2009 年 03 月 03 日

# 曲率半径について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

## 1 はじめに

道路のカーブの曲がり具合を表すのに、$R = 200$ のように表現することがあるが、これは「円で言えばその半径が $200\mathrm{m}$ くらいの曲がり具合である」という意味である。

一般の曲線に対しても、実際にはそれが円の一部ではなくても、円で言えばそれがどれくらいの半径の曲がり具合であるか、ということを表現する 曲率半径 と呼ばれるものがある。工学では出てくる場面は多少ありそうな気がするが、本学 1,2 年生の微積分の教科書には書かれていないようなので、どのようにしてそれが得られるのかをここにまとめておくことにする。

## 2 2 階微分まで一致する円の利用

$xy$ 平面上の曲線 $y = f(x)$ に対して、その上の点 $P(a, f(a))$ での曲がり具合を考えることにしよう。それにはいくつかの考え方があるが、まずこの節では「2 階微分まで一致する円を利用する」という方法を紹介する。

この考え方は、

> 「曲線の曲がり具合を円に当ててはめたいのであるから、実際にその部分に一番近い円をみつける」

というものである。

曲線 $y = f(x)$ に対し、1 階微分 $f'(a)$ の値は $x = a$ での傾きを表すもので、曲がり具合とは直接は関係はない。一方、$f''(a)$ の値は、$f'(x)$ 、すなわちその曲線の傾きの $x = a$ での変化率であり、これはある意味で曲がり具合を表している。通常、初等的な解析では 2 階微分 $f''(a)$ の値は、この値が正か負かで上に凸か下に凸かの判別を行う位にしか利用しないが、この値の絶対値が大きい場合は傾きが急激に変化すること

を意味しているので、曲がり具合が急であることになり、逆に絶対値が小さい場合は緩やかであることになる。

ただし、この $f''(a)$ の値は A 節で見るように回転不変ではなく、グラフ全体を形を変えずにそのまま回転すると変化してしまう値なので、その値を曲がり具合を表す定量的な尺度として直接使うことはできないことに注意する[1]。

以上の考え方により、曲がり具合を表すような円として、$y = f(x)$ に $P$ で接し、かつそこでの 2 階微分の値も一致するようなものを求めることにする。

今、求める円の中心を $C(c, d)$、半径を $R$ とすると、その円の方程式は、

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = R^2 \tag{1}$$

となる。これを $y$ の関数と見たものを $y = g(x)$ とすると、(1) に $g(x)$ を代入して $x$ で微分すれば、合成関数の微分により

$$2(x - c) + 2(g(x) - d)g'(x) = 0 \tag{2}$$

すなわち

$$g'(x) = -\frac{x - c}{g(x) - d} \tag{3}$$

が得られる。これは、円周上の点 $(x, g(x))$ での接線 (傾き $g'(x)$) と、そこへ向かう半径 (傾き $(g(x) - d)/(x - c)$) が垂直である、という条件から求めることもできる。

まず $y = g(x)$ が $P$ で $y = f(x)$ と接する、すなわち $P$ を通って、傾きが $f'(a)$ に一致する必要があるので、$g(a) = f(a)$, $g'(a) = f'(a)$ であるから (1), (3) より

$$(a - c)^2 + (f(a) - d)^2 = R^2, \tag{4}$$

$$f'(a) = -\frac{a - c}{f(a) - d} \tag{5}$$

が得られる。これが接する条件である。

次は 2 階微分であるが、(2) を 2 で割って $x$ で微分すれば、積の微分法により、

$$1 + (g'(x))^2 + (g(x) - d)g''(x) = 0$$

[1] だからこそ、回転不変な曲がり具合を表す尺度である「曲率半径」が使われる、とも言える。

となるので、

$$g''(x) = -\frac{1+(g'(x))^2}{g(x)-d} \tag{6}$$

が得られる。よって、2 階微分まで等しい円は、$g''(a) = f''(a)$, および $g'(a) = f'(a)$, $g(a) = f(a)$ より

$$f''(a) = -\frac{1+(f'(a))^2}{f(a)-d} \tag{7}$$

を満たすことになる。この $(5)$, $(7)$ から $c, d$ を求め ($f$ で表し)、それを $(4)$ に代入すれば $R$ を求めることができる。つまり、$(4)$, $(5)$, $(7)$ から求める円が一つに決まり、それによって曲率半径 $R$ が得られることになる。$(7)$ より、

