2023 年 11 月 16 日

一般二項展開の使い道

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

一般二項展開とは、$(1+x)^\alpha$ のマクローリン展開

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots \quad (|x| < 1) \tag{1}$$

のことである。ここで、この係数は

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n \geq 1) \\ 1 & (n = 0) \end{cases} \tag{2}$$

であり、α が自然数なら ${}_\alpha C_n$ に一致する。

この (1) を用いると、x^α や $(x+p)^\alpha$ のテイラー展開を、微分を使わずにほぼすべて計算できる。

ただし、試験などで「テイラー展開を求めよ」や「マクローリン展開を求めよ」という問題が出されたら、それらの公式を正しく覚えていて使えるか、ということを聞かれているのだろうから、本稿のような計算をせずに定義通りに高階微分の計算をして求めるべきである。

2 平行移動とスケール変換

以下に、x^α, $(x+p)^\alpha$ のテイラー展開を (1) で求める方法について説明する。

まずは、平行移動によりテイラー展開がマクローリン展開に帰着できることを示す。「$f(x)$ の $x=c$ でのテイラー展開」は、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \tag{3}$$

を意味するが、これは $x-c=t$ とすれば、

$$f(t+c)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}t^n \tag{4}$$

となり、「$f(t+c)$ のマクローリン展開」となる。すなわち、「$f(x)$ の $x=c$ でのテイラー展開」は、「$f(t+c)$ のマクローリン展開」に $t=x-c$ を代入して得られることになる。

例えば、$f(x)=x^\alpha$ の $x=c$ $(c\neq 0)$ でのテイラー展開は、$x-c=t$ とすれば $f(t+c)=(t+c)^\alpha$ のマクローリン展開に帰着され、$f(x)=(x+p)^\alpha$ の $x=c$ $(c\neq -p)$ でのテイラー展開は、$x-c=t$ とすれば $f(t+c)=(t+c+p)^\alpha$ のマクローリン展開に帰着される。よって、あとは $(x+p)^\alpha$ $(p\neq 0)$ のマクローリン展開ができればよいことになる。

次はスケール変換であるが、「$f(ax)$ のマクローリン展開」は、

$$\frac{d^n}{dx^n}f(ax)=a^n f^{(n)}(ax)$$

より、

$$f(ax)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}a^n x^n \tag{5}$$

となるが、これは「$f(t)$ のマクローリン展開に $t=ax$ を代入したもの」に等しい。

これを用いると、

$$(x+p)^\alpha=p^\alpha\left(1+\frac{x}{p}\right)^\alpha \tag{6}$$

なので、(5) により、(6) のマクローリン展開は、(1) の x に x/p を代入して p^α 倍すればよいことがわかる。

これで、平行移動とスケール変換と (1) により x^α, $(x+p)^\alpha$ のテイラー展開がすべて得られることになる。

3 具体例

本節で、前節に述べたことの具体例をいくつか紹介する。

例 1

$\sqrt{x}$ の $x=4$ でのテイラー展開

$x-4=t$ とすると、

$$\sqrt{x}=\sqrt{t+4}=2\sqrt{1+\frac{t}{2}}=2\left(1+\frac{t}{2}\right)^{1/2}$$

なので、(1) より

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= 2\left\{\binom{1/2}{0}+\binom{1/2}{1}\frac{t}{2}+\binom{1/2}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^2+\binom{1/2}{3}\left(\frac{t}{2}\right)^3+\cdots\right\}\\ &= 2\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{2}+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}\cdot\frac{t^2}{4}+\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}\cdot\frac{t^3}{8}+\cdots\right\}\\ &= 2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{32}(x-4)^2+\frac{1}{128}(x-4)^3+\cdots\end{aligned}$$

となる。

例 2

$1/(x+5)^2$ の $x=-7$ でのテイラー展開

$x+7=t$ とすると、

$$\frac{1}{(x+5)^2}=\frac{1}{(t-2)^2}=\frac{1}{4(1-t/2)^2}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{-2}$$

なので、(1) より

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(x+5)^2}\\ &= \frac{1}{4}\left\{\binom{-2}{0}+\binom{-2}{1}\left(-\frac{t}{2}\right)+\binom{-2}{2}\left(-\frac{t}{2}\right)^2+\binom{-2}{3}\left(-\frac{t}{2}\right)^3+\cdots\right\}\\ &= \frac{1}{4}\left\{1-2\left(-\frac{t}{2}\right)+\frac{-2(-3)}{2}\cdot\frac{t^2}{4}+\frac{-2(-3)(-4)}{6}\left(-\frac{t^3}{8}\right)+\cdots\right\}\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}(x+7)+\frac{3}{16}(x+7)^2+\frac{1}{8}(x+7)^3+\cdots\end{aligned}$$

となる。

4 近似値の計算

(1) を用いて c^α の近似値の計算をしたい場合は、さらに少し工夫が必要で、(6) の p^α が容易に求まるような p を選ぶ必要があるし、(6) の x/p も 0 に近い方が精度はよくなる。

例えば、$\sqrt{7}$ の近似値を求める場合、

1. $\sqrt{7}=\sqrt{4+3}=2\sqrt{1+\dfrac{3}{4}}$, $3/4=0.75$
2. $\sqrt{7}=\sqrt{9-2}=3\sqrt{1-\dfrac{2}{9}}$, $2/9=0.22\ldots$
3. $\sqrt{7}=\sqrt{\dfrac{28}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{25+3}=\dfrac{5}{2}\sqrt{1+\dfrac{3}{25}}$, $3/25=0.12$

など、(1) に帰着させる変形は無数にあるが、例えばこの中では 3. を使うのが精度は一番よい。例えば、2 次近似

$$(1+x)^{1/2}=\binom{1/2}{0}+\binom{1/2}{1}x+\binom{1/2}{2}x^2+\cdots=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots$$

を用いると、1. は、

$$\sqrt{7}\fallingdotseq 2\left(1+\frac{3}{8}-\frac{9}{128}\right)=2+\frac{3}{4}-\frac{9}{64}=2+0.75-0.140625=2.609375$$

2. は、

$$\sqrt{7}\fallingdotseq 3\left(1-\frac{1}{9}-\frac{1}{162}\right)=3-\frac{1}{3}-\frac{1}{54}=3-\frac{19}{54}=2.648148\cdots$$

3. は、

$$\sqrt{7}\fallingdotseq \frac{5}{2}\left(1+\frac{3}{50}-\frac{9}{5000}\right)=\frac{5}{2}+\frac{15}{100}-\frac{45}{10000}=2.5+0.15-0.0045=2.6455$$

となる。$\sqrt{7}$ の真値は $2.6457513\cdots$ なので、3. が一番近いことがわかる。