2015 年 12 月 07 日

「無限小」による微分の公式の証明

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

現在は、微分の定義は通常極限を用いて行われていて、導関数の公式も原則極限を用いて証明される。

よって「dy/dx」は、一応は「$\Delta y/\Delta x$」の極限、という意味は持っているのだが、$dy \div dx$ という分数の意味は持たず、「y を x で微分したもの」と見ることになっている。

しかし、合成関数の微分や逆関数の微分の公式では「dy/dx」の分数らしい性質がでてくるし、置換積分では、「$dy = f'(x)dx$」のような、「$dy/dx = f'(x)$」の左辺を分数と見た式も使われているし、工学の本や海外の本では「dx」のような「無限小」を利用する計算は今でも使われている場合もある。そして、そのような計算の方が説明がわかりやすく見えることもある。

よって、現在では厳密な議論ではないということで (特に日本では)「無限小」による説明は排斥されがちなのであるが、それを紹介することも特に工学教育などでは多少は意味があるのではと考え、ここに記すことにする。

2 極限による通常の定義

現在、導関数の定義は、極限を用いて、

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

のように行われる。しかし、それによって通常行われる積の微分、商の微分の証明は、やや見通しが悪いように思う。例えば積の微分は、通常以下のように行われる。

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta x)(g(x+\Delta x) - g(x)) + (f(x+\Delta x) - f(x))g(x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\, g(x) \\
&= f(x)g'(x) + f'(x)g(x)
\end{aligned}
$$

この途中の変形は、やや不自然に見えて、あまりわかりやすい証明とは言えないと感じるが、以下のようにすると多少は改善すると思う。

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x),\ \ \Delta g = g(x+\Delta x) - g(x)$$

とすると、$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f$, $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g$ で、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x),\ \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(x)$$

より、

$$
\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta \to 0} \frac{(f(x)+\Delta f)(g(x)+\Delta g) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)g(x) + f(x)\Delta g + g(x)\Delta f + \Delta f \Delta g - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g \right) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}
$$

となる、というやり方である。これなら、途中の計算は自然に展開するだけなので、よりわかりやすいだろうと思う。

実は、この方法は「無限小」による証明に近い手法である。

3 無限小と微分

無限小を用いる方法では、あまり厳密には見えない、少し「怪しげ」な式変形も行われる。

まず、dx を限りなく小さい x の変化を表すものとして「無限小」と呼ぶ。そして、dx に対する $y = f(x)$ の増分を dy や df のように書く。

$$dy = df = f(x+dx) - f(x) \tag{2}$$

dy も「無限小」となる (そう考える)。この dy と dx の比がグラフの傾きである導関数 $f'(x)$ を表すのであるが、それは通常有限な値なので、その点でこの dy と dx は同程度の小ささを持つ無限小であり、「同位の無限小」と呼ぶ。

一方、dx に対して $(dx)^2$ は、dx よりもはるかに小さい無限小となるので「高位の無限小」と呼ぶ。

無限小を用いる方法では、例えば $A\ (\neq 0)$, B に対して、$I = Adx + B(dx)^2$ という式では、$(dx)^2$ は dx より高位の無限小であるから「無視できる」として、$I = Adx$ のようにしたりする。同様に、$I = A + Bdx$ という式も $I = A$ のようにすることがある (できる)。

そして $f'(x)$ を、この dy と dx の比であると定める:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad dy = f'(x)dx$$

この定義で、$f(x) = ax+b$ の導関数と、$f(x) = x^2$ の導関数を計算する。まず、$f(x) = ax + b$ の場合、

$$df = f(x + dx) - f(x) = a(x + dx) + b - (ax + b) = adx$$

なので、

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{adx}{dx} = a$$

と、簡単に割り算で得られることになる。また、$f(x) = x^2$ の場合は、

$$\begin{aligned} df &= f(x + dx) - f(x) = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + 2xdx + (dx)^2 - x^2 \\ &= 2xdx + (dx)^2 \end{aligned}$$

