2023 年 12 月 11 日

簡単な関数の曲線長

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

積分の応用として、$y = f(x)$ のグラフの $[a, b]$ での曲線長 L を求める公式

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \tag{1}$$

が紹介されるが、本稿ではこれを使って、いくつか簡単な関数の曲線長を計算してみる。

2 放物線

まずは放物線 $y = Ax^2$ の $[0, a]$ $(a > 0)$ の範囲の曲線長 $L = L_1(a, A)$ を求めてみる。

なお、$y = Ax^2$ は $y = x^2$ を y 方向に A 倍したものだが、$y = Ax^2$ の $[0, a]$ での曲線長 $L_1(a, A)$ は、$y = x^2$ の $[0, a]$ での曲線長 $L_1(a, 1)$ の A 倍にはならない、すなわち $L_1(a, A) \neq AL_1(a, 1)$ であることに注意する。それは y 方向の拡大は、傾きが大きいときには曲線長に大きく影響するが、傾きが小さいときは小さくしか影響しないため、曲線長に対しては場所によって A 倍の影響が異なってしまうからである。ただし、後で示すように放物線の場合は $L_1(a, A)$ は $L_1(a, 1)$ に帰着される。

また、$a > 0$ に対する $L_1(a, A)$ がわかれば、対称性から $[-a, 0]$ での放物線の曲線長は $L_1(a, A)$ に等しいので、$a < 0$ に対して

$$L_1(a, A) = -L_1(|a|, A) \tag{2}$$

と定義することにすれば、$[b, a]$ での長さは常に $L_1(a, A) - L_1(b, A)$ と表されることになる。それは、$b < 0 \leq a$ の場合は $[b, a]$ での長さは

$$L_1(a, A) + L_1(|b|, A) = L_1(a, A) - L_1(b, A)$$

となり、また $b < a < 0$ の場合は $[b, a]$ での長さは、

$$L_1(|b|, A) - L_1(|a|, A) = -L_1(b, A) - (-L_1(a, A)) = L_1(a, A) - L_1(b, A)$$

となるからである。

また、$A<0$ に対しては、対称性より

$$L_1(a,A)=L_1(a,|A|) \tag{3}$$

となるので、$A>0$ の場合のみ考えればよい。よって、以後は $a>0,\ A>0$ と仮定する。

さて、$y=Ax^2$ に対しては $y'=2Ax$ なので、(1) より

$$L_1(a,A)=\int_0^a\sqrt{1+4A^2x^2}\,dx \tag{4}$$

となる。この積分を $Ax=t$ と置換すれば、

$$L_1(a,A)=\int_0^{Aa}\sqrt{1+4t^2}\,dt$$

となるが、この式は、

$$L_1(a,A)=L_1(Aa,1)\ \ (A>0,\ a>0) \tag{5}$$

を意味し、よって $L_1(a,A)$ は $L_1(a,1)$ に帰着できることがわかる。なお、すべての曲線に対しこのようなことが成り立つわけではない。よって以後しばらくは、

$$L_1(a,1)=\int_0^a\sqrt{1+4x^2}\,dx \tag{6}$$

を考える。この積分も易しくはないが、置換積分で計算が可能である。よく知られているように、

$$\sqrt{1+4x^2}-2x=t$$

と置換すると鮮やかに一度で計算できるのだが、ここではよりシンプルな三角関数の 2 回の置換で計算する。まず、$2x=\tan\theta$ $(0\le\theta<\pi/2)$ と置換すると、

$$\sqrt{1+4x^2}=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{\cos\theta},\quad dx=\frac{1}{2\cos^2\theta}\,d\theta$$

であり、$x=a$ は $\theta=\tan^{-1}2a$ に対応するので、

$$\begin{aligned}L_1(a,1) &= \int_0^{\tan^{-1}2a}\frac{1}{\cos\theta}\frac{d\theta}{2\cos^2\theta} = \int_0^{\tan^{-1}2a}\frac{\cos\theta\,d\theta}{2\cos^4\theta}\\ &= \int_0^{\tan^{-1}2a}\frac{\cos\theta\,d\theta}{2(1-\sin^2\theta)^2}\end{aligned} \tag{7}$$

となる。ここで、$u=\sin\theta$ と置換すると、$\cos\theta\,d\theta=du$ で、$\theta=\tan^{-1}2a$ のときは、$\tan\theta=2a$ より

$$u=\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}=\frac{2a}{\sqrt{4a^2+1}}$$

