2021 年 11 月 05 日

教科書 (1.1) の証明

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

この講義の教科書 [1] の式 (1.1)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{1}$$

は、指数関数 e^x、対数関数 $\log_e x$ の導関数を決定する大事な極限であるが、教科書 [1] ではその証明を省略しているので、本稿ではそれを紹介する。証明の元になるのは、e の定義

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{2}$$

である。なお、(2) は n で書いてあるからこの n は自然数を意味し、(1) は x で書いてあるからこの x は実数を意味することに注意しよう。つまり、(1) の極限は、x は整数以外の値も取りながらの極限を意味する。

また、(1) で「$\pm\infty$」となっているのは、

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{3}$$

と

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{4}$$

の両方が成立することを意味する。よってこの両方を示す必要がある。

ちなみにこの (1) は、最終的には [1] p13 の上にある

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e \tag{5}$$

を示すためのものである。もし (1)、すなわち (3) と (4) が言えれば、(3) で $x=1/h$ ($h=1/x$) とすると $x\to\infty$ は $h\to+0$ を意味し、よって

$$\lim_{h\to+0}(1+h)^{1/h}=e \tag{6}$$

が得られ、(4) で $x=1/h$ ($h=1/x$) とすると $x\to-\infty$ は $h\to-0$ を意味し、よって

$$\lim_{h\to-0}(1+h)^{1/h}=e \tag{7}$$

が得られるので、よって (6), (7) の両方を合わせて (5) が得られることになる。

最初の定義 (2) で $h=1/n$ としても、それは 1/2,1/3,1/4,... というとびとびの h の値に対してのみ $(1+h)^{1/h}$ の極限が e になる、ということしか言えたことにはならず、(5) はおろか (6) にすらならない。だから、(5) を示すためには、定義 (2) の n を実数 x に拡張したもの (3)、および負の無限大の方向の極限 (4) も同じ値になること、すなわち (1) が必要になるのである。

2 証明

まずは (3) を示す。$x\to\infty$ であるから、$x>1$ としてよい。今、$n\le x<n+1$ となる自然数 n ($=x$ の整数部分) をとると、

$$1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1} \tag{8}$$

となる。これらはいずれも 1 より大きいので、当然

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\ \ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

となって、よって、

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \tag{9}$$

が成り立つことになる。$x \to \infty$ の際、当然 $n \to \infty$ となり、

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \times 1 = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1} = \lim_{m\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m}}{1+\dfrac{1}{m}} = \frac{e}{1} = e$$

$$(m = n+1)$$

となるので、(9) とはさみうちの原理により (3) が示されたことになる。

次は (4) であるが、こちらは $x \to -\infty$ に対して $y = -x-1$ $(x = -y-1)$ とすると、$y \to \infty$ で、

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1-\frac{1}{y+1}\right)^{-y-1} = \left(\frac{y}{y+1}\right)^{-y-1} = \left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1} = \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}$$

となるので、(3) より

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\left(1+\frac{1}{y}\right) = e \times 1 = e$$

となることがわかる。これで (4) が示されたことになる。

参考文献

[1] 石川琢磨、植野義明、中根静男、「微分積分学」(2008)、学術図書出版社