2010 年 3 月 12 日

$\cos^m x \sin^n x$ の積分について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

$\cos^m x \sin^n x$ (m, n は 0 以上の整数) の不定積分の計算はよくある問題であるが、基礎数理で使用している教科書には書いてなかったので、今年度 (2009) の宿題の解答として配布した手書きのプリントの余白に、余談としてその積分方法を何通りか紹介した。

せっかくであるから、省略した部分も加筆して、ここにそれをまとめておくことにする。

2 置換積分に帰着できる場合

$\cos nx$, $\sin nx$ の積分は

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\,F(ax+b)+C \quad (F'(u)=f(u) \text{ のとき}) \tag{1}$$

を用いれば容易に求められ

$$\int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\,\sin nx + C, \quad \int \sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\,\cos nx + C, \tag{2}$$

となるが、積は直接積分はできないので[1]、$\cos^n x$ や $\sin^n x$ の積分は容易ではない。例えば $\sin^2 x$ の積分でも半角の公式

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \tag{3}$$

を利用して、

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\cos 2x\right)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

[1] 勝手な公式を用いて簡単に積分する答案を書く初学者も多いが. . .

のように行わなければならず、一般に $\cos^m x\sin^n x$ の積分は、何通りか知られているがいずれも容易ではない。

まず本節では、その積分を変形することでより容易な形に帰着させ、置換積分で簡単にできる場合について具体的例を混じえて紹介する。以下、

$$I(m,n)=\int\cos^m x\sin^n x\,dx$$

と書くことにする。

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$ を用いれば $I(m,n)$ は

$$I(k,1),I(k,0),I(1,k),I(0,k) \tag{4}$$

の形の積分に帰着されることがわかる。例えば、$I(6,5)$ は

$$\begin{aligned}
I(6,5) &= \int\cos^6 x\sin^5 x\,dx=\int\cos^6 x\sin^4 x\sin x\,dx\\
&= \int\cos^6 x(\sin^2 x)^2\sin x\,dx=\int\cos^6 x(1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx\\
&= \int\cos^6 x(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\sin x\,dx\\
&= I(6,1)-2I(8,1)+I(10,1),\\
I(6,5) &= \int\cos^6 x\sin^5 x\,dx=\int(\cos^2 x)^3\sin^5 x\,dx=\int(1-\sin^2 x)^3\sin^5 x\,dx\\
&= \int(1-3\sin^2 x+3\sin^4 x-\sin^6 x)\sin^5 x\,dx\\
&= I(0,5)-3I(0,7)+3I(0,9)-I(0,11)
\end{aligned}$$

といった具合である。

(4) の 4 通りの積分のうち、$I(k,1)$, $I(1,k)$、および k が奇数の場合の $I(k,0)$, $I(0,k)$ は、いずれも置換積分によりそれほど難しくなく求めることができる。そして $I(m,n)$ の m か n の少なくとも一方が奇数の場合は、それをすべてこれらの形に帰着することができるので置換積分で積分できることになる。

一般に、

$$I_1=\int f(\cos x)\sin x\,dx$$

の形の積分は $u=\cos x$ と置換すれば、

$$\frac{du}{dx}=(\cos x)'=-\sin x,\quad \sin x\,dx=(-1)\,du$$

であるので、これにより

$$I_1=-\int f(u)\,du=-F(u)+C=-F(\cos x)+C\quad (F'(u)=f(u)) \tag{5}$$

と積分できる。同様に、

$$I_2=\int f(\sin x)\cos x\,dx$$

は $u=\sin x$ と置換すれば、

$$\frac{du}{dx}=(\sin x)'=\cos x,\quad \cos x\,dx=du$$

であるので、これにより

$$I_2=\int f(u)\,du=F(u)+C=F(\sin x)+C \tag{6}$$

と求まる。

よって、m, n の一方が奇数の場合は、そちらの三角関数を一つだけ残せば後はその三角関数の偶数乗が残るが、それは $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ を用いて他方の三角関数に変換できるから、結局上の I_1 か I_2 のいずれかの形に書き換えことができる。

