2022 年 11 月 01 日

指数・対数の微分

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

講義では、指数関数、対数関数の微分の公式は紹介したが、証明は省略したので、ここでそれらの証明のいくつかを紹介する。

2 教科書の証明

指数関数、対数関数の微分の公式は以下の通り。

- 公式 1. (教科書 [1] では公式 2.9): $(e^x)' = e^x$
- 公式 2. (教科書では公式 2.10): $\left(\log_e x\right)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$
- 公式 3. (教科書では公式 2.13): $(a^x)' = a^x \log_e a$
- 公式 4. (教科書にはない): $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\log_e a} = \dfrac{\log_a e}{x}$ $(x > 0)$

教科書 [1] では、これらを以下の順で示している。

1. e の定義 (教科書 p11 下):

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n \text{ は自然数}) \tag{1}$$

2. それは実数 x に拡張でき、さらに $x \to -\infty$ でも同じものに収束 (教科書 (1.1)):

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad (x \text{ は実数}) \tag{2}$$

3. (2) で $1/x=h$ としたもの (教科書 p13 上):

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}=e \tag{3}$$

4. (3) の対数を取ったもの (教科書公式 1.4):

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)}{h}=1 \tag{4}$$

5. (4) で $\log_e(1+h)=t$ とすると得られるもの (教科書公式 1.5):

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1 \tag{5}$$

6. (4) と微分の定義から公式 2 を、(5) と微分の定義から公式 1 を導く
7. 公式 3 は対数微分法で (教科書に証明はない)
8. 公式 4 は底の変換で (教科書に証明はない)

上の 2. の (2) については教科書には詳しい説明はないが、それは以前 [2] で説明をした。その他、7., 8. 以外は教科書に書いてある通りなので、以下で 7., 8. の説明をする。なお、7., 8. の証明が教科書 [1] に書いてないのは、多分 7. の方は、その直前に書いてある $y=2^x$ の微分の対数微分法による例で一般の $y=a^x$ の場合もわかるだろう、ということだと思われるし、8. の方は、公式としなくても底の変換を行えばすぐに計算できるだろう、ということだと思われる。

まず、7. は、いわゆる「対数微分法」を使うのであるが、それは合成関数の微分の応用なので、ここでは公式 2 と合成関数の微分を組み合わせることで、公式 3 が成り立つことを示す。

$y=f(x)=a^x$ とし、この微分を考える。

$$z=\log_e y=\log_e f(x)$$

とすると、合成関数の微分と公式 2 より、

$$z'=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\times\frac{dy}{dx}=\left(\log_e y\right)'\times f'(x)=\frac{1}{y}f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

となるが、一方で $z=\log_e a^x=x\log_e a$ より $z'=\log_e a$ となる。よって、

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\log_e a$$

なので、

$$f'(x) = f(x)\log_e a = a^x \log_e a$$

となって公式 3 が得られる。

次は 8。これは、底の変換により

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a}$$

と書けるので、公式 2 より

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{\log_e a}\left(\log_e x\right)' = \frac{1}{x\log_e a}$$

となって公式 4 が得られる。このようにして教科書では

- (5) $\Rightarrow$ 公式 1
- (4) $\Rightarrow$ 公式 2 $\Rightarrow$ 公式 3, 4

という流れで 4 つの公式を示しているようである。

解析学の教科書の多くが、似たような流れで指数関数、対数関数の導関数の証明を紹介しているが、公式 3 の証明については対数微分法以外にも、公式 1 から得る方法もあるし、公式 4 から得る方法もあり、そういう証明を採用している教科書も少なくない。

3 逆関数の関係を利用する証明

前節で述べた証明の他に、逆関数の関係

$$y = e^x \quad\Leftrightarrow\quad x = \log_e y$$
$$y = a^x \quad\Leftrightarrow\quad x = \log_a y$$

を利用して、一方から他方、すなわち指数関数の微分から対数関数の微分、または対数関数の微分から指数関数の微分を導く方法もある。これは、一般には

逆関数の微分法 (教科書 [1] では公式 2.17) を使うのだが、逆関数の微分法は、対数微分法と同様に合成関数の微分の応用と見ることができるので、合成関数の微分法のみで示すことも可能である。本節では、その考え方で、一方から他方を導く証明を考えてみる。

まずは、公式 1 を仮定して公式 2 を導いてみる。すなわち $y = f(x) = \log_e x$ の導関数を求める。これは、

$$x = e^y = e^{f(x)}$$

と書けるので、この式の両辺を x で微分すると、左辺の微分は 1 で、右辺の微分は、公式 1 と合成関数の微分により、

$$(e^{f(x)})' = \frac{de^y}{dy} \times \frac{dy}{dx} = e^y f'(x) = e^{f(x)} f'(x)$$