$$d = f(a) + \frac{1+(f'(a))^2}{f''(a)} \tag{8}$$

なので $(5)$ より、

$$c = a + f'(a)(f(a)-d) = a - f'(a)\frac{1+(f'(a))^2}{f''(a)} \tag{9}$$

となる。この $(8)$,$(9)$ を $(4)$ に代入すると、

$$R^2 = (f'(a))^2\frac{\{1+(f'(a))^2\}^2}{(f''(a))^2} + \frac{\{1+(f'(a))^2\}^2}{(f''(a))^2} = \frac{\{1+(f'(a))^2\}^3}{(f''(a))^2}$$

となるから、結局曲率半径 $R$ は、

$$R = \frac{\{1+(f'(a))^2\}^{3/2}}{|f''(a)|} \tag{10}$$

と表されることになる。

なお、この曲率半径の逆数の絶対値を外したもの

$$\mu = \frac{f''(a)}{\{1+(f'(a))^2\}^{3/2}} \tag{11}$$

を 曲率、(8),(9) で与えられる円の中心 $C(c,d)$ を 曲率中心 と呼ぶことがある。

曲率が正の場合は $f''(a) > 0$ であるから下に凸で、曲率中心は曲線の上の方にあり、$x$ の増加方向に曲線に沿って考えれば曲線は左に曲がっていることになる。逆に曲率が負の場合は $f''(a) < 0$ で上に凸で、曲率中心は曲線の下、曲線は $x$ の増加方向に右に曲がることになる。

なお、曲率が $0$ のときは曲率半径は無限大となってしまうが、数学ではそれを避けるため、そして上に述べたように符号により曲がる方向を知ることもできるために、曲率半径よりも曲率を主に考えることが多いようである。

# 3 交点の極限を利用する方法

2 節とは他の考え方として、次のようなものもある。

> 「曲線上の $P(a,f(a))$ の近くの点 $Q(b,f(b))$ を取り、$P$, $Q$ からそれぞれこの曲線の法線 (その点を通ってその曲線に垂直に交わる直線) を引き、その 2 つの法線の交点 $S$ を考える。この $b$ を $a$ に近づけたときの $S$ の極限が曲がり具合を表す円の中心 (すなわち曲率中心) であり、その点と $P$ との距離が曲率半径 $R$ である。」

この節では、この考え方で曲率半径を求めてみることにする。

なお、$Q$ を $P$ に近づけると、それに対する 2 本の法線はだんだん平行に近くなっていくので、その交点 $S$ もだんだん遠ざかるのでは、と思うかもしれないが、実際にはそうではないことは円の場合を考えればすぐにわかる。円の場合には、法線は直径であるからその交点 $S$ はその円の中心となり、$Q$ を $P$ に近づけても $S$ は移動しないからである。

$P$ では接線の傾きが $f'(a)$ であるから法線の傾きは $-1/f'(a)$ となり、よって $P$ での法線の方程式は

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) \tag{12}$$

となる。同様に $Q$ での法線の方程式は

$$y - f(b) = -\frac{1}{f'(b)}(x-b) \tag{13}$$

となる。この (12) と (13) の交点 $S$ を求める。

$$x-a=f(a)f'(a)-f'(a)y,\quad x-b=f(b)f'(b)-f'(b)y$$

より、

$$b-a=f(a)f'(a)-f(b)f'(b)+(f'(b)-f'(a))y$$

であるから、$S$ の座標は

$$y=\frac{b-a+f(b)f'(b)-f(a)f'(a)}{f'(b)-f'(a)},\quad x=a+f(a)f'(a)-f'(a)y \tag{14}$$

