2007 年 8 月 6 日

n 次元球の体積について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

ここでは、解析学のあちこちで顔を出す「n 次元球の体積」を求めてみる。ただし、いわゆる厳密なやり方では計算が煩雑になるので、本稿では多少いいかげんな考察で多少手を抜いて考えることにする。

2 n 次元球

まず、「n 次元球」とは何であるかを述べておく。

n 次元球とは、n 次元ユークリッド空間

$$R^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ は実数}\}$$

内の部分集合であり、中心が $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$、半径 r (> 0) の n 次元球 $B_r(\boldsymbol{a})$ は、

$$B_r(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n);\ (x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 \leq r^2\} \tag{1}$$

と定義される。$n = 2$ なら、

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2$$

なので、(x_1, x_2) 座標に対する 2 次元の円、$n = 3$ なら、

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 \leq r^2$$

なので、(x_1, x_2, x_3) 座標に対する 3 次元の球となり、(1) はそれらの自然な n 次元への拡張になっていることがわかるだろう。

n 次元空間における立体の体積を測る元になるのは n 次元直方体

$$\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n);\ a_1 \leq x_1 \leq b_1,\ a_2 \leq x_2 \leq b_2, \ldots, a_n \leq x_n \leq b_n\} \tag{2}$$

の体積であり、それは、

$$(b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_n - a_n) \tag{3}$$

と定められる。$n = 2$ のときは、(2) は長方形、(3) はその面積、$n = 3$ のときは、(2) は直方体、(3) はその体積を意味していて、よって、(2), (3) はそれらの自然な拡張になっている。

球のように曲っている図形の体積は、大学における積分の定義と同様に、厳密にはこの直方体を無限に埋めつくす形、あるいは多重積分によって定義し、その多重積分を計算するのが普通の方法なのであるが、ここではそのあたりを多少いいかげんに考えることにする。

まず、容易に示されるように直方体は平行移動しても体積は変わらないので、他の図形の体積もその性質を持つ。よって、$B_r(\boldsymbol{a})$ の体積は、$B_r(\mathbf{0})$ ($\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$) の体積に等しいことに注意する。

また、直方体をすべての軸方向に p (> 0) 倍すると、直方体 (2) は、

$$\begin{aligned}&\{\boldsymbol{x};\ a_1 \leq x_1/p \leq b_1, \ldots, a_n \leq x_n/p \leq b_n\}\\ &\quad = \{\boldsymbol{x};\ a_1 p \leq x_1 \leq b_1 p, \ldots, a_n p \leq x_n \leq b_n p\}\end{aligned}$$

となるので、その体積は

$$(b_1 p - a_1 p) \times \cdots \times (b_n p - a_n p) = p^n (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_n - a_n)$$

となるので、元の直方体の p^n 倍となり、これは他の図形でも同様である。

例えば、n 次元球の場合、

$$B_r(\mathbf{0}) = \{\boldsymbol{x};\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2\} = \{\boldsymbol{x};\ (x_1/r)^2 + \cdots + (x_n/r)^2 \leq 1\}$$

であるので、これは半径 1 の球 $B_1(\mathbf{0})$ をすべての軸方向に r 倍したものになっている。よって、$B_r(\mathbf{0})$ の体積 ($= B_r(\boldsymbol{a})$ の体積) を $V_n(r)$ と書くことにすると、上の考察により、

$$V_n(r) = V_n(1)r^n$$

となるので、$\alpha_n = V_n(1)$ と書けば、

$$V_n(r) = \alpha_n r^n \tag{4}$$

となることになる。よって、この α_n、すなわち $B_1(\mathbf{0})$ の体積を n の式で表せばよい。

3 断面の積分

直方体の体積 (3) は、$(n-1)$ 次元の直方体

$$\{(x_1,\ldots,x_{n-1});\ a_1 \leq x_1 \leq b_1,\ldots,a_{n-1} \leq x_{n-1} \leq b_{n-1}\}$$

