

2021年12月03日

微分して元に戻る関数について: その2

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

[1] では、1回、2回、4回微分して元に戻る関数を紹介したが、ここでは「3回微分して元に戻るものを求めるのは少し難しい」と書いてそれ自体は紹介しなかった。

本稿では、講義でも話だけしている3回微分して元に戻る関数、および一般の n 回微分して元に戻る関数について紹介する。

なお、本稿で用いる手法は、[1]と同様の手法、すなわちなるべく初等的で、積分も使わず微分のみを用いて説明する。ただし、積分の代わりに「 $y' = 0$ ならば $y = \text{定数}$ 」は用いることにする。

2 微分演算子による分解

まず、3回微分して元に戻る関数

$$y''' = y \tag{1}$$

について考える。[1]と同様、微分演算子 $D = d/dx$ を用いると(1)は、

$$y''' - y = D^3y - y = (D^3 - 1)y = 0$$

と書け、そして $D^3 - 1$ は

$$D^3 - 1 = (D - 1)(D^2 + D + 1) = (D^2 + D + 1)(D - 1)$$

と因数分解できるので、

$$h = y'' + y' + y (= (D^2 + D + 1)y)$$

$$z = y' - y (= (D - 1)y)$$

とおけば、

$$h' - h = (D - 1)h = (D - 1)(D^2 + D + 1)y = (D^3 - 1)y = 0 \quad (2)$$

$$z'' + z' + z = (D^2 + D + 1)z = (D^2 + D + 1)(D - 1)y = (D^3 - 1)y = 0 \quad (3)$$

となる。この (2) から h を求めることで y を求めるか、(3) から z を求めることで y を求めるかの 2 通りが考えられる。

なお、線形微分方程式の一般論を知っていると、むしろこの (2)、(3) の両方の解から元の (1) の解がわかるのであるが、それについても後で紹介する。

3 h からの解法

まずは $h = y'' + y' + y$ に対する (2) から考えてみる。

この (2) は、 h が 1 回微分して元に戻る関数であることを意味するので、[1] により、

$$h = y'' + y' + y = C_1 e^x \quad (4)$$

となる。

次に、 $y = p(x)e^{\alpha x}$ において、(4) に代入すると、

$$\begin{aligned} y' &= p'e^{\alpha x} + p\alpha e^{\alpha x} = (p' + \alpha p)e^{\alpha x}, \\ y'' &= p''e^{\alpha x} + 2p'\alpha e^{\alpha x} + p\alpha^2 e^{\alpha x} = (p'' + 2\alpha p' + \alpha^2 p)e^{\alpha x} \end{aligned}$$

より、

$$y'' + y' + y = \{p'' + (2\alpha + 1)p' + (\alpha^2 + \alpha + 1)p\}e^{\alpha x} = C_1 e^x$$

となるので、 $\alpha = -1/2$ ととると p' の項が消えて、

$$p'' + \frac{3}{4}p = C_1 e^{3x/2} \quad (5)$$

となる。この方程式を満たす p を求めるために、[1] の 6 節と同様の変形を行う。

定数 β に対して、

$$\begin{aligned} \left\{ \left(\frac{p}{\cos \beta x} \right)' \cos^2 \beta x \right\}' &= \left(\frac{p' \cos \beta x - p(-\beta \sin \beta x)}{\cos^2 \beta x} \times \cos^2 \beta x \right)' \\ &= (p' \cos \beta x + \beta p \sin \beta x)' \\ &= p'' \cos \beta x + p'(-\beta \sin \beta x) + \beta p' \sin \beta x + \beta^2 p \cos \beta x \\ &= (p'' + \beta^2 p) \cos \beta x \end{aligned} \quad (6)$$

となるので、(5) により、 $\beta = \sqrt{3}/2$ に対して

$$\left\{ \left(\frac{p}{\cos \beta x} \right)' \cos^2 \beta x \right\}' = C_1 e^{3x/2} \cos \beta x \quad (7)$$