となるので、

$$L_1(a,1)=\int_0^{2a/\sqrt{4a^2+1}}\frac{du}{2(1-u^2)^2} \tag{8}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(1-u^2)^2} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(1-u)(1+u)}\right\}^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)\right\}^2\\ &= \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{(1-u)^2}+\frac{2}{(1-u)(1+u)}+\frac{1}{(1+u)^2}\right\}\\ &= \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{(1-u)^2}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right\}\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}\int\frac{du}{2(1-u^2)^2} &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}-\log_e|1-u|+\log_e|1+u|\right)+C\\ &= \frac{u}{4(1-u^2)}+\frac{1}{8}\log_e\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C\end{aligned}$$

となり、$u=2a/\sqrt{4a^2+1}$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{u}{4(1-u^2)} &= \frac{\dfrac{a}{\sqrt{4a^2+1}}}{2\left(1-\dfrac{4a^2}{4a^2+1}\right)} = \frac{\dfrac{a}{\sqrt{4a^2+1}}}{\dfrac{2}{4a^2+1}} = \frac{a}{2}\sqrt{4a^2+1},\\ \left|\frac{1+u}{1-u}\right| &= \left|\frac{1+\dfrac{2a}{\sqrt{4a^2+1}}}{1-\dfrac{2a}{\sqrt{4a^2+1}}}\right| = \frac{\sqrt{4a^2+1}+2a}{\sqrt{4a^2+1}-2a} = (\sqrt{4a^2+1}+2a)^2\end{aligned}$$

となるので、よって、$a>0$ に対し、

$$L_1(a,1)=\frac{a}{2}\sqrt{4a^2+1}+\frac{1}{4}\log_e(\sqrt{4a^2+1}+2a) \tag{9}$$

が得られる。一般の $A(>0)$ に対しては、(5), (9) より

$$L_1(a,A)=\frac{aA}{2}\sqrt{4a^2A^2+1}+\frac{1}{4}\log_e(\sqrt{4a^2A^2+1}+2aA) \tag{10}$$

となる。

なお、この式では、$a<0$ に対して

$$\sqrt{4a^2A^2+1}+2aA=\sqrt{4a^2A^2+1}-2|a|A=\frac{1}{\sqrt{4a^2A^2+1}+2|a|A}$$

が成り立ち、よって (10) は自然に (2) の関係も満たすことがわかる。

3 三角関数

次は、$y = A\sin x$ $(A > 0)$ の $[0, a]$ $(0 < a \leq \pi/2)$ の範囲の曲線長 $L = L_2(a, A)$ を求めてみる。

$y = A\sin x$ は、$[0, \pi/2]$ の部分の形が繰り返されるので、上の範囲の長さがわかれば、他の部分の長さも自然に求められるし、x 方向のスケール変換も入った $y = A\sin Bx$ の長さについては、全体を B 倍した $y = AB\sin x$ の長さを求め、それを $1/B$ 倍すればよいので、$L_2(a, A)$ だけ考えればよい。

この場合は、$y' = A\cos x$ より、

$$L_2(a, A) = \int_0^a \sqrt{1 + A^2\cos^2 x}\,dx \tag{11}$$

となるが、これは、

$$\begin{aligned} L_2(a, A) &= \int_0^a \sqrt{1 + A^2 - A^2\sin^2 x}\,dx = \sqrt{1 + A^2}\int_0^a \sqrt{1 - \frac{A^2}{1 + A^2}\sin^2 x}\,dx \\ &= \sqrt{1 + A^2}E\left(a, \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

と書ける。ここで、$E(\phi, k)$ は、

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\,dt \quad (0 < k < 1) \tag{13}$$

で定義される「第 2 種楕円積分」と呼ばれるもので、簡単な関数で表せないとして知られている。よって、$L_2(a, A)$ は $E(\phi, k)$ を用いて (12) のように表すことができるが、これ以上易しい式で表すことはできない。

4 指数関数

次は、$y = Ae^x$ $(A > 0)$ の $[0, a]$ $(a > 0)$ の範囲の曲線長 $L = L_3(a, A)$ を求めてみる。

この場合は、$y' = Ae^x$ より、

$$L_3(a, A) = \int_0^a \sqrt{1 + A^2e^{2x}}\,dx \tag{14}$$

となるが、これは、$\sqrt{1 + A^2e^{2x}} = t$ と置換すれば分数式に変形できる。$1 + A^2e^{2x} = t^2$ より

$$x = \frac{1}{2}\log_e\frac{t^2 - 1}{A^2} = \frac{1}{2}\log_e(t^2 - 1) - \log_e A, \quad dx = \frac{t}{t^2 - 1}\,dt$$