の体積

$$(b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_{n-1} - a_{n-1})$$

に $(b_n - a_n)$ をかけたものになっている (3 次元の柱体の体積が (底面積)×(高さ) となることと同じ)。

曲がった図形の場合は、もちろん単に高さをかけるわけにはいかず、そこが積分となるわけであるが、その原理は、

> 「体積は、$x_n = t$ による切り口の図形の $(n-1)$ 次元の体積を、t に関して端から端まで積分したもの」

である。これは、3 次元の体積 V を求める公式が、その立体を $x = t$ で切った切り口の断面積 $S(t)$ $(a \leq t \leq b)$ によって、

$$V = \int_a^b S(t)dt \tag{5}$$

と書けることに対応する。

n 次元球の場合、$x_n = t$ による $B_1(\mathbf{0})$

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1$$

の切り口の図形は、

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1 - t^2$$

となり、これは半径が $\sqrt{1-t^2}$ $(-1 \leq t \leq 1)$ の $(n-1)$ 次元球を意味する。よって、その $(n-1)$ 次元の体積は、(4) により、

$$V_{n-1}(\sqrt{1-t^2}) = \alpha_{n-1}(\sqrt{1-t^2})^{n-1}$$

となる。よって、(5) により、

$$V_n(1) = \int_{-1}^{1} V_{n-1}(\sqrt{1-t^2})dt$$

すなわち、

$$\alpha_n = \int_{-1}^{1} \alpha_{n-1}(1-t^2)^{(n-1)/2}dt \tag{6}$$

となることになる。

$$I_n = \int_{0}^{1} (1-t^2)^{(n-1)/2}dt \tag{7}$$

と書くことにすれば、(6) は、

$$\alpha_n = 2\alpha_{n-1}I_n \tag{8}$$

となる。

例えば α_2 は、半径 1 の 2 次元の円の面積を意味するので、$\alpha_2 = \pi$ となる。よって、$n \geq 3$ に対する積分 I_n の値が求まれば、(8) によって α_n $(n \geq 3)$ が順に求まることになる。

4 積分 (7) の計算

積分 (7) の計算は、右辺を $t = \sin\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ と置換すると、

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\theta)^{(n-1)/2} \cos\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^n\theta d\theta$$

となる。今 $n \geq 2$ に対して、

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}\theta \cos\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}\theta (\sin\theta)' d\theta$$

として部分積分する。合成関数の微分により、

$$\begin{aligned}
(\cos^{n-1}\theta)' &= \frac{du^{n-1}}{d\theta} \quad (u = \cos\theta) \\
&= \frac{du^{n-1}}{du}\frac{du}{d\theta} = (n-1)u^{n-2}(-\sin\theta) \\
&= -(n-1)\cos^{n-2}\theta\sin\theta
\end{aligned}$$

なので、部分積分により、

$$\begin{aligned}
I_n &= \Big[\cos^{n-1}\theta\sin\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\cos^{n-1}\theta)' \sin\theta d\theta \\
&= 0^{n-1}\cdot 1 - 1\cdot 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta \sin^2\theta d\theta \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta (1 - \cos^2\theta) d\theta \\
&= (n-1)\left\{\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos^n\theta d\theta\right\} \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

となり、よって移行すれば $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ となるので、

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2) \tag{9}$$

となることがわかる。ここで、

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 d\theta = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = [\sin\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = 1$$

であるから、(9) により、

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2} \times I_0 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}, \\
I_3 &= \frac{2}{3} \times I_1 = \frac{2}{3} \times 1, \\
I_4 &= \frac{3}{4} \times I_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}, \\
I_5 &= \frac{4}{5} \times I_3 = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 1
\end{aligned}
$$

のようになり、よってこれを続けると、

$$
\begin{cases}
I_{2n} = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4 \cdot 2} \times \dfrac{\pi}{2} \\
I_{2n+1} = \dfrac{2n(2n-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5 \cdot 3} \times 1
\end{cases}
\tag{10}
$$

となることがわかる。

5 半径 1 の球の体積の計算

この節では、α_n (= 半径 1 の球の体積) を計算する。これまで、α_n は $n \geq 2$ で考えていたが、(8) が $n = 2, n = 1$ でも成り立つように、α_1, α_0 を

$$
\alpha_2 = 2\alpha_1 I_2, \quad \alpha_1 = 2\alpha_0 I_1
$$

を満たすように決めることにすると、

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\alpha_2}{2I_2} = \frac{\pi}{2 \times \pi/4} = 2, \\
\alpha_0 &= \frac{\alpha_1}{2I_1} = \frac{2}{2 \times 1} = 1
\end{aligned}
$$