となることがわかる。

これを積分していけばよいのであるが、右辺の積分はあまり易しくない。微分で考えると、

$$\begin{aligned} (e^{3x/2} \cos \beta x)' &= \frac{3}{2} e^{3x/2} \cos \beta x - \beta e^{3x/2} \sin \beta x = e^{3x/2} \left(\frac{3}{2} \cos \beta x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \beta x \right) \\ (e^{3x/2} \sin \beta x)' &= \frac{3}{2} e^{3x/2} \sin \beta x + \beta e^{3x/2} \cos \beta x = e^{3x/2} \left(\frac{3}{2} \sin \beta x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta x \right) \end{aligned}$$

となるので、右辺から $e^{3x/2} \sin \beta x$ を消去すれば、

$$(\sqrt{3} e^{3x/2} \cos \beta x + e^{3x/2} \sin \beta x)' = 2\sqrt{3} e^{3x/2} \cos \beta x$$

となるので、(7) は

$$\left\{ \left(\frac{p}{\cos \beta x} \right)' \cos^2 \beta x - \frac{C_1}{2\sqrt{3}} e^{3x/2} (\sqrt{3} \cos \beta x + \sin \beta x) \right\}' = 0$$

となるので、よって、

$$\left(\frac{p}{\cos \beta x} \right)' \cos^2 \beta x - \frac{C_1}{2\sqrt{3}} e^{3x/2} (\sqrt{3} \cos \beta x + \sin \beta x) = C_2$$

となり、よって

$$\left(\frac{p}{\cos \beta x}\right)' = \frac{C_1}{2\sqrt{3}} e^{3x/2} \frac{\sqrt{3} \cos \beta x + \sin \beta x}{\cos^2 \beta x} + \frac{C_2}{\cos^2 \beta x} \quad (8)$$

となる。ここで、

$$\left(\frac{e^{3x/2}}{\cos \beta x}\right)' = \frac{(3/2)e^{3x/2} \cos \beta x + \beta e^{3x/2} \sin \beta x}{\cos^2 \beta x} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{3x/2} \frac{\sqrt{3} \cos \beta x + \sin \beta x}{\cos^2 \beta x}$$

なので、(8) は、

$$\left(\frac{p}{\cos \beta x} - \frac{C_1}{3} \frac{e^{3x/2}}{\cos \beta x} - \frac{C_2}{\beta} \tan \beta x\right)' = 0$$

と書くことができ、よって

$$\frac{p}{\cos \beta x} - \frac{C_1}{3} \frac{e^{3x/2}}{\cos \beta x} - \frac{2C_2}{\sqrt{3}} \tan \beta x = C_3$$

より、

$$p = \frac{C_1}{3} e^{3x/2} + \frac{2C_2}{\sqrt{3}} \sin \beta x + C_3 \cos \beta x$$

よって、 $y = pe^{-x/2}$ より、

$$y = \frac{C_1}{3} e^x + \frac{2C_2}{\sqrt{3}} e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \quad (9)$$

が得られる。つまり、(1) の解は、

$$e^x, e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x, e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \quad (10)$$

の線形結合であることになる。最初のものは1回の微分で元に戻るのに、実質的には後者2つが3回微分して元に戻る関数である。

なお、もしこの最終的なおおまかな形を知っていれば、あるいはこのような形ではないかと予想がつけば、

$$y = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

のように置いて、これを (1) に代入して、それが成立するように定数 α, β (実数) を求める、という方法もある。

$$\begin{aligned} y''' &= (e^{\alpha x} \sin \beta x)''' \\ &= (e^{\alpha x})''' \sin \beta x + 3(e^{\alpha x})''(\sin \beta x)' + 3(e^{\alpha x})'(\sin \beta x)'' + e^{\alpha x}(\sin \beta x)''' \\ &= \alpha^3 e^{\alpha x} \sin \beta x + 3\alpha^2 \beta e^{\alpha x} \cos \beta x - 3\alpha \beta^2 e^{\alpha x} \sin \beta x - \beta^3 e^{\alpha x} \cos \beta x \\ &= \alpha((\alpha^2 - 3\beta^2)e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta(3\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x} \cos \beta x \end{aligned}$$

