2006 年 8 月 31 日

基礎数理 III 期末テスト (2006) の誤答等について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

小テストについては、講義中に典型的な誤答について注意したが、期末テストは指摘する機会がないので、ここにまとめておく。

2 全般的な注意

今回は、広義積分、面積、体積、偏微分などが試験範囲であったが、偏微分は大学で初めて習う分野であるためか、記号の使い方等が正しくない答案がいくつか見られた。特に気になったのは以下のような書き方である。

1. $f(x,y)_x$, $f(1,2)_x$ などと書くもの
2. $z(x,y)$, $z(1,2)$ のように書くもの

2.1 微分と代入の順序

まず、1. の $f(x,y)_x$, $f(1,2)_x$ であるが、これは書いた本人は「$f(x,y)$ を x で偏微分したもの」、「それに $(x,y)=(1,2)$ を代入したもの」というつもりで書いたのだろうと思うが、特に後の方の式それを表してはいない。

右下に偏微分を表す x をつける場合、その式の意味は、詳しく言えば次のようになる。

- $f_x(x,y)$: f という名前の関数を、それを元々定義していた式を x で偏微分して、その式の最初の変数に x を、後の変数に y を代入したもの
- $f(x,y)_x$ これは、$\{f(x,y)\}_x$ に等しく、つまり、f という名前の関数の最初の変数に x を、後の変数に y を代入したものを x で偏微分したもの

ということになる。前者は微分が先でその後に代入、後者は代入が先でその後が微分、という点が異なる。一変数関数の場合の $f'(x)$ と $\{f(x)\}'$ の関係と同じである。

この場合、元々 f が x, y の式として定義されていたのなら問題はないが、もし f が最初に

$$f(t, x) = 3t^2 - 4x^2 + 3tx$$

とでも定義されていたとすれば、両者の意味は異なることになる。つまりこの場合、元々の定義式の言う x は第一変数ではなく第二変数であるから、

$$f_x = f_x(t, x) = -8x + 3t$$

となるので、

$$f_x(x, y) = (f_x \text{ の } (t, x) \text{ に } (x, y) \text{ を代入したもの }) = -8y + 3x$$

となるが、

$$f(x, y) = (f \text{ の } (t, x) \text{ に } (x, y) \text{ を代入したもの }) = 3x^2 - 4y^2 + 3xy$$

なので、

$$f(x, y)_x = 6x + 3y$$

となってしまうからである。

今回の問題の場合は、元々 f が (x, y) の式であったので、このような誤解はないが、$f(1, 2)_x$ はどちらの場合でも明らかな間違いである。すなわち、

$$f(1, 2)_x = \ (f(1, 2) \text{ を } x \text{ で偏微分したもの}) \ = 0$$

となるからである $(f(1, 2)$ は定数$)$。

2.2 従属変数

また、2. の $z(x, y)$ や $z(1, 2)$ であるが、これは場合によっては間違いとは言えないが、通常このような書き方はしない。

例えば一変数の関数の場合、$y = f(x)$ と書くが、この場合、y は従属変数、つまり (独立変数) x の値の変化によって値が変わるものを意味し、関数 $f(x)$ の値域の集合のある値を取る変数であって関数ではない。

それに対して右辺の $f(x)$ の方は、f が関数名であり、その関数に x という値を代入した状態を意味している。名前の後に (x) と書くのは、その名前のものが関数であることを表している。$f(x)$ は x の式であるが、本来 y 自体が x の式なのではなく、y はその x の式によって値が定まるものである。

つまり y 自体は、その $f(x)$ の値が代入されるが、関数ではなく変数であるから普通 $y(x)$ とは書かない。

それと同様で、$z = f(x, y)$ と書けば、それは z は、関数 f の x, y の値によって決定する値が代入される変数 (従属変数) を意味し、z 自体は関数ではない。

だから本来は $z(1, 2)$ ではなく、$f(1, 2)$ と書くべきで、もし元の問題が $z = (x, y$ の式$)$ のように与えられたのであれば、講義中に説明した通り、一度「この右辺を $f(x, y)$ とすると」と書いて、$f(x, y)$ という関数記号を導入した上で $f(1, 2)$ と書くべきである。

ただし、一変数関数の場合の y 自体、あるいは二変数関数の z 自体を関数と見ることは絶対にないかというと、それには伝統に根ざした例外があり、実は y' や z_x という記号は、本来 y 自体が x の関数である、あるいは z 自体が x, y の関数であると見なした書き方である。

だから、必ずそういう見方はしない、というわけでもないが、今回このような書き方が見られたのは接平面の問題であって、接平面の場合は、x, y, z という 3 次元の座標系でのグラフを扱うので、z を関数と見ると、それが軸の名前なのか、関数の名前なのかがややこしく、そのように接平面の式を書いてしまうと

$$z - z(1, 2) = z_x(1, 2)(x - 1) + z_y(1, 2)(y - 2)$$

となって、式の最初に現れる z とその次の $z(1, 2)$ の z が同じものを意味すると見えてしまう (最初の z は座標、あるいは x, y の従属変数としての z であるが、その次の $z(1, 2)$ の z はそれとは無関係の関数名としての z)。