となるが、上に書いたように $(dx)^2$ は $2xdx$ に比べて高位の無限小なので無視すれば、$df = 2xdx$ となり、よって、

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{2xdx}{dx} = 2x$$

となる。x^3 で同じことを行うと、$(dx)^2$, $(dx)^3$ が出てくるが、それらも高位として無視すれば、割と易しく $(x^3)' = 3x^2$ が得られる。

4 微分の公式の証明

無限小の方法を用いた場合、積の微分の公式の「証明」は以下のようになる。

$$d(fg) = f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x)$$

であり、$df = f(x+dx) - f(x)$ より $f(x+dx) = f(x) + df$ なので、

$$\begin{aligned} d(fg) &= (f(x)+df)(g(x)+dg) - f(x)g(x) \\ &= f(x)g(x) + f(x)dg + g(x)df + dfdg - f(x)g(x) \\ &= f(x)dg + g(x)df + dfdg \end{aligned}$$

となるが、$dfdg$ は $f(x)dg + g(x)df$ より高位の無限小なので無視すれば、

$$d(fg) = f(x)dg + g(x)df$$

となる。よって、

$$\frac{d(fg)}{dx} = f(x)\frac{dg}{dx} + g(x)\frac{df}{dx}$$

となる、といった形になる。

この証明は、2 節の最後に上げた方法と本質的に同じであることがわかるだろう。しかも展開により自然に積の微分の形が得られていることや、最後の $dfdg$ が消える理由も、むしろこちらの方がわかりやすく感じる人もいるかもしれない。

なお、$df = f'(x)dx$ であることに注意すれば、上の変形は、

$$\begin{aligned} d(fg) &= (f(x)+f'(x)dx)(g(x)+g'(x)dx) - f(x)g(x) \\ &= f(x)g'(x)dx + f'(x)g(x)dx + f'(x)g'(x)(dx)^2 \\ &= (f(x)g'(x) + f'(x)g(x))dx \end{aligned}$$

のようにして ($(dx)^2$ は高位なので無視している)、両辺を dx で割る、とすることもできる。

同様に、商の微分の公式も以下のようにできる。

$$\begin{aligned} d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{f(x+dx)}{g(x+dx)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)+df}{g(x)+dg} - \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f(x)g(x)+g(x)df - f(x)g(x) - f(x)dg}{g(x)(g(x)+dg)} = \frac{g(x)df - f(x)dg}{g(x)^2 + g(x)dg} \end{aligned}$$

この分母の $g(x)^2 + g(x)dg$ では $g(x)dg$ は無限小なので $g(x)^2$ に対して無視できるから、

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(x)df - f(x)dg}{g(x)^2}$$

となり、よって両辺を dx で割れば、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

となる。

合成関数 $y = f(g(x))$ の微分の公式も、$f(u+du) = f(u) + df = f(u) + f'(u)du$ を用いれば、

$$\begin{aligned} d(f(g(x))) &= f(g(x+dx)) - f(g(x)) = f(g(x)+dg) - f(g(x)) \\ &= f(g(x)) + f'(g(x))dg - f(g(x)) = f'(g(x))dg \end{aligned}$$

となり、よって、

$$\frac{d(f(g(x)))}{dx} = f'(g(x))\frac{dg}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

が得られる。

5 最後に

微分の定義に使われている「極限」の考え方は、考え方としては工学などでも色々な場面に出てくるが、工学で極限の具体的な計算を要求されることは、もちろん広義積分等全くないわけではないだろうが、そんなに多くないのではないかと思う。

微分の公式にしても、ほとんどの工学の学生にとっては、その証明まできちんと論理的に説明できる必要はなく、むしろその結果である微分の公式が使えることの方が重要度は高い。

となれば微分の公式などの「証明・説明」も、厳密さよりも、むしろその雰囲気がわかる形の方がよいだろうと思う。

講義では、教科書に書かれている色々な「証明」でそのような工夫を考えているが、この微分の公式についても、こういう説明もあるのではないかと思い、参考資料として書いて配布して説明したこともある。

しかし、教科書から完全に離れて講義でこの手法で全面的に説明するだけの勇気はまだない。もしそのような教科書があれば考えなくもないが、1 節に書いたように日本ではしばらくそういう教科書が出るようには思えない。