なので、

$$\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) = 1, \quad \beta(3\alpha^2 - \beta^2) = 0 \quad (11)$$

であれば、 $y''' = y = e^{\alpha x} \sin \beta x$ になる。(11) の後者より

$$\beta = 0, \quad \pm\sqrt{3}\alpha$$

となるが、 $\beta = 0$ の場合は (11) の前者より $\alpha = 1$, よって $y = e^x$ となる。

$\beta = \pm\sqrt{3}\alpha$ の場合は $-8\alpha^3 = 1$ より $\alpha = -1/2$, よって $\beta = \mp\sqrt{3}/2$ となり、(10) の 2 つ目のものが得られる。同様に $y = e^{\alpha x} \cos \beta x$ とすれば (10) の 3 つ目のものが得られる。

4 z からの解法

次は $z = y' - y$ に対する (3) を考えてみる。

3 節の (4) と同様に、 $z = we^{\alpha x}$ ($w = w(x)$) とおいて w' を消すようにすると $\alpha = -1/2$ となり、

$$w'' + \frac{3}{4}w = 0$$

となる。(6) より、 $\beta = \sqrt{3}/2$ に対して、

$$\left\{ \left(\frac{w}{\cos \beta x} \right)' \cos^2 \beta x \right\}' = \left(w'' + \frac{3}{4} w \right) \cos \beta x = 0$$

となることがわかり、

$$\left(\frac{w}{\cos \beta x} \right)' = \frac{C_4}{\cos^2 \beta x} = \left(\frac{C_4}{\beta} \tan \beta x \right)'$$

より

$$\frac{w}{\cos \beta x} = \frac{C_4}{\beta} \tan \beta x + C_5$$

となるので、

$$w = \frac{C_4}{\beta} \sin \beta x + C_5 \cos \beta x$$

となる。よって、 $z = we^{-x/2}$ より

$$z = y' - y = \frac{C_4}{\beta} e^{-x/2} \sin \beta x + C_5 e^{-x/2} \cos \beta x \quad (12)$$

となるが、

$$e^{-x} y' - e^{-x} y = (e^{-x} y)'$$

なので、(12) の両辺を e^{-x} 倍すれば、

$$(e^{-x} y)' = \frac{2C_4}{\sqrt{3}} e^{-3x/2} \sin \beta x + C_5 e^{-3x/2} \cos \beta x \quad (13)$$

となる。(13) の右辺の積分は、

$$\begin{aligned} (e^{-3x/2} \cos \beta x)' &= -\frac{3}{2} e^{-3x/2} \cos \beta x - \beta e^{-3x/2} \sin \beta x \\ &= -e^{-3x/2} \left(\frac{3}{2} \cos \beta x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \beta x \right) \\ (e^{-3x/2} \sin \beta x)' &= -\frac{3}{2} e^{-3x/2} \sin \beta x + \beta e^{-3x/2} \cos \beta x \\ &= -e^{-3x/2} \left(\frac{3}{2} \sin \beta x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta x \right) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} (e^{-3x/2} \cos \beta x + \sqrt{3} e^{-3x/2} \sin \beta x)' &= -2\sqrt{3} e^{-3x/2} \sin \beta x \\ (\sqrt{3} e^{-3x/2} \cos \beta x - e^{-3x/2} \sin \beta x)' &= -2\sqrt{3} e^{-3x/2} \cos \beta x \end{aligned}$$

