2009 年 02 月 27 日

斜面を滑る物体が斜面から離れる条件

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

ジェットコースターのようにくねくねと変化する曲線の上を移動すると、下に凸な部分では下に押し下げられたように感じ、上に凸な部分ではふわっと浮いたような感触を受ける。その上に凸な部分で速度が出すぎると、そのレールを離れてしまうことになる。

本稿では、それが起こるための曲線と速度との関係を、通常の微分方程式による運動方程式での解析と、テイラー展開を用いて求める方法について紹介する。

2 微分方程式による考察

この節では、まず問題を定式化し、運動方程式を微分方程式で考える方法を紹介する。

物体がその上を滑る斜面のグラフを $y = f(x)$ と考え、物体は右側に向かって移動すると考える。重力は下向きに考えるので、曲線には多少の起伏はあってもよいが、おおむね右に下がっているものと考える。

物体の質量を m、物体の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x(t), y(t))$ (t は時刻) とし、空気抵抗や物体と斜面との摩擦は考えないとすれば、この物体に対する運動方程式は次の式で与えられる。

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{N} - mg\boldsymbol{e}_y \tag{1}$$

ここで、$\boldsymbol{N}$ は物体が斜面から受ける垂直抗力 (斜面に垂直上向き)、g は重力加速度、$\boldsymbol{e}_y = (0, 1)$ であり、t での微分を $\dot{}$ で、また $f(x)$ の x での微分は $f'(x)$ のように $'$ で表すことにする。$\dot{\boldsymbol{r}} = d\boldsymbol{r}/dt$ は物体の速度ベクトル、$\ddot{\boldsymbol{r}} = d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ は物体の加速度ベクトルである。

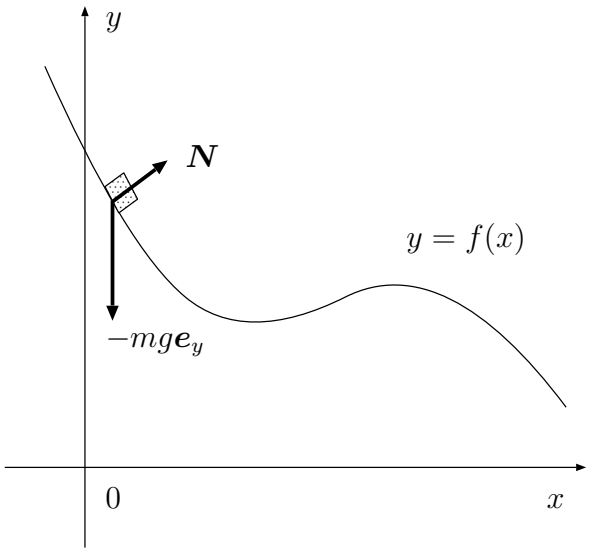

図 1: $y = f(x)$ の図

$\boldsymbol{r} = (x(t), y(t))$ は $y = f(x)$ 上を動くので、

$$y(t) = f(x(t)) \tag{2}$$

を満たしている。

この曲線上の点 $(x, f(x))$ での接線方向のベクトルは $\boldsymbol{a} = (1, f'(x))$ であり、これに垂直な上向きのベクトルは $\boldsymbol{b} = (-f'(x), 1)$ となるので、$\boldsymbol{N}$ は $\boldsymbol{b}$ と同じ向きである。よって、垂直抗力の大きさを $N = |\boldsymbol{N}|$ とすれば、

$$\boldsymbol{N} = N\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = N\frac{(-f', 1)}{\sqrt{1 + (f')^2}} \tag{3}$$