となるから、

$$\begin{aligned}L_3(a,A) &= \int_{\sqrt{1+A^2}}^{\sqrt{1+A^2e^{2a}}} \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = \int_{\sqrt{1+A^2}}^{\sqrt{1+A^2e^{2a}}} \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt \\ &= \int_{\sqrt{1+A^2}}^{\sqrt{1+A^2e^{2a}}} \left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right\}dt = \left[t+\frac{1}{2}\log_e\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{\sqrt{1+A^2}}^{\sqrt{1+A^2e^{2a}}}\end{aligned}$$

となるが、$t=\sqrt{1+A^2e^{2a}}$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log_e\left|\frac{t-1}{t+1}\right| &= \frac{1}{2}\log_e\left|\frac{\sqrt{1+A^2e^{2a}}-1}{\sqrt{1+A^2e^{2a}}+1}\right| = \frac{1}{2}\log_e\frac{A^2e^{2a}}{(\sqrt{1+A^2e^{2a}}+1)^2} \\ &= \log_e A + a - \log_e(\sqrt{1+A^2e^{2a}}+1)\end{aligned}$$

なので、

$$L_3(a,A) = \sqrt{1+A^2e^{2a}} - \sqrt{1+A^2} + a - \log_e\frac{\sqrt{1+A^2e^{2a}}+1}{\sqrt{1+A^2}+1} \tag{15}$$

となる。

5 反比例のグラフ

最後に、反比例 $y=A/x$ $(A>0)$ のグラフの $[\sqrt{A},a]$ $(a>\sqrt{A})$ の範囲の曲線長 $L=L_4(a,A)$ を考える。なお、$y=A/x$ の $x>\sqrt{A}$ の部分と $0<x<\sqrt{A}$ の部分は $y=x$ に関して対象なので、$0<b<\sqrt{A}$ に対する $[b,\sqrt{A}]$ での曲線の長さは、$[\sqrt{A},A/b]$ での長さ $L_4(A/b,A)$ に等しく、$a>\sqrt{A}$ の $L_4(a,A)$ で求められることになる。

$y'=-A/x^2$ より、$L_4(a,A)$ は

$$L_4(a,A) = \int_{\sqrt{A}}^{a}\sqrt{1+\frac{A^2}{x^4}}\,dx \tag{16}$$

となるが、$x=\sqrt{A}\,t$ とすると

$$L_4(a,A) = \sqrt{A}\int_1^{a/\sqrt{A}}\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\,dt = \sqrt{A}L_4\left(\frac{a}{\sqrt{A}},1\right) \tag{17}$$

となるので $L_4(a,A)$ は $A=1$ の場合に帰着し、よって以後は $L_4(a,1)$ のみを考える $(a>1)$。

この $L_4(a,1)$ もやはり楕円積分で表されるものになる。少し計算が厄介だが、この積分を楕円積分の標準形である「第 1 種楕円積分」

$$F(\phi,k) = \int_0^{\phi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \quad (0<k<1) \tag{18}$$

と (13) の第 2 種楕円積分 $E(\phi,k)$ で表す。まず、$L_4(a,1)$ を

$$\begin{aligned} L_4(a,1) &= \int_1^a \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}\,dx = \int_1^a \frac{x^4+1}{x^2\sqrt{x^4+1}}\,dx \\ &= \int_1^a \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}\,dx + \int_1^a \frac{1}{x^2\sqrt{x^4+1}}\,dx = f_1(a)+f_2(a) \end{aligned} \tag{19}$$

と 2 つに分ける。ここで、$f_2(a)$ で $x=1/t$ と置換すると、

$$f_2(a) = \int_1^{1/a} \frac{t^2}{\sqrt{1/t^4+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int_1^{1/a}\frac{t^2}{\sqrt{t^4+1}}\,dt$$

となり、形式的には $f_2(a) = -f_1(1/a)$ に等しくなるので、$a>1$ と $0<a<1$ に対して $f_1(a)$ を求められれば、

$$L_4(a,1) = f_1(a) - f_1\left(\frac{1}{a}\right) \tag{20}$$

と求まることになる。よって次は $f_1(a)$ を考える。

唐突ではあるが、[2] を参考に、

$$I = \left(\frac{x\sqrt{x^4+1}}{x^2+1}\right)' - \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} \tag{21}$$