により求まる。$b\to a$ の極限を考えると、(14) より

$$\begin{aligned} y &= \left(1+\frac{f(b)f'(b)-f(a)f'(a)}{b-a}\right)\Big/\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a} \\ &= \left(1+f(b)\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}+f'(a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\Big/\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a} \\ &\to \frac{1+f(a)f''(a)+(f'(a))^2}{f''(a)}=f(a)+\frac{1+(f'(a))^2}{f''(a)} \end{aligned}$$

となるが、この極限は 2 節の (8) の $d$ と一致し、$x$ は

$$\begin{aligned} x &= a+f(a)f'(a)-f'(a)y \\ &\to a+f(a)f'(a)-f'(a)\left(f(a)+\frac{1+(f'(a))^2}{f''(a)}\right)=a-f'(a)\frac{1+(f'(a))^2}{f''(a)} \end{aligned}$$

となって、この極限も 2 節の (9) の $c$ と一致する。よってこの方法でも曲率半径 $R$ は 2 節の (10) と同じものが得られることになる。

なお、この節の議論により、

> 「この曲線に $R$ より小さい半径の円が点 $P$ で (曲率中心と同じ側に) 接する場合、その円とこの曲線との交点は、$P$ の近傍には $P$ 以外にはない」

ということも言える (詳細は B 節参照)。これは、$R$ より小さい半径の円は、$P$ でこの曲線に「べったり」貼り付くことはない、ということを意味している。

# 4 一般の平面曲線の場合

ここまでは、平面曲線が $y = f(x)$ と表されている場合を考えてきたが、一般の平面曲線はパラメータ $t$ により $x = x(t), y = y(t)$ と表される。この場合曲率半径 $R$ がどのような式になるかを考えてみる。

なお、$f(x), g(x)$ の $x$ での微分の記号の $'$ と区別するために、$t$ での微分を $\dot{x}(t)$ のように $\dot{}$ と表すことにする。またこの節では、曲線上の点を $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ のようにベクトル関数としての位置ベクトルで表し、ベクトルで議論を進めるが、ベクトル関数の微分などについてはベクトル解析の本などを参照するといいだろう。

まず、パラメータに対して $\dot{\boldsymbol{r}}(t) \neq \boldsymbol{0}$ であるとする。これはある意味で曲線がパラメータに対して滑らかに定義されることを意味する。また、曲率半径を考える方法は 3 節の方法によることにする。

曲線の接線方向のベクトルは $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ であるから、これを反時計回りに 90 度回転したベクトル

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t)) \tag{15}$$

がこの曲線の法線方向を表す。

2 階微分 $\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$ は、その接線方向のベクトル $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ の変化率を意味するから、これが接線方向よりも左に向いていればこの曲線は $t$ の増加に沿って左に曲がり、右に向いていれば右に曲がることになる。つまり、$\ddot{\boldsymbol{r}}$ と $\boldsymbol{\alpha}$ のなす角が 90 度より小さいか大きいかでそれがわかることになるので、結局、内積

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}} = -\dot{y}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{y} \tag{16}$$

の値が正であれば左に、負であれば右に曲がることに注意する。

さて、$|\boldsymbol{\alpha}|$ は $|\dot{\boldsymbol{r}}|$ に等しいので、法線方向の単位ベクトルは $\pm\boldsymbol{\alpha}/|\dot{\boldsymbol{r}}|$ であり、よって、$P(x(a), y(a))$ での法線上の点 $S$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \pm|PS|\frac{\boldsymbol{\alpha}(a)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(a)|}$$

と表され、$Q(x(b), y(b))$ での法線上の点 $S$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{QS}} = \pm|QS|\frac{\boldsymbol{\alpha}(b)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(b)|}$$

と表される。なお、この $\pm$ は曲線の曲がっている方向、すなわち $(16)$ の内積の符号と同じに取る。これにより、交点 $S$ は、

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PS}} = \boldsymbol{r}(a) \pm |PS|\frac{\boldsymbol{\alpha}(a)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(a)|} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QS}} = \boldsymbol{r}(b) \pm |QS|\frac{\boldsymbol{\alpha}(b)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(b)|} \tag{17}$$