例えば、$I(6,5)$ の場合は、

$$\begin{aligned}I(6,5)&=\int\cos^6 x\sin^5 x\,dx=\int\cos^6 x\sin^4 x\sin x\,dx\\&=\int\cos^6 x(1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx\end{aligned}$$

と I_1 の形に変形できる。よって、$u=\cos x$ と置換すれば、

$$\begin{aligned}I(6,5)&=-\int u^6(1-u^2)^2\,du=-\int(u^6-2u^8+u^{10})\,du\\&=-\frac{1}{7}\,u^7+\frac{2}{9}\,u^9-\frac{1}{11}\,u^{11}+C\\&=-\frac{1}{7}\,\cos^7 x+\frac{2}{9}\,\cos^9 x-\frac{1}{11}\,\cos^{11} x+C\end{aligned}$$

と積分できる。

よって残るのは、$I(m,n)$ の m と n の両方が偶数の場合であるが、これは本節のような置換積分では計算ができず容易ではない。次節以降でそのような積分を考えていくことにする。

なお、m, n の両方が偶数の場合は (4) の形に帰着させると k が偶数の場合の $I(k,0)$ の形の和か、$I(0,k)$ の形の和になるので、後はこの形のみを考えればよいことになるが、さらに $I(0,k)$ は以下のようにして $I(k,0)$ に帰着できることがわかるので、これらはすべて k が偶数の場合の $I(k,0)$ を求めることに帰着することになる。

今、$I(0,k)=I(0,k)(x)$ に対して、$x=\pi/2-t$ と置換すれば $dx=(-1)\,dt$ であり、

$$\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t,\quad \cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t \tag{7}$$

なので、

$$I(0,k)=I(0,k)(x)=\int\sin^k x\,dx=-\int\cos^k t\,dt=-I(k,0)(t)$$

となる。よって $I(k,0)(t)$ が t の式として求められれば $t=\pi/2-x$, 特に $\sin t=\cos x$, $\cos t=\sin x$ と戻して全体を (-1) 倍すれば $I(0,k)(x)$ が求まることになる。$\sin 2t$ や $\cos 3t$ などの式が現れた場合は $t=\pi/2-x$ によって x の式に戻せばよい。

よって、以後は $I(k,0)$ を $J(k)$ と書くことにして、主に k が偶数の場合の $J(k)$ だけを考えることにするが、場合によっては (4) に帰着させる前の m, n が偶数の $I(m,n)$ についても言及することにする。

3 部分積分を利用する方法

一般の k に対して $J(k)$ を求める方法として、(高校などで) 最も普通に紹介される方法は、部分積分を利用して漸化式を作る方法だと思われる。

$k\geq 2$ に対して部分積分を用いると、

$$\begin{aligned}J(k) &= \int\cos^k x\,dx=\int\cos^{k-1}x\cos x\,dx=\int\cos^{k-1}x(\sin x)'\,dx\\ &= \cos^{k-1}x\sin x-\int(\cos^{k-1}x)'\sin x\,dx\end{aligned}$$

となるが、合成関数の微分により $u=\cos x$ とすれば、

$$\begin{aligned}(\cos^{k-1}x)' &= \frac{du^{k-1}}{dx}=\frac{du^{k-1}}{du}\,\frac{du}{dx}=(k-1)u^{k-2}(-\sin x)\\ &= -(k-1)\cos^{k-2}x\sin x \end{aligned} \tag{8}$$

となるから、

$$\begin{aligned}J(k) &= \cos^{k-1}x\sin x+(k-1)\int\cos^{k-2}x\sin^2 x\,dx\\ &= \cos^{k-1}x\sin x+(k-1)\int\cos^{k-2}x(1-\cos^2 x)\,dx\\ &= \cos^{k-1}x\sin x+(k-1)(J(k-2)-J(k))\end{aligned}$$

となる。よって右辺の $-(k-1)J(k)$ を左辺に移項すれば

$$kJ(k)=(k-1)J(k-2)+\cos^{k-1}x\sin x$$

となるので、

$$J(k)=\frac{k-1}{k}\,J(k-2)+\frac{1}{k}\,\cos^{k-1}x\sin x\quad(k\geq 2) \tag{9}$$