となり、このようにすれば (8) は $n \geq 1$ に対して成り立つことになる。

よって、(8) から α_n を帰納的に求めてみると、

$$\begin{aligned}\alpha_n &= 2I_n\alpha_{n-1} = (2I_n)(2I_{n-1})\alpha_{n-2} = \cdots \\ &= (2I_n)(2I_{n-1})\cdots(2I_1)\alpha_0\end{aligned}$$

となるので、結局

$$\alpha_n = 2^n I_n I_{n-1}\cdots I_1 \tag{11}$$

と書けることになる。ここで (10) より容易に、

$$I_{2n}I_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\times\frac{\pi}{2},\quad I_{2n-1}I_{2n} = \frac{1}{2n}\times\frac{\pi}{2}$$

であることがわかり、よっていずれにしても

$$I_n I_{n-1} = \frac{1}{n}\times\frac{\pi}{2} \tag{12}$$

が成り立つ。これにより、(11) の右辺を 2 つずつまとめて考えればよいので、n が偶数の場合と奇数の場合に分けて考えると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}\alpha_{2m} &= 2^{2m}(I_{2m}I_{2m-1})(I_{2m-2}I_{2m-3})\cdots(I_2I_1) \\ &= 2^{2m}\left(\frac{1}{2m}\,\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2m-2}\,\frac{\pi}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{2^m\pi^m}{2\cdot4\cdot6\cdots(2m)} \qquad (13) \\ \alpha_{2m+1} &= 2^{2m+1}(I_{2m+1}I_{2m})(I_{2m-1}I_{2m-2})\cdots(I_3I_2)I_1 \\ &= 2^{2m+1}\left(\frac{1}{2m+1}\,\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2m-1}\,\frac{\pi}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{3}\,\frac{\pi}{2}\right)\cdot I_1 \\ &= \frac{2^{m+1}\pi^m}{1\cdot3\cdot5\cdots(2m+1)} \qquad (14)\end{aligned}$$

そしてこの α_n に対し、$V_n(r) = \alpha_n r^n$ となることになる。

6 球の表面積

ついでに、n 次元球の球面

$$\{\boldsymbol{x};\ x_1^2+\cdots+x_n^2=r^2\}$$

の面積 $S_n(r)$ は、

$$\frac{d}{dr}V_n(r)=S_n(r),\quad \int_0^r S_n(t)dt=V_n(r)$$

であることが言える (ちゃんとした説明は、$n>3$ の場合は少し面倒)。

よって、

$$S_n(r)=n\alpha_n r^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{2^m\pi^m r^{2m-1}}{2\cdot 4\cdots(2m-2)} & (n=2m),\\ \dfrac{2^{m+1}\pi^m r^{2m}}{1\cdot 3\cdots(2m-1)} & (n=2m+1)\end{cases}$$

となる ($m\geq 1$)。

例えば、4 次元球では体積、表面積は

$$V_4(r)=\frac{2^2\cdot\pi^2}{2\cdot 4}r^4=\frac{\pi^2}{2}r^4,\quad S_4(r)=2\pi^2r^3$$

5 次元球では、

$$V_5(r)=\frac{2^3\cdot\pi^2}{1\cdot 3\cdot 5}r^5=\frac{8\pi^2}{15}r^5,\quad S_5(r)=\frac{8\pi^2}{3}r^4$$

のようになる。

7 最後に

$V_n(r)$, $S_n(r)$ は、通常は、

$$V_n(r)\ =\ \iint\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_n^2\leq r^2}dx_1\cdots dx_n,$$

$$
\begin{aligned}
S_n(r) &= \iint\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\leq r^2}\sqrt{1+f_{x_1}^2+\cdots+f_{x_{n-1}}^2}dx_1\cdots dx_{n-1},\\
&\quad (f=\sqrt{r^2-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2})
\end{aligned}
$$

を計算する、といった多重積分の演習問題として目にすることが多い。もちろん、厳密にはそのように導入するのが自然であるが、これらの計算はかなり煩雑であり、かつ大変であるので、ここでは対称性を利用してだいぶごまかしたような説明を行ってみた。ここでは部分積分も使用しているし、断面積の積分による体積の公式も出てくるので、一変数の積分の応用としても意味があるようにも思う。