となるので、(13) は、

$$\begin{aligned} (e^{-x}y)' &= \left\{ -\frac{C_4}{3} e^{-3x/2} (\cos \beta x + \sqrt{3} \sin \beta x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_5}{2\sqrt{3}} e^{-3x/2} (\sqrt{3} \cos \beta x - \sin \beta x) \right\}' \\ &= \left\{ e^{-3x/2} (C_6 \cos \beta x + C_7 \sin \beta x) \right\}' \\ &\quad \left(C_6 = -\frac{C_4}{3} - \frac{C_5}{2}, C_7 = -\frac{C_4}{\sqrt{3}} + \frac{C_5}{2\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

となり、よって (9) と同じ

$$y = C_6 e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_7 e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_8 e^x$$

が得られる。

5 n 回微分して元に戻る関数

次は、一般の n 回微分して元に戻る関数を考えてみる。

これまでの、1回から4回微分して元に戻る関数の結果をまとめると、以下の通り。

$$y' = y \Rightarrow y = C_1 e^x \tag{14}$$

$$y'' = y \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \tag{15}$$

$$y''' = y \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \tag{16}$$

$$y^{(4)} = y \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x \tag{17}$$

さらに、(3) と (12) より、

$$y'' + y' + y = 0 \Rightarrow y = C_1 e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \tag{18}$$

もわかる。これらの微分方程式を $f(D)y = 0$ の形に書いて、その多項式 $f(\lambda)$ とこれらの解を見比べると、いくつかの性質が予想される。

1. $f(\lambda)$ が n 次式ならば y は、

$$y = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + \cdots + C_n\phi_n(x)$$

の形となる。

証明は容易ではないが、これは正しい。

2. $f(\lambda) = g(\lambda)h(\lambda)$ と因数分解され、 $g(D)y_1 = 0$, $h(D)y_2 = 0$ ならば $f(D)(y_1 + y_2) = 0$ 。

これは、

$$f(D)(y_1 + y_2) = f(D)y_1 + f(D)y_2 = h(D)(g(D)y_1) + g(D)(h(D)y_2) = 0$$

と簡単に証明できる。一方、この 2. の逆の、

3. $f(\lambda) = g(\lambda)h(\lambda)$ と因数分解される場合、 $f(D)y = 0$ となる任意の y に対し、 $g(D)y_1 = 0$, $h(D)y_2 = 0$, かつ $y = y_1 + y_2$ となる y_1, y_2 が存在する。

は、一般には無理で、3. が成り立つためには、 $g(\lambda)$ と $h(\lambda)$ が互いに素、すなわち定数以外の公約多項式を持たないことが必要であり、逆に $g(\lambda)$ と $h(\lambda)$ が互いに素であれば 3. は成立する (証明は易しくない)。

よって、 $f(\lambda)$ を互いに素なものに因数分解し、

$$f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda)\cdots f_k(\lambda)$$

とし、その各々に対し $f_j(D)y = 0$ となる y を求めて

$$y = C_{j,1}\phi_{j,1}(x) + \cdots + C_{j,m_j}\phi_{j,m_j}(x) \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

となれば、 $f(D)y = 0$ となる y はそれらすべての和

$$y = \sum_{j=1}^k \left(C_{j,1}\phi_{j,1}(x) + \cdots + C_{j,m_j}\phi_{j,m_j}(x) \right)$$

と書ける。例えば、3 回微分して元に戻る関数 y の場合は、

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

なので、 $(D - 1)h = 0$ となる h 、すなわち (4) と、 $(D^2 + D + 1)z = 0$ となる z 、すなわち (12) を加えたものが y 、すなわち (9) の形になる。だから、3. の事実を使ってよいなら前節までの議論はだいぶ易しくなる (が、3. 自体の証明は易しくない)。