となるから、$e^{f(x)} = x$ より $1 = e^{f(x)} f'(x) = xf'(x)$ となり、よって

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

となり公式 2 が得られた。

今度は、公式 4 を仮定して公式 3、すなわち $y = g(x) = a^x$ の導関数を求める。これは、

$$x = \log_a y = \log_a g(x)$$

と書け、両辺を x で微分すると公式 4 と合成関数の微分により、

$$1 = \left(\log_a g(x)\right)' = \frac{d\log_a y}{dy} \times \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y\log_a e} g'(x) = \frac{1}{a^x \log_a e} g'(x)$$

となるので、$g'(x) = a^x \log_a e$ の公式 3 が得られる。

4 グラフを利用する証明

逆関数のグラフ同士は、$y = x$ に関して対称という関係がある。これを利用して、逆関数の微分をグラフを用いて考える方法もある。今度はその方法で、例えば公式 3 から公式 4 を導いてみる。

今、$y=f(x)=\log_a x$ とし、公式 3 を仮定した上でこの関数の、$x=p$ での微分係数 $f'(p)$ を求める。$f'(p)$ は、この関数のグラフの $(x,y)=(p,f(p))=\left(p,\log_a p\right)$ でのグラフの傾きであることに注意する。この関数のグラフの横軸と縦軸を

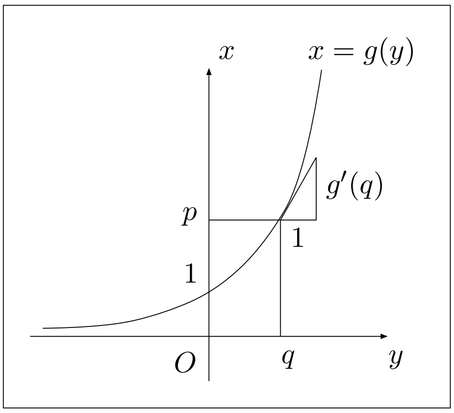

図 1: $x=g(y)$ のグラフ

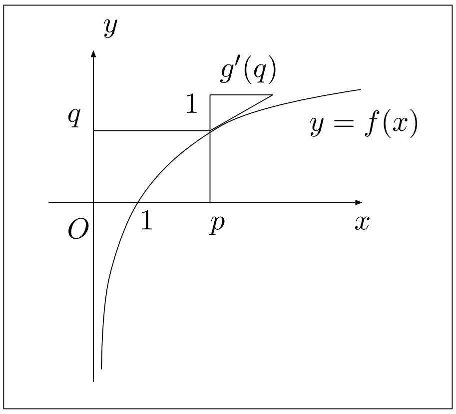

図 2: $y=f(x)$ のグラフ

入れ替えると、$x=g(y)=a^y$ のグラフになる (図 1)。先程の点は、そのグラフの $(y,x)=(f(p),p)=\left(\log_a p,p\right)$ に対応し、$q=\log_a p$ とすると $p=a^q$ で、$(y,x)=(q,g(q))$ となる。その点での $x=g(y)$ のグラフの傾きは、公式 3 より、

$$g'(q)=a^q\log_e a=p\log_e a \tag{6}$$

となるが、$y=f(x)$ のグラフと $x=g(y)$ のグラフは軸の縦と横を入れ替えたものなので、$x=g(y)$ のグラフの $(y,x)=(q,g(q))$ での傾き $g'(q)$、すなわち横方向の y 方向に 1 進むときに縦方向の x 方向に $g'(q)$ 上がる傾きは、$y=f(x)$ のグラフの $(x,y)=(p,f(p))=(g(q),q)$ では、横方向の x 方向に $g'(q)$ 進むときに縦方向の y 方向に 1 上がる傾き $1/g'(q)$ に変わり (図 2)、それが $f'(p)$ に等しいので、よって

$$f'(p)=\frac{1}{g'(q)}$$

となることがわかる。よって、(6) から

$$f'(p)=\frac{1}{g'(q)}=\frac{1}{p\log_e a}$$

となるので公式 4 が得られたことになる。

5 拡大と平行移動による証明

公式 1, 2 は、いずれも元の関数の定数倍の形になっているが、それは、教科書の証明を見ると指数法則からそれが得られることがわかる。そしてそれは、指数関数の拡大と平行移動に関する性質から導くこともでき、本節ではそれについて考えてみる。