が得られる。これに、

$$J(0)=\int 1\,dx=x+C,\quad J(1)=\int\cos x\,dx=\sin x+C \tag{10}$$

を組み合わせれば、帰納的にすべての $J(k)$ が得られることになる (奇数の k も含めて)。

例えば、$J(4)$, $J(5)$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned}J(4) &= \frac{3}{4}\,J(2)+\frac{1}{4}\,\cos^3 x\sin x\\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\,J(0)+\frac{1}{2}\,\cos x\sin x\right)+\frac{1}{4}\,\cos^3 x\sin x\\ &= \frac{3}{8}\,x+\frac{3}{8}\cos x\sin x+\frac{1}{4}\cos^3 x\sin x+C, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}J(5) &= \frac{4}{5}\,J(3)+\frac{1}{5}\,\cos^4 x\sin x\\ &= \frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}\,J(1)+\frac{1}{3}\,\cos^2 x\sin x\right)+\frac{1}{5}\,\cos^4 x\sin x\\ &= \frac{8}{15}\,\sin x+\frac{4}{15}\cos^2 x\sin x+\frac{1}{5}\cos^4 x\sin x+C \end{aligned} \tag{12}$$

2 節の最後に述べたように $I(0,4)$ は $J(4)=I(4,0)$ から求めることができる。

$$
\begin{aligned}
I(0,4) &= I(0,4)(x) = -I(4,0)(t) = -J(4)(t)\\
&= -\frac{3}{8}t - \frac{3}{8}\cos t\sin t + \frac{1}{4}\cos^3 t\sin t + C_1\\
&= \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + C_2
\end{aligned}
$$

また、$I(6,4)$ なども、途中で上の $J(4)$ を使えば、

$$
\begin{aligned}
I(6,4) &= \int \cos^6 x\sin^4 x\,dx = \int \cos^6 x(1-\cos^2 x)^2\,dx\\
&= \int \cos^6 x(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\,dx = J(6)-2J(8)+J(10)\\
&= J(6)-2J(8)+\frac{9}{10}J(8)+\frac{1}{10}\cos^9 x\sin x\\
&= J(6)-\frac{11}{10}J(8)+\frac{1}{10}\cos^9 x\sin x\\
&= J(6)-\frac{11}{10}\left(\frac{7}{8}J(6)+\frac{1}{8}\cos^7 x\sin x\right)+\frac{1}{10}\cos^9 x\sin x\\
&= \frac{3}{80}J(6)-\frac{11}{80}\cos^7 x\sin x+\frac{1}{10}\cos^9 x\sin x\\
&= \frac{3}{80}\left(\frac{5}{6}J(4)+\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x\right)-\frac{11}{80}\cos^7 x\sin x+\frac{1}{10}\cos^9 x\sin x\\
&= \frac{1}{32}J(4)+\frac{1}{160}\cos^5 x\sin x-\frac{11}{80}\cos^7 x\sin x+\frac{1}{10}\cos^9 x\sin x\\
&= \frac{3}{256}x+\frac{3}{256}\cos x\sin x+\frac{1}{128}\cos^3 x\sin x+\frac{1}{160}\cos^5 x\sin x\\
&\quad -\frac{11}{80}\cos^7 x\sin x+\frac{1}{10}\cos^9 x\sin x+C
\end{aligned}
$$

のように求められる。

この方法は、公式 (9) さえ作ってしまえば楽なのだが、公式 (9) を作るために一旦一般の k に対して部分積分を行わなければならない、という点が難点ではないかと思われる。

4 半角の公式で偶数乗を解消する方法

2 節で紹介したように、$\cos^2 x$ の積分は半角の公式 (3) を用いて積分できる。一般の偶数乗の場合もこれを必要なだけ繰り返し利用することでそれを解消すれば、(2) の形

か、あるいは奇数乗の形にでき、奇数乗は 2 節のように置換積分で積分できるので、これですべての積分を求めることができることになる。

例として、$J(4)$, $J(6)$ を求めてみる。

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x \\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\,\frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x \end{aligned} \tag{13}$$

より、

$$J(4) = \int\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx = \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