(14) から (18) までの方程式の、 $f(\lambda) = 0$ という代数方程式の解を書いてみると、

$$(14) \Rightarrow \lambda - 1 = 0, \lambda = 1$$

$$(15) \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0, \lambda = \pm 1$$

$$(16) \Rightarrow \lambda^3 - 1 = 0, (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0, \lambda = 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(17) \Rightarrow \lambda^4 - 1 = 0, (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0, \lambda = \pm 1, \pm i$$

$$(18) \Rightarrow \lambda^2 + \lambda + 1 = 0, \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

のようになる。これらの解と、微分方程式の解を見比べると、次の事も予想される。

$$4. f(\lambda) = \lambda - \alpha \text{ ならば } y = Ce^{\alpha x}$$

$$5. f(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b \text{ で、 } f(\lambda) = 0 \text{ の解が } \lambda = \alpha \pm \beta i \text{ (虚数) ならば、}$$

$$y = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$$

これらはいずれも正しい。4. は [1] の $y' = y$ と同じようにして、5. は (3) から z を求めたときと同じようにすれば示すことができる。

実数係数の n 次代数方程式は、代数学の基本定理により、実数係数の 1 次式か 2 次式のみ積の形に因数分解できることが知られているので、 $f(\lambda) = 0$ が重解を持たなければ、これらの性質を組み合わせることで $f(D)y = 0$ のすべての解が得られることになる。ただし、重解を持つ場合は少し面倒である。

さて、 n 回の微分で元に戻る y は、

$$y^{(n)} = y$$

を満たすが、この場合の $f(\lambda)$ は $f(\lambda) = \lambda^n - 1$ で、

$$f(\lambda) = \lambda^n - 1 = 0$$

の解は、複素数のド・モアブルの定理により

$$\lambda = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (19)$$

となることが知られていて、重解はない。

n が奇数の場合、(19) のうち実数解は $\lambda = 0$ ($k = 0$) のみ、あとはすべて虚数解で、 $k = j$ のものと $k = n - j$ のものが共役な解である ($j = 1, 2, \dots, (n-1)/2$)。よって、この場合 y は、4., 5. の線形結合

$$y = C_1 e^x + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} e^{x \cos(2k\pi/n)} \left\{ C_k \cos \left(x \sin \frac{2k\pi}{n} \right) + D_k \sin \left(x \sin \frac{2k\pi}{n} \right) \right\}$$

となる。

n が偶数の場合、(19) のうち実数解は $\lambda = 0$ ($k = 0$) と $\lambda = -1$ ($k = n/2$) の2つで、 $k = j$ と $k = n - j$ のものが共役な解となる ($j = 1, 2, \dots, n/2 - 1$)。よって、この場合 y は、 $n' = n/2$ とすれば、

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \sum_{k=1}^{n'-1} e^{x \cos(k\pi/n')} \left\{ C_k \cos \left(x \sin \frac{k\pi}{n'} \right) + D_k \sin \left(x \sin \frac{k\pi}{n'} \right) \right\}$$

となる。

6 最後に

本稿では、 $y''' = y$ の解、および一般の $y^{(n)} = y$ の解を紹介した。

$y''' = y$ の解については、実は複素指数関数 $e^{(\alpha+\beta i)x}$ を使えばよりシンプルに説明できるのであるが、オイラーの公式等を前提とせず初等的な方法にこだわったため、逆にかなり厄介な説明になった。

また、 $y^{(n)} = y$ については、結果的に初等的な内容ではおさまらず、いくつか線形微分方程式の理論を認めた上で解の形を紹介するに留まった。

本来本稿の内容は、線形微分方程式の理論を学んだ上で考察すべきもので、その方向ならもっと楽に、そして見通しよく解を知ることができるので、だから、本稿自体はあまり意味がない。また、本稿は、微積分の基本的なことしか学んでない段階の学生に対する説明として考えたものではあるが、実際にそのような学生に興味を持って理解しながら読んでもらえるものかといえば、やや面倒なところも多いので、その方向でも意味がなさそうな気がする。

参考文献

- [1] 竹野茂治、“微分して元に戻る関数について”, (2008)
<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic1/data/diffinv.pdf>