2022 年 10 月 26 日

雪玉の問題について

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 解答で気がついたこと

第 5 回の復習問題で出した、雪玉の問題について、気がついたことと補足についてまとめておく。

まず、元の問題は以下の通り。

> 太陽の下に置いた雪玉の t 分後の体積 $V(t)$、表面積 $S(t)$ に対して、「体積減少率 ($=1$ 分当たりの体積減少) は表面積に比例する」を V, S で表しなさい (比例定数は a (>0) とする)。

これは、時間に対する体積増加率が $V'(t)=dV/dt$ なので、体積減少率は $-V'(t)$、よって「$-V'(t)=aS(t)$」が正解となるが、以下のような間違いがかなりあった (しかもそれが間違いであることに気がついていないようで丸としてある)。

- 「$-V(t)=aS(t)$」
- 「増加率が $V'(x)$ なので」

$-V(t)$ は体積減少率ではなくて、体積の (-1) 倍。導関数の意味が理解できていないものと思われる。

増加率の変数が x になっているのは、通常の微分が $f'(x)$ であるからの癖か、あるいは私の手書きの正答例の t を x と見たのかもしれない。

いずれにせよ、導関数の意味に関する問題は、工学ではむしろ導関数の計算よりも重要かもしれないので、こういう見方はちゃんとできてもらいたい。例えば、以下のような日本語と式の対応も正しく把握できる必要がある。

- 「最初の体積」$=V(0)$
- 「t 分後までの体積の減少」$=V(0)-V(t)$

- 「t 分後までの体積の平均減少率」$= (V(0) - V(t))/t$
- 「t 分後時点の体積減少率」$= -V'(t)$

特に、最後の 2 つの違いは区別する必要がある。$-V'(t)$ は、丁度 t 分後の時点での減少率であって、極限によって定義される「微分係数」(導関数の値) を意味し、「平均減少率」は極限を取らない平均的な変化率を意味する。

数学の教科書では、よく $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ を平均変化率、$\displaystyle\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a)$ を微分係数と呼んでいるが、それに対応する。「2 点の傾き」と「その点での接線の傾き」、あるいは「平均速度」と「瞬間的な速度」も同様の関係にある。

2 続きの話

講義中には、その問題の雪玉に対する法則がそれなりに自然であるという話はしたが、それによって作った式

$$-V'(t) = aS(t) \tag{1}$$

は作っただけで終わっていた。この続きの話をしておく。

雪玉が法則に従ってとけていくと、段々表面積が小さくなっていくので、とける速さも徐々に遅くなるが、最終的には T 分後に完全にとけて $V(T) = S(T) = 0$ となることが予想される。

実際にその T の値、および途中の $V(t)$ がどのような式で表されるのかも、実は (1) から求めることができる。物理法則を元に微分を使った式を立てることにより V と t の完全な関係式を求められることが、微分の大きな力であり、そしてそのことによって微積分成立以後の科学は大きく発展したとも言える。(1) のような未知関数 (今の場合は $V(t)$ や $S(t)$) に対する微分の関係式を「微分方程式」と呼ぶ。

この微分方程式 (1) を解いて $V(t)$ を t の式で表してみよう。まず、(1) から $S(t)$ を消去して $V(t)$ だけの式にする。雪玉が球体のまま小さくなると仮定し、その半径を $r = r(t)$ とすると、

$$S(t) = 4\pi r^2, \quad V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

なので、

$$r = \left(\frac{3V(t)}{4\pi}\right)^{1/3}, \quad S(t) = 4\pi\left(\frac{3V(t)}{4\pi}\right)^{2/3} = bV(t)^{2/3} \quad (b = (36\pi)^{1/3}) \tag{2}$$

となる。これにより、(1) は、

$$V'(t) = -abV(t)^{2/3} \tag{3}$$

となる。この微分方程式 (3) は、「変数分離形」と呼ばれる形で、一般的な解法もあるが、ここではより単純な方法で求める。

今、$u = u(t) = V(t)^{1/3}$ とすると、合成関数の微分により、

$$u'(t) = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dV} \times \frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}V(t)^{-2/3}V'(t) \tag{4}$$

となるので、ここに (3) を代入すると、

$$u'(t) = \frac{1}{3}V(t)^{-2/3}(-abV(t)^{2/3}) = -\frac{ab}{3} \tag{5}$$

となって $u'(t)$ は定数となる。よって $u(t)$ は t の一次式で、t の係数は $(-ab/3)$ となる。$t = 0$ では $u(0) = V(0)^{1/3}$ なので、結局

$$u(t) = -\frac{ab}{3}t + V(0)^{1/3} \tag{6}$$

となり、$u(t) = V(t)^{1/3}$ より

$$V(t) = \left(V(0)^{1/3} - \frac{ab}{3}t\right)^3 \tag{7}$$

となることがわかる。これで $V(t)$ を表す式が得られた。

また、雪玉がなくなる時刻 T は、

$$V(T) = \left(V(0)^{1/3} - \frac{ab}{3}T\right)^3 = 0$$

より、

$$T = \frac{3}{ab}V(0)^{1/3} = \frac{1}{a}\left(\frac{27}{36\pi}V(0)\right)^{1/3} = \frac{1}{a}\left(\frac{3}{4\pi}V(0)\right)^{1/3} \tag{8}$$

と求まる。なお、比例定数 a は、温度など環境によって変わるが、実測、すなわち一定時間でどれくらい半径が減ったかを調べれば求めることはできる。

例えば、半径が R[cm] のときに、半径が k [cm/分] 減っていたとする (半径の減少を 1 分当たりに直した値)。このとき、半径が R のときの時刻を $t = s$ とすると、k は $r = r(t)$ の $t = s$ での減少率だから、

$$V(s) = \frac{4\pi}{3}R^3, \quad S(s) = 4\pi R^2, \quad r(s) = R, \quad r'(s) = -k \tag{9}$$

となる。ここで、合成関数の微分により、

$$V'(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt} = \frac{4\pi}{3} \times 3r^2 \times r'(t) = 4\pi r(t)^2 r'(t) \tag{10}$$

となるので、$t = s$ とすれば (9) より

$$V'(s) = 4\pi R^2(-k) = -4\pi R^2 k$$

となる。よって、(1) で $t = s$ とすれば、

$$4\pi R^2 k = a \times 4\pi R^2$$

より $a = k$ となる。

なお、(7) を $r = r(t)$ で表してみると、

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{3}r(t)^3 &= \left\{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} r(0) - \frac{a}{3}(36\pi)^{1/3}t\right\}^3 \\
&= \left\{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} r(0) - a\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} t\right\}^3 = \frac{4\pi}{3}(r(0) - at)^3
\end{aligned}$$

より、

$$r(t) = r(0) - at \tag{11}$$

となって、むしろ $r(t)$ の式はずっと易しくなる。(11) から、または (8) からもわかるが、T も r で表せば、$r(T) = 0$ より

$$T = \frac{r(0)}{a} \tag{12}$$

となる。