となる。また、$\cos^6 x$ は、

$$\begin{aligned}\cos^6 x &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)^3 = \frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cos 2x+\frac{3}{8}\cos^2 2x+\frac{1}{8}\cos^3 2x \\ &= \frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cos 2x+\frac{3}{8}\,\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1}{8}\cos^3 2x \\ &= \frac{5}{16}+\frac{3}{8}\cos 2x+\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{8}\cos^3 2x\end{aligned}$$

であり、最後の奇数乗の積分には、$u=\sin 2x$ の置換積分を用いる。

$$\frac{du}{dx} = 2\cos 2x,\quad \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\,du$$

より

$$\begin{aligned}&\int\frac{1}{8}\cos^3 2x\,dx = \int\frac{1}{8}(1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx = \int\frac{1}{16}(1-u^2)\,du \\ &= \frac{1}{16}u-\frac{1}{48}u^3+C = \frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}J(6) &= \int\left(\frac{5}{16}+\frac{3}{8}\cos 2x+\frac{3}{16}\cos 4x\right)dx+\int\frac{1}{8}\cos^3 2x\,dx \\ &= \frac{5}{16}x+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C \\ &= \frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C\end{aligned}$$

となる。

原理的には、この方法で $J(k)$ の項はすべて $\cos mx$ の奇数乗の和の形に直せるので置換積分により積分できることになるが、途中の計算は煩雑であり、3 節の部分積分の方法に比べると難しいだろうと思う。

5 積→和の公式を利用する方法

4 節では半角の公式を利用して偶数乗のみを解消したが、奇数乗の積分には置換積分を利用した。しかし、三角関数の積→和の公式を利用すれば奇数乗の項も累乗の形を解消できる。

積→和の公式とは、加法定理から得られる以下の公式である。

$$\begin{cases} \sin A\cos B &= \dfrac{1}{2}\{\sin(A+B)+\sin(A-B)\}, \\ \cos A\sin B &= \dfrac{1}{2}\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\}, \\ \sin A\sin B &= \dfrac{1}{2}\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}, \\ \cos A\cos B &= \dfrac{1}{2}\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\} \end{cases} \tag{14}$$

例えば、4 節の $J(6)$ の計算に出てきた 3 乗の項は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}\cos^3 2x &= \frac{1}{8}\cos^2 2x\cos 2x = \frac{1}{8}\,\frac{1+\cos 4x}{2}\cos 2x \\ &= \frac{1}{16}\cos 2x + \frac{1}{16}\cos 4x\cos 2x = \frac{1}{16}\cos 2x + \frac{1}{32}(\cos 2x + \cos 6x) \\ &= \frac{3}{32}\cos 2x + \frac{1}{32}\cos 6x \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \cos^6 x &= \frac{5}{16} + \frac{3}{8}\cos 2x + \frac{3}{16}\cos 4x + \frac{3}{32}\cos 2x + \frac{1}{32}\cos 6x \\ &= \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{3}{16}\cos 4x + \frac{1}{32}\cos 6x \end{aligned} \tag{15}$$

となるので、

$$\begin{aligned} J(6) &= \int\left(\frac{5}{16}+\frac{15}{32}\cos 2x+\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{32}\cos 6x\right)dx \\ &= \frac{5}{16}x+\frac{15}{64}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{192}\sin 6x+C \end{aligned}$$

となる。

この方法の難点は、積→和の公式自体が面倒であることと、それによる変形もそれなりに面倒なことだろう。さらに、元の関数が累乗の形であるのに対して、この方法による結果はすべて $\sin nx$ のように累乗ではない形なので、累乗の形で解を求めたい場合には、その結果を加法定理で展開をしなければいけない点も、場合によっては欠点となるかもしれない。

6 オイラーの公式を利用する方法

4 節の方法も 5 節の方法も、途中の計算には実は明確な方針はなく、やり方は色々ありうる。そういう意味で、やや機械的にはやりにくいという点もある。

それを解消するには、複素数を利用して機械的に計算するという方法がある。そこで利用されるのが以下のオイラーの公式である。

$$\begin{cases} e^{i\theta} &= \cos\theta+i\sin\theta, \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta-i\sin\theta \end{cases} \tag{16}$$