を考える。すると、

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2+1} - \frac{x\cdot 2x\sqrt{x^4+1}}{(x^2+1)^2} + \frac{x\cdot 4x^3}{(x^2+1)2\sqrt{x^4+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} \\ &= \frac{(x^2+1)(x^4+1)-2x^2(x^4+1)+2x^4(x^2+1)}{(x^2+1)^2\sqrt{x^4+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} \\ &= \frac{x^6+3x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2\sqrt{x^4+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{x^6+3x^4-x^2+1-(x^6+2x^4+x^2)}{(x^2+1)^2\sqrt{x^4+1}} \\ &= \frac{x^2-2x^2+1}{(x^2+1)^2\sqrt{x^4+1}} = \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2\sqrt{x^4+1}} \end{aligned}$$

となるので、これにより $f_1(a)$ は、

$$\begin{aligned} f_1(a) &= \int_1^a \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}\,dx = \int_1^a \left\{\left(\frac{x\sqrt{x^4+1}}{x^2+1}\right)' - \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2\sqrt{x^4+1}}\right\}dx \\ &= \frac{a\sqrt{a^4+1}}{a^2+1} - \frac{\sqrt{2}}{2} - f_3(a) \end{aligned} \tag{22}$$

となり、あとは、

$$f_3(a) = \int_1^a \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2\sqrt{x^4+1}}\,dx \tag{23}$$

を求めればよいことになる。$f_3(a)$ は一見 $f_1(a)$ より難しそうだが、実は次のような置換がうまくいく。

$$u = u(x) = \frac{2x}{x^2+1} \tag{24}$$

$u(x)$ は $0 < x < 1$ では増加し、$x > 1$ では減少し、$u(0) = u(\infty) = 0,\ u(1) = 1$ となることに注意する。そのため、$a > 1$ か $0 < a < 1$ かで少し式が分かれる部分がある。

まずは $a > 1$ の場合を考える。この場合 $x > 1$ であり、

$$\frac{du}{dx} = \frac{2(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \tag{25}$$

で、また、$x^2 + 1 = 2x/u$ より

$$\sqrt{x^4+1} = \sqrt{(x^2+1)^2 - 2x^2} = \sqrt{\frac{4x^2}{u^2} - 2x^2} = \frac{2x}{u}\sqrt{1 - \frac{u^2}{2}} \tag{26}$$

となる。また、

$$(x^2-1)^2 = (x^2+1)^2 - 4x^2 = \frac{4x^2}{u^2} - 4x^2 = \frac{4x^2}{u^2}(1-u^2)$$

より、$x > 1$ より

$$x^2 - 1 = \frac{2x}{u}\sqrt{1-u^2} \tag{27}$$

となるので、$f_3(a)$ を置換すると、

$$f_3(a) = \int_1^a \frac{1}{2}\,\frac{1-x^2}{\sqrt{x^4+1}}\,\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_1^{2a/(a^2+1)} \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2/2}}\,du \tag{28}$$

となる。ここでさらに $u = \sin\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ と置換すると、$\theta_0 = \sin^{-1}(2a/(a^2+1))$ に対し、

$$\begin{aligned}
f_3(a) &= -\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\theta_0} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-(\sin^2\theta)/2}}\cos\theta\,d\theta \ = \ \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2\theta}{\sqrt{1-(\sin^2\theta)/2}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{2\{1-(\sin^2\theta)/2\} - 1}{\sqrt{1-(\sin^2\theta)/2}}\,d\theta \\
&= \int_{\theta_0}^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta}\,d\theta - \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(\sin^2\theta)/2}}
\end{aligned}$$

となるので、(13), (18) より、f_3 は

$$f_3(a) = \left[E\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}F\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]_{\theta_0}^{\pi/2} \tag{29}$$

と表されることになる。

$0 < a < 1$ の場合は $0 < x < 1$ なので $x^2 - 1 < 0$ となり、上の計算のうち (27) が

$$x^2 - 1 = -\frac{2x}{u}\sqrt{1-u^2} \tag{30}$$

に変わり、よって、

$$f_3(a) = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\theta_0} \frac{\cos^2\theta}{\sqrt{1-(\sin^2\theta)/2}}\,d\theta = \left[E\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}F\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]_{\pi/2}^{\theta_0} \tag{31}$$