$y = f(x) = a^x$ とすると、この関数のグラフを x 方向に $-p$ 移動すると、それは元のグラフを y 方向に a^p 倍したことに等しくなる (図 3)。すなわち、

$$f(x+p) = a^{x+p} = a^x a^p = a^p f(x) \tag{7}$$

が成り立つ。ここから、$y = f(x)$ の $x = p$ での傾き $f'(p)$ は、そのままグラフを

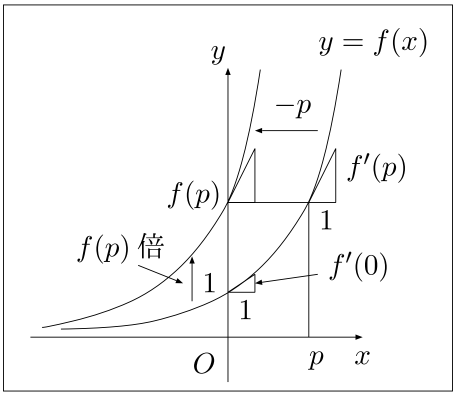

図 3: 平行移動と拡大

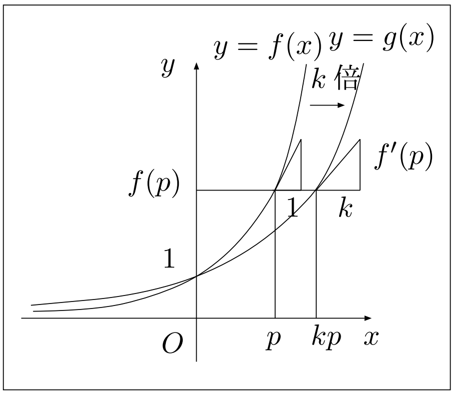

図 4: x 方向の拡大

x 方向に $-p$ 平行移動しても傾きは変わらず、それが $f(x)$ の $x = 0$ での y 方向の a^p 倍のグラフに一致するので、$x = 0$ での傾きの a^p 倍に等しいことになる。すなわち、$f'(p) = a^p f'(0)$ が成り立ち、よって一般に

$$f'(x) = a^x f'(0) \tag{8}$$

となる。

なお、この式はグラフによらなくても (7) を x で微分して $x = 0$ とすることでも得られる。

あとは、$f'(0)$ だけ求めればよいのであるが、この値は a によって変動し、丁度 $f'(0) = 1$ となるのが $a = e$ の場合であり、それと (8) により公式 1 が成り立つことになる。

実際、(5) の左辺は $g(x) = e^x$ の $x = 0$ での微分係数 $g'(0)$ の定義と同じ式であり、つまり (5) は $g'(0) = 1$ を示しているが、それが導かれる経路を考えると、実は元々 e という定数の定義は、この $g'(0)$ が 1 となるような底であると見ることもできる。つまり、「$f(x) = a^x$ に対し $f'(0) = 1$ となる a」が e の定義で、その定義と公式 1 は (8) によりほぼ直結することになる。

さて、一般の a に対する公式 3 も、グラフの拡大の考え方で、この公式 1 から導いてみよう。上と同じく $f(x) = a^x$, $g(x) = e^x$ とする。$y = f(x)$ のグラフを x 方向に k $(\neq 0)$ 倍すると、その関数は

$$y = f\left(\frac{x}{k}\right) = a^{x/k} = (a^{1/k})^x$$

となるが、もし $a^{1/k} = e$ となる k があれば、これは $y = g(x) = e^x$ に一致することになる。この k は、$a = e^k$ より $k = \log_e a$ と求まり、そしてこの k に対して $f(x/k) = g(x)$ となる (図 4)。

$y = f(x)$ の $(x, y) = (p, f(p))$ での傾き $f'(p)$ は、そのグラフを x 方向に k 倍した $y = f(x/k) = g(x)$ のグラフでは、$(x, y) = (kp, f(p)) = (kp, g(kp))$ での傾きに対応するが、その傾きは $f'(p)$ の $1/k$ 倍となる。すなわち、$f'(p)/k = g'(kp)$ となるので、公式 1 により

$$f'(p) = kg'(kp) = ke^{kp} = (e^k)^p k = a^p \log_e a$$

となり、これで公式 3 が得られたことになる。なお、この議論は $k < 0$ の場合も成立することに注意せよ。

ちなみに、(4) の左辺も、$\log_e x$ の $x = 1$ での微分係数を意味していて、そして対数関数の導関数が $1/x$ の定数倍であることも、指数関数の場合と同様に得られる。$y = h(x) = \log_a x$ とすると、このグラフを y 方向に $-h(p)$ 下げると、それは元のグラフの x 方向の p 倍に対応する。

$$h(x) - h(p) = \log_a x - \log_a p = \log_a \frac{x}{p} = h\left(\frac{x}{p}\right)$$

よって、$x = p$ での $y = h(x)$ の傾き $h'(p)$ は、$x = 1$ での傾き $h'(1)$ の $1/p$ 倍となる。すなわち $h'(p) = h'(1)/p$ より

$$h'(x) = \frac{h'(1)}{x}$$

となる。この $h'(1)$ が 1 となるのが $a = e$ のときであり、一般には $h'(1) = \log_a e = 1/\log_e a$ となるが、それも指数関数の場合と同様に示される。

参考文献

[1] 石川琢磨、植野義明、中根静男、「微分積分学」(2017; 第 1 版第 5 刷)、学術図書出版社

[2] 竹野茂治「指数関数に関するある補題の証明」(2021)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/data/explem1.pdf