と書けることになる。これにより、(1) は成分で書くことができ、

$$m\ddot{x} = -N\frac{f'}{\sqrt{1 + (f')^2}}, \tag{4}$$

$$m\ddot{y} = N\frac{1}{\sqrt{1 + (f')^2}} - mg \tag{5}$$

となる。

(2) を用いると、$\ddot{y}$ を x で表すことができる。(2) に合成関数の微分、積の微分を適用すれば、

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}f(x(t)) = \frac{df(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = f'(x)\dot{x}(t), \qquad (6) \\ \ddot{y} &= \frac{d}{dt}(f'(x)\dot{x}(t)) = \left(\frac{d}{dt}f'(x(t))\right)\dot{x}(t) + f'(x)\frac{d}{dt}\dot{x}(t) \\ &= \frac{df'(x)}{dx}\frac{dx}{dt}\dot{x}(t) + f'(x)\ddot{x}(t) = f''(x)(\dot{x}(t))^2 + f'(x)\ddot{x}(t) \qquad (7) \end{aligned}$$

となる。よって、(5) は

$$f''(\dot{x})^2 + f'\ddot{x} = \frac{N}{m\sqrt{1+(f')^2}} - g \qquad (8)$$

と書けることになる。ここで、(4) より、

$$f'\ddot{x} - \frac{N}{m\sqrt{1+(f')^2}} = -\frac{N(f')^2}{m\sqrt{1+(f')^2}} - \frac{N}{m\sqrt{1+(f')^2}} = -\frac{N}{m}\sqrt{1+(f')^2}$$

となるので、(8) は、

$$f''(\dot{x})^2 = \frac{N}{m}\sqrt{1+(f')^2} - g \qquad (9)$$

と書くこともできる。この (4), (9) が物体の運動方程式であり、この 2 本から N を消去すれば x の単独の微分方程式を導くこともできる。

速度ベクトルを $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ と書くことにすれば、(6) より

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = (\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x}, f'\dot{x}) = (1, f')\dot{x}$$

となるので、速さ $v = |\boldsymbol{v}|$ は、

$$v^2 = (1+(f')^2)(\dot{x})^2 \qquad (10)$$

と表されることになる。

さて、物体が斜面から離れる瞬間は垂直抗力 N が 0 となるときであり、逆に $N > 0$ のときは物体は斜面を押していてその反作用として N が正の値になっていて、斜面からは離れないことになる。つまり斜面から物体が離れない条件は、(9) より

$$f''(\dot{x})^2 + g > 0 \tag{11}$$

と書くことができる。(10) より、これは

$$\frac{f''}{1+(f')^2}v^2 + g > 0 \tag{12}$$

と書くこともでき、これが斜面から物体が離れないための速度と斜面の条件式であり、この不等号が等号になるときに離れることになる。

これは、$f'' \geq 0$、すなわち斜面が下に凸なら無条件であり、逆に離れるには $f'' < 0$、すなわち斜面が上に凸で、かつ v がある程度大きくないと起こらない。v は f だけでは決まらず、$t = 0$ での初期値によって変化しうるので、(12) を f だけの式として表すことはできない[1]。

なお、$N = 0$ は (4) から $\ddot{x} = 0$ も導くが、これは x が等速に変化する状態であることを意味していて、物体が斜面から離れれば物体には下向きの重力しかかからず、$\ddot{x} = 0$ はそれを示していて、斜面から離れるための斜面の形状等に関する条件には寄与しない。よって (12) が求める条件 (離れないための条件) となる。

3 テイラー展開を利用する方法

2 節の方法は、考え方も計算も少し厄介である。この節では、高校の物理で習う放物運動の式を使い、斜面と放物運動曲線とをテイラー展開を用いて比較することで (12) を導く方法を紹介する。

