -\frac{1}{2}u^{-3/2}(1-z') \tag{14}$$

となる。z' は、$w = x^2+4$ とすると $z = \sqrt{w} = w^{1/2}$ より

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dw}\times\frac{dw}{dx} = (w^{1/2})'(x^2+4)' = \frac{1}{2}w^{-1/2}\cdot 2x = w^{-1/2}x$$

なので、これを (14) に代入すれば、

$$y' = -\frac{1}{2}u^{-3/2}(1-w^{-1/2}x) = -\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)^{-3/2}\{1-(x^2+4)^{-1/2}x\} \tag{15}$$

と求まる。なお、さらに式変形すると、

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{2(x-\sqrt{x^2+4})\sqrt{x-\sqrt{x^2+4}}} \\ &= -\frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2\sqrt{x^2+4}(x-\sqrt{x^2+4})\sqrt{x-\sqrt{x^2+4}}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}\sqrt{x-\sqrt{x^2+4}}} \end{aligned}$$

となる。

参考文献

[1] 石川琢磨、植野義明、中根静男、「微分積分学」(2008)、学術図書出版社