となる。今、$a > 1$ に対して $b = 1/a$ とすると $0 < b < 1$ であり、$\theta_1 = \sin^{-1}(2b/(b^2+1))$ に対し

$$f_3(b) = \left[E\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}F\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]_{\pi/2}^{\theta_1}$$

となるが、

$$\frac{2b}{b^2+1} = \frac{2/a}{1/a^2+1} = \frac{2a}{1+a^2}$$

なので $\theta_1 = \theta_0$ となり、よって、

$$f_3(b) = f_3\left(\frac{1}{a}\right) = -f_3(a) \tag{32}$$

となることがわかる。よって (22) より、

$$f_1\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\sqrt{1/a^4+1}}{a(1/a^2+1)} - \frac{\sqrt{2}}{2} - f_3\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\sqrt{a^4+1}}{a(a^2+1)} - \frac{\sqrt{2}}{2} + f_3(a) \tag{33}$$

となり、よって (20), (22), (33) より $L_4(a,1)$ は

$$\begin{aligned} L_4(a,1) &= -f_1\left(\frac{1}{a}\right) + f_1(a) \\ &= -\frac{\sqrt{a^4+1}}{a(a^2+1)} + \frac{\sqrt{2}}{2} - f_3(a) + \frac{a\sqrt{a^4+1}}{a^2+1} - \frac{\sqrt{2}}{2} - f_3(a) \\ &= \frac{(a^2-1)\sqrt{a^4+1}}{a(a^2+1)} - 2f_3(a) \\ &= \frac{(a^2-1)\sqrt{a^4+1}}{a(a^2+1)} + \left[F\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2E\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]_{\sin^{-1}(2a/(a^2+1))}^{\pi/2} \end{aligned}$$

と表されることになる。一般の $L_4(a,A)$ は、(17) より、

$$\begin{aligned} L_4(a,A) &= \sqrt{A}L_4\left(\frac{a}{\sqrt{A}}, 1\right) \\ &= \sqrt{A}\,\frac{(a^2/A-1)\sqrt{a^4/A^2+1}}{a(a^2/A+1)/\sqrt{A}} + \sqrt{A}\left[F\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2E\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]_{\theta_2}^{\pi/2} \\ &= \frac{(a^2-A)\sqrt{a^4+A^2}}{a(a^2+A)} + \sqrt{A}\left[F\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2E\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]_{\theta_2}^{\pi/2} \\ &\quad \left(\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{2a/\sqrt{A}}{a^2/A+1}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2a\sqrt{A}}{a^2+A}\right)\right) \end{aligned}$$

となる。これが最終的な L_4 の表現である。

6 最後に

本稿では、曲線長を求める積分の公式を用いて、実際に具体的ないくつかの関数の曲線長を計算してみた。

本稿の計算でもわかるが、平方根の中に簡単な式が入った計算は実はかなり難しく、平方根がほどけない場合は、楕円積分のように初等的な関数では表せないものになってしまうことが多い。だから、教科書などで曲線長の計算をおこなう演習問題では、例えば $y=(e^x+e^{-x})/2$ のように平方根がほどける問題であったり、$y=Ax\sqrt{x}$ のように平方根の中が 1 次式になる問題などが良く出されていて、逆にそれ以外の問題が出されることは大きな演習書にでもあたらない限りかなり少ないように思う。

よって、通常の教科書の場合は、例えばより身近な放物線や三角関数などの曲線長を計算する機会や、その計算を見る機会はほとんどなく、そういうことに対して疑問を持つ学生はいるかもしれないので、その意味では本稿はそれなりに意味があるような気がする。

なお、5 節では、唐突に (21) による部分積分と、(24) による置換を行ったが、どちらも簡単に思いつくものではない。[1] に書かれている楕円積分の標準形への変換手順では相当大変そうだったので、[2] に書かれている結果に合わせたのが (21) による部分積分で、[1] の演習問題を利用したのが (24) による置換であり、かなりズルをしたことになっている。よってなぜこれでうまくいくかに関しては、私自身今のところ全く理解できていない。

参考文献

[1] 寺沢寛一、「自然科学者のための数学概論 [増訂版]」(1983)、岩波書店

[2] 大槻義彦監修、室谷義昭訳、「新数学公式集 I 初等関数」(1991)、丸善