となり、よって、

$$\boldsymbol{r}(a) \pm |PS|\frac{\boldsymbol{\alpha}(a)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(a)|} = \boldsymbol{r}(b) \pm |QS|\frac{\boldsymbol{\alpha}(b)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(b)|}$$

が成り立つことになる。この式と $\dot{\boldsymbol{r}}(b)$ との内積を考えると、$\boldsymbol{\alpha}$ と $\dot{\boldsymbol{r}}$ は垂直であるから、

$$\dot{\boldsymbol{r}}(b) \cdot \boldsymbol{r}(a) \pm |PS|\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(b) \cdot \boldsymbol{\alpha}(a)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(a)|} = \dot{\boldsymbol{r}}(b) \cdot \boldsymbol{r}(b)$$

となり、よって、

$$|PS| = \pm\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(b) \cdot (\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a))}{\dot{\boldsymbol{r}}(b) \cdot \boldsymbol{\alpha}(a)}|\dot{\boldsymbol{r}}(a)| \tag{18}$$

と表されることになる。この式の $b \to a$ の極限が曲率半径となる。

この式 $(18)$ の分母は、このままでは

$$\dot{\boldsymbol{r}}(b) \cdot \boldsymbol{\alpha}(a) \to \dot{\boldsymbol{r}}(a) \cdot \boldsymbol{\alpha}(a) = 0$$

となるので、少し変形して

$$\dot{\boldsymbol{r}}(b) \cdot \boldsymbol{\alpha}(a) = \dot{\boldsymbol{r}}(b) \cdot \boldsymbol{\alpha}(a) - \dot{\boldsymbol{r}}(a) \cdot \boldsymbol{\alpha}(a) = (\dot{\boldsymbol{r}}(b) - \dot{\boldsymbol{r}}(a)) \cdot \boldsymbol{\alpha}(a)$$

とすれば、$b \to a$ に対して、

$$\begin{aligned} |PS| &= \pm\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(b)\cdot(\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a))}{(\dot{\boldsymbol{r}}(b)-\dot{\boldsymbol{r}}(a))\cdot\boldsymbol{\alpha}(a)}|\dot{\boldsymbol{r}}(a)| \\ &= \pm|\dot{\boldsymbol{r}}(a)|\left(\dot{\boldsymbol{r}}(b)\cdot\frac{\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)}{b-a}\right)\Big/\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(b)-\dot{\boldsymbol{r}}(a)}{b-a}\cdot\boldsymbol{\alpha}(a)\right) \\ &\to \pm|\dot{\boldsymbol{r}}(a)|\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(a)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}(a)}{\ddot{\boldsymbol{r}}(a)\cdot\boldsymbol{\alpha}(a)} = \pm\frac{|\dot{\boldsymbol{r}}(a)|^3}{\ddot{\boldsymbol{r}}(a)\cdot\boldsymbol{\alpha}(a)} \end{aligned}$$

となるが、この $\pm$ は、$(16)$ の符号、すなわち丁度この分母の符号と等しかったから、

$$\pm\ddot{\boldsymbol{r}}(a)\cdot\boldsymbol{\alpha}(a) = |\ddot{\boldsymbol{r}}(a)\cdot\boldsymbol{\alpha}(a)|$$

となるので、よって曲率半径 $R$ を表す式は

$$R = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}(a)|^3}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(a)\cdot\boldsymbol{\alpha}(a)|} = \frac{\{(\dot{x}(a))^2+(\dot{y}(a))^2\}^{3/2}}{|\dot{x}(a)\ddot{y}(a)-\dot{y}(a)\ddot{x}(a)|} \tag{19}$$

と得らえることになる。この場合、曲率 $\mu$ は

$$\mu = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(a)\cdot\boldsymbol{\alpha}(a)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(a)|^3} = \frac{\dot{x}(a)\ddot{y}(a)-\dot{y}(a)\ddot{x}(a)}{\{(\dot{x}(a))^2+(\dot{y}(a))^2\}^{3/2}} \tag{20}$$