この公式自体の説明は省略するが、これを利用すると $\cos x, \sin x$ は複素指数を用いて以下のように書ける。

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \tag{17}$$

これを使えば、5 節と同等の $\cos^n x$ の形の式から $\cos mx$ の形の式の和への変形が、展開と指数法則により機械的に行える。例えば $\cos^4 x, \cos^6 x$ でそれを行ってみる。

まず、$\cos^4 x$ は、

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6) = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$$

となり、4 乗の二項展開の公式から容易に 4 節の式 (13) と同じ式が得られることになる。

$\cos^6 x$ も、

$$\begin{aligned}
\cos^6 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^6 \\
&= \frac{1}{64}(e^{6ix}+6e^{4ix}+15e^{2ix}+20+15e^{-2ix}+6e^{-4ix}+e^{-6ix}) \\
&= \frac{1}{64}(2\cos 6x + 12\cos 4x + 30\cos 2x + 20) \\
&= \frac{1}{32}(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10)
\end{aligned}$$

となり、6 乗の二項展開の公式から 5 節の (15) と同じ式が得られる。

これらの例からもわかると思うが、この方法は三角関数の公式を利用するよりは機械的で計算は楽であるから、それなりに有用な方法だと思う。ただし、オイラーの公式 (16) を知らないと使えない方法なので、実際に基礎数理の講義等でこの方法を導入するのは難しい。

ついでに $\cos^6 x\sin^4 x$ ($I(6,4)$) の場合も計算してみるが、この場合は、

- 直接 (17) を代入して展開する
- 先に (4) のように $\cos x$ のみの式に変形してから (17) を代入して展開する

のような 2 つの方法が考えられるが、前者は展開の計算がやや煩雑であるし、後者は $\cos x$ の次数が上がるため、係数の計算がやはりやや面倒になる。このそれぞれを行ってみる。

まずは前者であるが、一応半角の公式

$$\cos x\sin x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

を利用すれば多少は楽になるが、それでも展開はそれなりに煩雑である。

$$\cos^6 x\sin^4 x = \cos^2 x(\cos x\sin x)^4 = \frac{1}{16}\cos^2 x\sin^4 2x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{16}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^4 \\
&= \frac{1}{2^{10}}(e^{2ix}+2+e^{-2ix})(e^{8ix}-4e^{4ix}+6-4e^{-4ix}+e^{-8ix})
\end{aligned}
$$

となり、この先の展開がやや面倒で、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{10}}(e^{2ix}+2+e^{-2ix})(e^{8ix}-4e^{4ix}+6-4e^{-4ix}+e^{-8ix}) \\
&= \frac{1}{2^{10}}(e^{10ix}+2e^{8ix}-3e^{6ix}-8e^{4ix}+2e^{2ix}+12+2e^{-2ix}-8e^{-4ix}-3e^{-6ix} \\
&\quad +2e^{-8ix}+e^{-10ix}) \\
&= \frac{1}{2^9}(\cos 10x+2\cos 8x-3\cos 6x-8\cos 4x+2\cos 2x+6)
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
&\cos^6 x\sin^4 x \\
&= \frac{1}{2^9}\cos 10x+\frac{1}{2^8}\cos 8x-\frac{3}{2^9}\cos 6x-\frac{1}{2^6}\cos 4x+\frac{1}{2^8}\cos 2x+\frac{3}{2^8} \qquad (18)
\end{aligned}
$$

となる。

次に後者の $\cos x$ に直してから代入を行う方法で計算してみる。この場合は積の展開は二項定理を用いるだけなのでその点は難しくない。

$$
\begin{aligned}
\cos^6 x\sin^4 x &= \cos^6 x(1-\cos^2 x)^2 = \cos^6 x - 2\cos^8 x + \cos^{10} x \\
&= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^6 - 2\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^8 + \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{10}
\end{aligned}
$$

ここで、6 次、8 次、10 次の二項係数は、それぞれ

- 6 次: 1,6,15,20,15,6,1
- 8 次: 1,8,28,56,70,56,28,8,1
- 10 次: 1,10,45,120,210,252,210,120,45,10,1