1 つの問題の中で、1 つの記号が 2 つの意味を持つような記法は避けるべきであるから、この問題ではやはり、「この右辺を $f(x, y)$ とすると」と書くべきだと思う。

3 その他の誤答

色々目についた間違いを上げる。

- $(\sqrt{x} + 1)^2 = (x + 1)$ (正しくは $(x + 2\sqrt{x} + 1)$)
- $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{3/2}$ や $x^{-3/2}$ (正しくは $x^{-1/3}$)
- $3 \cdot 2^{2/3} = 6^{2/3}$ (積よりも累乗の方が優先順位は先なので、こんな計算はできない)

- $\int x^{-1/3}dx = \dfrac{1}{-1/3}x^{2/3} + C$ (正しくは $\dfrac{1}{2/3}x^{2/3} + C$)
- $\int e^{-2x}dx = -\dfrac{1}{2}e^{x} + C$ (正しくは $-\dfrac{1}{2}e^{-2x} + C$)
- $\dfrac{3}{2}2^{2/3} = 3$
- $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x} = e^{-2\infty}$ (この講義ではこのように書いてはいけない、とした)
- $z = x\sqrt{x^2+y^2}$ を x で偏微分するときに、$u = x^2+y^2$ と置いて $xu^{1/2}$ とし、これに合成関数の微分を使って $z_x = \dfrac{d(xu^{1/2})}{du}\dfrac{\partial u}{\partial x}$ とするもの ($xu^{1/2}$ は u のみの式ではないから $\dfrac{d(xu^{1/2})}{du}$ は意味がない)
- $f_x(x,y) = 2x + 3y = 2 - 6 = -4$

この最後のものは多少説明を要する。これは接平面の問題に出てきた書き方であるが、これ自体は正確に言えば間違いではないが、一行省略していることによって接平面の公式との対応をわかりにくくしている計算式である。

接平面の公式は、以下の通りである:

$z = f(x,y)$ の、$(x,y) = (a,b)$ における接平面は、

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

この式の $f(a,b),\ f_x(a,b),\ f_y(a,b)$ を求めて、それらを代入すればよいのであるが、例えば、$f(x,y) = x^2 + xy - 3y^2$、$(a,b) = (1,2)$ であるとしてこの問題を解く場合、普通は、次のようにすると思う。

$$\begin{aligned} f(1,2) &= 1 + 2 - 12 = -9, \\ f_x(x,y) &= 2x + y, \quad \text{よって } f_x(1,2) = 2 + 2 = 4, \\ f_y(x,y) &= x - 6y, \quad \text{よって } f_y(1,2) = 1 - 12 = -11 \end{aligned}$$

よって、これらを公式

$$z - f(1,2) = f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2)$$

に代入し、

$$z + 9 = 4(x-1) - 11(y-2) = 4x - 11y + 18$$

よって $z = 4x - 11y + 9$

しかし、答案では、$f_x(1,2)$ などの計算を以下のようにしているものがいくつか見られた。

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = 1 + 2 - 12 = -9, \\
&f_x(x,y) = 2x + y = 2 + 2 = 4, \\
&f_y(x,y) = x - 6y = 1 - 12 = -11
\end{aligned}
$$

これらは、一旦 $f_x(x,y)$ の式を求めた後で、それに $(x,y) = (1,2)$ を代入して $f_x(1,2) =$ と書くのを省略した書き方になっていて、もし「$(x,y) = (1,2)$ では」と断わっていれば一応間違いではないが、このように書くと x, y の式だったものが急に定数に変わるので、やや紛らわしい。

しかも求めたものが「$f_x(x,y) = 4$」のようになっているため、元の接平面の公式に該当部分がない (公式の方は $f_x(x,y)$ ではなくて $f_x(1,2)$) ので、中には公式の方を勝手に

$$z - f(x,y) = f_x(x,y)(x-a) + f_y(x,y)(y-b)$$

のように書いているものまでいたが、この式は明らかに間違いである。つまりこの式では、$f_x(x,y)$ の (x,y) と (a,b) は別のものと見なされるので、むしろ代入すべきは 4 ではなくて $2x+y$ だということになってしまう。

4 最後に

慣れていない部分の記号の使い方などは、慣れるに従ってどのように書くべきか、どのように書いてはいけないかがわかってくるものだと思うが、基礎数理ではもう偏微分の計算を丁寧にやることはないと思うので、もう一度正しい書き方、使い方がなんであるかを、あらためて教科書、あるいは講義ノート、宿題の解答例などを見直して学び直して欲しい。

また、試験の答案は、自分だけ理解すればいいものではなく、採点者に見せるためのものであるから (そしてもちろん最終的には、誰にでもわかってもらえる書き方を身に付けるためのものであるから)、皆に誤解なく理解できる正しい書き方をしなければいけないし、それを目指して欲しい。