と定められ、また $(17)$ の $b \to a$ の極限を考えると $|PS| \to R$ であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OS}} &\to \boldsymbol{r}(a) \pm R\frac{\boldsymbol{\alpha}(a)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(a)|} = \boldsymbol{r}(a) \pm \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}(a)|^3}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(a)\cdot\boldsymbol{\alpha}(a)|}\frac{\boldsymbol{\alpha}(a)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(a)|} = \boldsymbol{r}(a) + \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}(a)|^2}{\ddot{\boldsymbol{r}}(a)\cdot\boldsymbol{\alpha}(a)}\boldsymbol{\alpha}(a) \\ &= (x(a),y(a)) + \frac{(\dot{x}(a))^2+(\dot{y}(a))^2}{\dot{x}(a)\ddot{y}(a)-\dot{y}(a)\ddot{x}(a)}(-\dot{y}(a),\dot{x}(a)) \end{aligned}$$

が曲率中心の位置ベクトルとなる。

$(20)$ の分子は $(16)$ と同じであるから、$y=f(x)$ の場合と同様に、$\mu$ が正なら $t$ の増加に伴い左に曲がり、負なら右に曲がることもわかる。

また、$y=f(x)$ は $x=t,\ y=f(t)$ と考えることもでき、これを $(19)$ に代入すれば容易に $2$ 節の $(10)$ と同じものが得られることがわかる。これとは逆に、前の $y=f(x)$ に対

する (10) から (19) を導くこともできる。$x = x(t)$, $y = y(t)$ のときに $dy/dx$, $d^2y/dx^2$ を $x$, $y$ の微分で表せば、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)},\\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\frac{1}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3}\end{aligned}$$

となるから、これを (10) の 2 乗に代入すれば、

$$R^2 = \frac{\{1+(y')^2\}^3}{(y'')^2} = \left\{1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right\}^3\Big/\left\{\frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3}\right\}^2 = \frac{\{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2\}^3}{(\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x})^2}$$

となり (19) が得られる。

# 5 最後に

この曲率半径や曲率の概念は、3 次元曲線、さらに $n$ 次元空間の曲線にまで拡張されていて、工学向けのベクトル解析の教科書などにもよく取り上げられている。

しかし、ベクトル解析の先の方では実際にそれを利用することはほとんどないし、むしろ 2 次元平面内の曲率半径の方が工学的な応用という点では重要なのでは、と思い本稿では 2 次元に限って紹介した。

3 次元の空間曲線の曲率等に興味があれば、ベクトル解析の本を参照するといいだろう。

# A 曲率の回転不変性

この節では補遺として、(10) または (19) によって与えられる $R$ の回転不変性を示す。もちろん 3 節や 4 節の議論からそれが回転不変性を持つことは明らかなのであるが、それを式の上で (10), (19) に対して直接示してみる。

まず、$y = f(x)$ で表される曲線を回転して得られる曲線を考える。点 $(x, y)$ を原点の周りに $\theta$ 回転した点を $(\bar{x}, \bar{y})$ とすると、それは

$$\begin{cases} \bar{x} &= x\cos\theta - y\sin\theta, \\ \bar{y} &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \tag{21}$$

となるので、これを $x$, $y$ について解いて、

$$\begin{cases} x &= \bar{x}\cos\theta + \bar{y}\sin\theta, \\ y &= -\bar{x}\sin\theta + \bar{y}\cos\theta \end{cases} \tag{22}$$

とし、これを $y = f(x)$ 代入して得られる $\bar{x}$, $\bar{y}$ の式を $\bar{y}$ について解いて $\bar{y} = g(\bar{x})$ としたものが、$y = f(x)$ を $\theta$ 回転した曲線の式となる ($(\bar{x}, \bar{y})$ 座標軸上のグラフ)。

$R$ の回転不変性とは、対応する点に対する $R$ が $f$ でも $g$ でも同じ値になること、すなわち、

$$R^2 = \frac{\{1 + (f'(x))^2\}^{3/2}}{(f''(x))^2} = \frac{\{1 + (g'(\bar{x}))^2\}^{3/2}}{(g''(\bar{x}))^2} \tag{23}$$