今、斜面から離れていない物体の位置を $P(x_0, f(x_0))$ とし、そのときの速度ベクトルを $\boldsymbol{v}_0 = (v_x, v_y)$ とする。この速度ベクトルは斜面に接しているので、その傾きと斜面の傾きは等しく、よって

$$\frac{v_y}{v_x} = f'(x_0) \tag{13}$$

[1] 初期速度が与えられれば v は f によって決まるので、その意味では (12) を f と初期速度のみで表すことは可能である。

が成り立つ。なお、物体は右側に移動しているので $v_x > 0$ である。

この $(x_0, f(x_0))$ で物体が斜面から離れるかどうかを、放物運動と比較して考えることにする。今、仮にこの斜面がここで切れていたとすれば、物体は P から速度 $\boldsymbol{v}_0$ で投げた場合の放物運動をするはずである。まずその軌跡 C の方程式を計算しよう。この場合、物体には鉛直下向きに mg の力が働くのみなので、その時点を時刻 0 とすれば、よく知られているように

$$\begin{cases} y &= -\dfrac{g}{2}t^2 + v_y t + f(x_0), \\ x &= v_x t + x_0 \end{cases} \tag{14}$$

が成り立つ。これは、高校の物理でもよく用いられる式であるが、運動方程式

$$\begin{cases} m\ddot{\boldsymbol{r}} = -mg\boldsymbol{e}_y, \\ \dot{\boldsymbol{r}}(0) = \boldsymbol{v}_0, \quad \boldsymbol{r}(0) = (x_0, f(x_0)) \end{cases}$$

を解くことでも容易に得られる。(14) より、

$$t = \frac{x - x_0}{v_x}$$

なので、これを (14) の y の式に代入すれば、

$$y = -\frac{g}{2}\frac{(x-x_0)^2}{v_x^2} + \frac{v_y}{v_x}(x - x_0) + f(x_0)$$

となるが、(13) よりこれは

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - \frac{g}{2v_x^2}(x - x_0)^2 \tag{15}$$

と書けることになる。これが放物曲線 C の方程式であるが、この (15) 式は $(x - x_0)$ の 2 次式の形になっていることに注意する。

さて、もし斜面がなければ P から右には物体はこの C に沿って進むことになるから、もし「P から右は斜面 $y = f(x)$ が C より下って」いれば、物体は斜面から離れて C に沿った放物運動をするだろうし、「C より上がって」いれば、C ではなく斜面に沿っ

て動くことになる。よって、P の近くで $y = f(x)$ と C の方程式 (15) との上下関係を見ることで、P で物体が斜面から離れるかどうかがわかることになる。

(15) は $(x - x_0)$ のテイラー展開の形をしているので、$y = f(x)$ のテイラー展開

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots \tag{16}$$

と比較すれば、最初の 2 項は全く同じであることがわかる。これは、この 2 つの曲線が P で接する (共通の接線を持つ) ことを意味する。よって、P の付近での比較は $(x - x_0)$ の 2 次の項を見ればよく、そこから斜面の方が P の近くで C より上、すなわち離れない条件は

$$\frac{f''(x_0)}{2} > -\frac{g}{2v_x^2} \tag{17}$$

であることがわかる。一方、(13) より $v_y = f'(x_0)v_x$ なので、速さ v は

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1 + (f'(x_0))^2}\, v_x \quad (v_x > 0)$$

となるから、これを (17) に代入すれば、

$$f''(x_0) > -\frac{1 + (f'(x_0))^2}{v^2} g \tag{18}$$

となり、(12) と同じものが得られたことになる。

4 最後に

ジェットコースターで事故が起きたというニュースが以前あったが、ふとそれを思い出し、それが飛び出す条件を考えてみたら、たまたまそれをテイラー展開の応用として解くこともできることがわかったので、何かの参考にと今回まとめてみた次第である。

ジェットコースターには今まで 1 度しか乗ったことがないが、乗っている人からすればスピード感よりも、上に凸の部分 $(f'' < 0)$ でふわっと浮き上がる感覚と、その点でレールが見えなくなるために空中に放り出されたように感じるところがスリリングな

ものだったように覚えている。実際には台車が $N = 0$ になるような設計はされてはいないとは思うが、スリリングを損わないようにすることと安全性のバランスはどれくらいなのだろうかと多少気になる。

また、今回は摩擦なく滑る物体を考えたが、狭いレールの上でビー玉のようなものを転がした場合は違った結果になると思うので、暇なときにでもまた考えてみたい。