となるので、e^{nix} の $n<0$ の方は $n>0$ の方と対称であるから省略すれば、

$$
\begin{aligned}
&\cos^6 x\sin^4 x\\
&= \frac{1}{2^6}\left(e^{6ix}+6e^{4ix}+15e^{2ix}+20+\cdots\right)\\
&\quad -\frac{1}{2^7}\left(e^{8ix}+8e^{6ix}+28e^{4ix}+56e^{2ix}+70+\cdots\right)\\
&\quad +\frac{1}{2^{10}}\left(e^{10ix}+10e^{8ix}+45e^{6ix}+120e^{4ix}+210e^{2ix}+252+\cdots\right)\\
&= \frac{1}{2^9}\cos 10x+\left(\frac{5}{2^8}-\frac{1}{2^6}\right)\cos 8x+\left(\frac{45}{2^9}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}\right)\cos 6x\\
&\quad +\left(\frac{15}{2^6}-\frac{7}{2^4}+\frac{3}{2^4}\right)\cos 4x+\left(\frac{105}{2^8}-\frac{7}{2^3}+\frac{15}{2^5}\right)\cos 2x+\left(\frac{63}{2^8}-\frac{35}{2^6}+\frac{5}{2^4}\right)\\
&= \frac{1}{2^9}\cos 10x+\frac{1}{2^8}\cos 8x-\frac{3}{2^9}\cos 6x-\frac{1}{2^6}\cos 4x+\frac{1}{2^8}\cos 2x+\frac{3}{2^8}
\end{aligned}
$$

となり、(18) と同じ式が得られる。こちらは積の展開の計算はないものの、次数が上がることにより係数が大きくなり、その係数の計算が大変になることがわかるだろう。よって、どちらでやっても大差はないが、大きな数を使わなくて済む分、前者の方が楽かもしれない。

このように、$I(m,n)$ の場合にはこの複素指数を使う方法も、それほど楽ではないことがわかる。

7 未定係数法

最後に、未定係数法を紹介する。これは、積分の結果の形を想定して、積分ではなく微分によって両辺を比較して未定係数を求める、という方法である。

漸化式 (9) によれば、$J(2\ell)$ は

$$x,\ \cos x\sin x,\ \cos^3 x\sin x,\ \ldots,\cos^{2\ell-1}x\sin x$$

の定数倍の和で表されることがわかる。よって、a_j を定数として

$$J(2\ell)=a_0x+a_1\cos x\sin x+a_2\cos^3 x\sin x+\cdots+a_\ell\cos^{2\ell-1}x\sin x+C \tag{19}$$

とおいて両辺を微分すると、(8) より

$$
\begin{aligned}
(\cos^{2j-1} x \sin x)' &= (\cos^{2j-1} x)' \sin x + \cos^{2j-1} x (\sin x)' \\
&= -(2j-1)\cos^{2j-2} x \sin^2 x + \cos^{2j} x \\
&= -(2j-1)\cos^{2j-2} x + 2j \cos^{2j} x
\end{aligned}
\tag{20}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\cos^{2\ell} x &= a_0 + a_1(-1 + 2\cos^2 x) + a_2(-3\cos^2 x + 4\cos^4 x) + \cdots \\
&\quad + a_\ell\{-(2\ell-1)\cos^{2\ell-2} x + 2\ell\cos^{2\ell} x\} \\
&= (a_0 - a_1) + (2a_1 - 3a_2)\cos^2 x + (4a_2 - 5a_3)\cos^4 x + \cdots \\
&\quad + \{(2\ell-2)a_{\ell-1} - (2\ell-1)a_\ell\}\cos^{2\ell-2} x + 2\ell a_\ell \cos^{2\ell} x
\end{aligned}
$$

となる。この両辺の $1, \cos^2 x, \cos^4 x, \ldots, \cos^{2\ell} x$ の係数を比較して

$$
\begin{cases}
a_0 - a_1 = 0, \\
2a_1 - 3a_2 = 0, \\
4a_2 - 5a_3 = 0, \\
\cdots \\
(2\ell-2)a_{\ell-1} - (2\ell-1)a_\ell = 0, \\
2\ell a_\ell = 1
\end{cases}
$$