が成り立つことであり、まずこれを示す (もちろん $g'$ は $\bar{x}$ での微分を意味する)。

上で説明したように、$(22)$ を $y = f(x)$ に代入した式

$$-\bar{x}\sin\theta + \bar{y}\cos\theta = f(\bar{x}\cos\theta + \bar{y}\sin\theta)$$

を $\bar{y}$ について解いたものが $\bar{y} = g(\bar{x})$ なので、

$$-\bar{x}\sin\theta + g(\bar{x})\cos\theta = f(\bar{x}\cos\theta + g(\bar{x})\sin\theta) \tag{24}$$

となる。この式 $(24)$ を $\bar{x}$ で微分すると、

$$-\sin\theta + g'(\bar{x})\cos\theta = f'(x)(\cos\theta + g'(\bar{x})\sin\theta) \tag{25}$$

となるから、これにより

$$f'(x) = \frac{-\sin\theta + g'(\bar{x})\cos\theta}{\cos\theta + g'(\bar{x})\sin\theta} \tag{26}$$

が得られる。(25) を再び $\bar{x}$ で微分すると、

$$g''(\bar{x})\cos\theta = f''(x)(\cos\theta + g'(\bar{x})\sin\theta)^2 + f'(x)g''(\bar{x})\sin\theta$$

となるので、

$$\begin{aligned} & f''(x)(\cos\theta + g'(\bar{x})\sin\theta)^2 \\ &= g''(\bar{x})(\cos\theta - f'(x)\sin\theta) = g''(\bar{x})\left(\cos\theta - \frac{-\sin\theta + g'(\bar{x})\cos\theta}{\cos\theta + g'(\bar{x})\sin\theta}\sin\theta\right) \\ &= g''(\bar{x})\frac{\cos^2\theta + g'(\bar{x})\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta - g'(\bar{x})\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta + g'(\bar{x})\sin\theta} \\ &= \frac{g''(\bar{x})}{\cos\theta + g'(\bar{x})\sin\theta} \end{aligned}$$

より、

$$f''(x) = \frac{g''(\bar{x})}{(\cos\theta + g'(\bar{x})\sin\theta)^3} \tag{27}$$

となる。また、(26) より、

$$\begin{aligned} 1 + (f'(x))^2 &= 1 + \frac{(-\sin\theta + g'(\bar{x})\cos\theta)^2}{(\cos\theta + g'(\bar{x})\sin\theta)^2} \\ &= \frac{(\cos\theta + g'(\bar{x})\sin\theta)^2 + (-\sin\theta + g'(\bar{x})\cos\theta)^2}{(\cos\theta + g'(\bar{x})\sin\theta)^2} \\ &= \frac{1 + (g'(\bar{x}))^2}{(\cos\theta + g'(\bar{x})\sin\theta)^2} \end{aligned} \tag{28}$$

となるので、(27), (28) より確かに (23) が成り立つことがわかる。

なお、2 節で $f''$ の値が回転不変ではないと書いたが、それは (27) からわかる。

次に (19) の回転不変性であるが、これは

$$R = \frac{\{(\dot{x}(a))^2 + (\dot{y}(a))^2\}^{3/2}}{|\dot{x}(a)\ddot{y}(a) - \dot{y}(a)\ddot{x}(a)|} = \frac{\{(\dot{\bar{x}}(a))^2 + (\dot{\bar{y}}(a))^2\}^{3/2}}{|\dot{\bar{x}}(a)\ddot{\bar{y}}(a) - \dot{\bar{y}}(a)\ddot{\bar{x}}(a)|} \tag{29}$$

ということである。(22) より、

$$\begin{cases} x(t) &= \bar{x}(t)\cos\theta + \bar{y}(t)\sin\theta, \\ y(t) &= -\bar{x}(t)\sin\theta + \bar{y}(t)\cos\theta \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
&\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} \\
&= (\dot{\bar{x}}\cos\theta + \dot{\bar{y}}\sin\theta)(-\ddot{\bar{x}}\sin\theta + \ddot{\bar{y}}\cos\theta) - (-\dot{\bar{x}}\sin\theta + \dot{\bar{y}}\cos\theta)(\ddot{\bar{x}}\cos\theta + \ddot{\bar{y}}\sin\theta) \\
&= (-\dot{\bar{x}}\ddot{\bar{x}}\cos\theta\sin\theta + \dot{\bar{x}}\ddot{\bar{y}}\cos^2\theta - \dot{\bar{y}}\ddot{\bar{x}}\sin^2\theta + \dot{\bar{y}}\ddot{\bar{y}}\sin\theta\cos\theta) \\
&\quad -(-\dot{\bar{x}}\ddot{\bar{x}}\sin\theta\cos\theta - \dot{\bar{x}}\ddot{\bar{y}}\sin^2\theta + \dot{\bar{y}}\ddot{\bar{x}}\cos^2\theta + \dot{\bar{y}}\ddot{\bar{y}}\cos\theta\sin\theta) \\
&= \dot{\bar{x}}\ddot{\bar{y}} - \dot{\bar{y}}\ddot{\bar{x}}, \\
&(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 \\
&= (\dot{\bar{x}}\cos\theta + \dot{\bar{y}}\sin\theta)^2 + (-\dot{\bar{x}}\sin\theta + \dot{\bar{y}}\cos\theta)^2 \\
&= (\dot{\bar{x}})^2 + (\dot{\bar{y}})^2
\end{aligned}$$

となるから、(29) が成り立つことはすぐにわかる。

# B 曲率半径の性質の証明

この節では補遺として、3 節の最後に述べた、以下の命題を証明を記す。

### 命題 1

平面曲線 $L$ 上の点 $P$ での曲率半径が $R\ (>0)$ であるとき、$0<\rho<R$ である $\rho$ を半径に持つ円 $C$ が点 $P$ で ($L$ の凹んでいる側に) 接しているとすると、$L$ と $C$ との交点は、$P$ の十分小さい近傍には $P$ 以外には存在しない。

証明

背理法で示す。

もし、$L$ と $C$ の交点が、$P$ のいくらでも近くに存在するとすると、その交点からなる $P$ に収束する点列 $P_n\ (n=1,2,3,\ldots)$ を取ることができる。ただし、そのような交点のうち、

そこで曲線 $L$ と円 $C$ が接していなくて、かつ $P$ に向かう方向に見て曲線 $L$ が円 $C$ 内に入っていくような点

は除くことにする。円に入ったところの交点の次の交点は、円から出る交点か円に接する交点のどちらかであるから、そのような排除の前に $P$ に収束する交点列が存在すれば、そのような排除を行っても $P$ に近づく交点は無限に存在することになるから、$\{P_n\}_n$ はこのようにして取った点列であるとする。

円 $C$ の中心を $Q$ とすると、$CQ = \rho < R$ であるが、$P_n$ での $L$ の法線を考えると、$P_n$ が円と接している場合は、それはこの円の直径になるから $P$ の法線との交点は $Q$ となる。$P_n$ が円と接していない場合は、$P_n$ は $L$ がそこから $C$ を出ていくような点であるから、$P_n$ での $L$ の法線は $P_n$ を通る直径よりも $P$ に向かって傾いていて、よって、$P_n$ での法線と $P$ での法線との交点は半径 $PQ$ 上にある。

これにより、$P_n$ での法線と $P$ での法線との交点は、すべて半径 $PQ$ 上にあることになり、その $n \to \infty$ の極限点も $PQ$ 上にあることになるから、その点と $P$ との距離 $r$ は $r \leq \rho$ となる。しかし、この距離 $r$ が、3 節で見たように $P$ での曲率半径であるから、$r = R > \rho$ でなくてはならず、これは不合理となる。

ゆえに、$P$ の近くに限りなく $L$ と $C$ との交点が存在することはなく、交点が $P$ しかないような $P$ の近傍を取ることができる。■