を得る。よって、

$$
\begin{aligned}
a_\ell &= \frac{1}{2\ell}, \\
a_{\ell-1} &= \frac{2\ell-1}{2\ell-2} a_\ell = \frac{2\ell-1}{(2\ell-2)(2\ell)}, \\
a_{\ell-2} &= \frac{2\ell-3}{2\ell-4} a_{\ell-1} = \frac{(2\ell-3)(2\ell-1)}{(2\ell-4)(2\ell-2)(2\ell)}, \\
\cdots \\
a_1 &= a_0 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2\ell-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2\ell-2)(2\ell)}
\end{aligned}
$$

と求まる。一般に a_j は、

$$
a_j = \frac{2j+1}{2j} a_{j+1} = \frac{(2j+1)(2j+3)\cdots(2\ell-1)}{(2j)(2j+2)\cdots(2\ell-2)(2\ell)} \quad (j \geq 1), \quad a_0 = a_1
$$

となるから、これを (19) に代入すれば一般的な公式を作ることもできるが、具体的な計算では上と同じ計算を行うことで係数を求めるのが良いだろう。例えば $J(4)$, $J(6)$ で計算してみる。

$$J(4) = a_0 x + a_1 \cos x \sin x + a_2 \cos^3 x \sin x + C$$

と置いて両辺を微分すれば、

$$\begin{aligned}
\cos^4 x &= a_0 + a_1(-\sin^2 x + \cos^2 x) + a_2(-3\cos^2 x \sin^2 x + \cos^4 x) \\
&= a_0 + a_1(-1 + 2\cos^2) + a_2(-3\cos^2 x + 4\cos^4 x) \\
&= (a_0 - a_1) + (2a_1 - 3a_2)\cos^2 x + 4a_2 \cos^4 x
\end{aligned}$$

となるので、

$$a_0 - a_1 = 0,\ \ 2a_1 - 3a_2 = 0,\ \ 4a_2 = 1$$

より、

$$a_2 = \frac{1}{4},\ \ a_1 = \frac{3}{2}a_2 = \frac{3}{8},\ \ a_0 = a_1 = \frac{3}{8}$$

となって、(11) と同じ式が得られることがわかる。

$$J(6) = a_0 x + a_1 \cos x \sin x + a_2 \cos^3 x \sin x + a_3 \cos^5 x \sin x + C$$

と置いて両辺微分すれば、

$$\begin{aligned}
&\cos^6 x \\
&\quad = a_0 + a_1(-1 + 2\cos^2) + a_2(-3\cos^2 x + 4\cos^4 x) + a_3(-5\cos^4 x + 6\cos^6 x) \\
&\quad = (a_0 - a_1) + (2a_1 - 3a_2)\cos^2 x + (4a_2 - 5a_3)\cos^4 x + 6a_3 \cos^6 x
\end{aligned}$$

より、

$$a_3 = \frac{1}{6},\ \ a_2 = \frac{5}{4}\frac{1}{6} = \frac{5}{24},\ \ a_1 = \frac{3}{2}a_2 = \frac{5}{16},\ \ a_0 = a_1 = \frac{5}{16}$$

となるから

$$J(6)=\frac{5}{16}x+\frac{5}{16}\cos x\sin x+\frac{5}{24}\cos^3 x\sin x+\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x+C$$

が得られる。ここでは、(20) を利用したが、直接計算して変形してもそれほど大変ではない。

ちなみに、これは奇数の方の $J(2\ell-1)$ にも使える方法であり、その場合は

$$J(2\ell-1)=\sum_{j=1}^{\ell}a_j\cos^{2j-2}x\sin x+C$$

と置いて微分すればよい。

$I(m,n)$ についても、m, n がともに偶数である場合はそれは $I(2\ell)$ $(2\ell\leq m+n)$ の形の和で表されるから、

$$I(m,n)=a_0x+\sum_{j=1}^{(m+n)/2}a_j\cos^{2j-1}x\sin x+C$$

と置いて求めることができる。ただし、この場合は左辺の微分は $\cos^m x\sin^n x$ となるので、これを $\cos x$ のみの式に変形しないと係数の比較は行えない。例えば、

$$I(6,4)=a_0x+(a_1\cos x+a_2\cos^3 x+a_3\cos^5 x+a_4\cos^7 x+a_5\cos^9 x)\sin x+C$$

と置いて両辺微分すると

$$\begin{aligned}\cos^6 x\sin^4 x &= (a_0-a_1)+(2a_1-3a_2)\cos^2 x+(4a_2-5a_3)\cos^4 x\\ &\quad+(6a_3-7a_4)\cos^6 x+(8a_4-9a_5)\cos^8 x+10a_5\cos^{10} x\end{aligned}$$

となるが、左辺は

$$\cos^6 x\sin^4 x=\cos^6 x(1-\cos^2 x)^2=\cos^6 x-2\cos^8 x+\cos^{10} x$$

であるから、

$$\begin{cases} a_0 - a_1 &= 0, \\ 2a_1 - 3a_2 &= 0, \\ 4a_2 - 5a_3 &= 0, \\ 6a_3 - 7a_4 &= 1, \\ 8a_4 - 9a_5 &= -2, \\ 10a_5 &= 1 \end{cases}$$

となり、

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{1}{10}, \quad a_4 = \frac{9}{8}a_5 - \frac{1}{4} = \frac{9}{80} - \frac{1}{4} = -\frac{11}{80}, \\ a_3 &= \frac{7}{6}a_4 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left(-\frac{77}{80} + 1\right) = \frac{1}{160}, \quad a_2 = \frac{5}{4}a_3 = \frac{1}{128}, \\ a_1 &= \frac{3}{2}a_2 = \frac{3}{256}, \quad a_0 = a_1 = \frac{3}{256} \end{aligned}$$

となる。

また、m, n がともに偶数と限らない場合は、これも 2 節、3 節の議論により、以下のように置けることがわかる。

- m, n がともに偶数の場合

$$I(m,n) = a_0 x + (a_1 \cos x + a_2 \cos^3 x + \cdots + a_\ell \cos^{2\ell-1} x) \sin x + C \\ (2\ell = m + n)$$

- m が奇数、n が偶数の場合

$$I(m,n) = a_1 \sin x + a_2 \sin^3 x + \cdots + a_\ell \sin^{2\ell-1} x + C \quad (2\ell - 1 = m + n)$$

- m が偶数、n が奇数の場合

$$I(m,n) = a_1 \cos x + a_2 \cos^3 x + \cdots + a_\ell \cos^{2\ell-1} x + C \quad (2\ell - 1 = m + n)$$

- m, n がともに奇数の場合

$$I(m,n) = a_1 \cos^2 x + a_2 \cos^4 x + \cdots + a_\ell \cos^{2\ell} x + C \quad (2\ell = m + n)$$

なお、m が奇数、n が偶数の場合は上は $\sin x$ ベースで置いたが、

$$I(m,n) = (b_1 + b_2\cos^2 x + \cdots + b_\ell \cos^{2\ell-2} x)\sin x + C \quad (2\ell - 1 = m + n)$$

のように置くこともできる。もちろん、いずれも微分後の左辺も右辺に合わせた形に変形した上で係数の比較を行わなければいけない。

この未定係数法は、間違いが少なく、微分さえ得意であればそれほど難しくない良い方法であるが、積分計算の方法の本筋からはやや外れた方法であり、またもちろん最終的な形がわからなければ使えないという欠点がある。その最終的な形を知るためには、2 節や 3 節の「本筋」の考察が当然必要になる。だから、本節の微分による計算はむしろ検算に使うことが多い方法だろうと思う。

8 最後に

積や商の積分は一般には容易ではなく、本稿で取り上げた $\sin^m x\cos^n x$ も、ちゃんと積分できるかどうかは自明ではないが、本稿で紹介したようにすればちゃんと求めることができる。しかしこのような積分自体が、工学や物理の現場で実際に現れるのかについては、詳しくは知らない。

よって本稿の内容が直接工学の参考になるかどうかはよくはわからないが、これらの計算方法で用いている手法、特にオイラーの公式を用いる方法や未定係数法などは、本稿の問題以外にも他の数学の場面で参考になると思われるので、全く無意味ではないだろうと思う。