2009 年 01 月 18 日

勾配から角度を求める展開式

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

以前、大学院生から次のような質問をされたことがある。

> マイコンに勾配 (タンジェント) の値からその角度を求めるプログラムを載せようと思っているが、$\arctan x$ (アークタンジェント) のマクローリン展開を使うと誤差が大きくなってしまうのだがどうしたらよいか。

元々マクローリン展開は $x = 0$ での展開式なので $|x|$ の値が大きい場合はその誤差が大きくなってしまう。しかしうまく工夫すれば、そのマクローリン展開でも、ある程度の精度で計算することができる。ここではその方法を紹介する。

なお、本稿の内容は数値計算分野ではよく知られていることであり (例えば [1] p41「逆三角関数」の項を参照)、他の関数の内容も含め、詳しい話はそれらの本を参照して欲しい。

2 アークタンジェントの展開式

まず、アークタンジェントのマクローリン展開式を紹介する。なお、タンジェントの逆関数であるアークタンジェントは、$\arctan x$ や $\tan^{-1} x$ と書かれることもあるが、本稿では統一して $\arctan x$ と書くことにする。

またマクローリン展開式も、定義通りの微分による計算では規則性を見出すのが難しいので、ここでは別な方法で求めることにする。

無限等比数列の和の公式

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots \quad (|r| < 1)$$

で $r = -t^2$ $(|t| < 1)$ とすると

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots \quad (|t| < 1)$$

が成り立つ。これを、$|x| < 1$ である x に対し 0 から x まで積分すると、

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (|x| < 1) \tag{1}$$

となる。これが $\arctan x$ のマクローリン展開である。

3 正の勾配への帰着

本稿では、

$$\tan\theta = H \tag{2}$$

を満たす θ $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ を求めることを考えることとする。もちろん (2) は、

$$\arctan H = \theta \tag{3}$$

と書くこともできるので、これに (1) の展開式を用いれば良さそうであるが、(1) は $|H| < 1$ でないと使えないし、$|H|$ が 1 より小さくても 1 に近い場合は (1) は誤差が大きく、精度を上げるにはかなり多くの項を取らなければいけない。よって本稿では、三角関数の性質を用いることで、この (1) をそれなりに小さな x に対して用いれば済むようにすることを考えていく。

まず、正の勾配に帰着させることを考えよう。もし、$H < 0$ であれば、$-H = H_1$ に対して

$$\theta_1 = \arctan H_1$$

を求めれば、

$$\tan\theta = H = -H_1 = -\tan\theta_1 = \tan(-\theta_1)$$

より $\theta = -\theta_1$ と求めることができるので、アークタンジェントは 0 以上の勾配のみに対して使えばいいことになる。言いかえれば、$H < 0$ の場合は、

$$\theta = \arctan H = -\arctan(-H)$$

として求めれば良いことになる。

4 1 以下の勾配への帰着

次に、1 以下の H に帰着させることを考える。そのためには、公式

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{1}{\tan\phi} \tag{4}$$

や、$\tan$ の加法定理

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}, \quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \tag{5}$$

を用いる。公式 (4) は

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{\sin(\pi/2-\phi)}{\cos(\pi/2-\phi)} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} = \frac{1}{\tan\phi}$$

より得られるし、また $\tan$ の加法定理は、$\sin, \cos$ の加法定理から以下のようにして容易に得られる。

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}$$

(4) より、$0 < \theta < \pi/2$ に対して $(H > 0)$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{H}$$

であるから、

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \arctan\frac{1}{H} \tag{6}$$

と求められることになる。すなわち、$H > 0$ のときは (3) と (6) のどちらを用いても H から θ を求めることができるので、H と $1/H$ の小さい方を使って求めればよいことになる。

よって、$H > 1$ ならば、$H_2 = 1/H(< 1)$ に対して

$$\theta_2 = \arctan H_2$$

とすれば、$\theta = \pi/2 - \theta_2$ として求められるし、$H \leq 1$ ならそのまま (3) で求めることにすれば、これで、$\arctan H$ の計算はどちらにしても $0 \leq H \leq 1$ の場合に帰着されることになる。そしてこの場合は θ は $0 \leq \theta \leq \pi/4$ となる。

5 より小さい勾配への帰着

3 節で述べたように、H が 1 以下というだけではまだ不十分なので、より小さな H に帰着させることを考える。

4 節と同様にして、次は $\tan(\pi/4 - \theta)$ を考える。加法定理 (5) により、

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{\tan(\pi/4) - \tan\theta}{1 + \tan(\pi/4)\tan\theta} = \frac{1 - H}{1 + H}$$

なので、

$$\frac{\pi}{4} - \theta = \arctan\frac{1 - H}{1 + H} \tag{7}$$

が得られる。よって、今度は H と $(1-H)/(1+H)$ の小さい方を使えることになる。

$(1-H)/(1+H)$ は $0 \leq H \leq 1$ に対して 1 から 0 に単調減少し、

$$H = \frac{1-H}{1+H}$$

となる H はこの範囲では $H = \sqrt{2}-1$ のみである。よって、

$$\begin{aligned} 0 \leq H < \sqrt{2}-1 \quad &\Rightarrow H < \sqrt{2}-1 < \frac{1-H}{1+H}, \\ \sqrt{2}-1 < H \leq 1 \quad &\Rightarrow H > \sqrt{2}-1 > \frac{1-H}{1+H} \end{aligned}$$

となり、$H = \sqrt{2}-1$ を境に分かれることになる。なお、丁度 $H = \sqrt{2}-1$ のときは、$\pi/4 - \theta = \theta$ であり、よって $\theta = \pi/8$ となる。

結局、$\sqrt{2}-1 < H \leq 1$ のときは、

$$H_3 = \frac{1-H}{1+H}$$

に対して

$$\theta_3 = \arctan H_3$$

とすれば $\theta = \pi/4 - \theta_3$ と求めることができるので、これで $\arctan H$ の計算は $0 \leq H \leq \sqrt{2}-1 \approx 0.414$ の場合に帰着されることになる。

なお、実際のプログラムでは、H と $\sqrt{2}-1$ とを比較する代わりに H と $(1-H)/(1+H)$ とを比較するようにすれば、$\sqrt{2}$ のような無理数の値を保持しておく必要はなくなる。

ここまでの考察によって、$\arctan$ の展開式 (1) は $0 \leq H \leq \sqrt{2}-1$ に対して使えばいいことになるので、例えば (1) の最初の 4 項

$$\arctan x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$$

を使うのであれば、その誤差はその次の項 $x^9/9$ にほぼ等しく、よってその最大誤差は

$$\frac{\tan^9(\pi/8)}{9} = \frac{(\sqrt{2}-1)^9}{9} \approx 4.0 \times 10^{-5} \tag{8}$$

程度ということになる。

6 さらに進めた場合

5 節で述べた、$0 \leq H \leq \sqrt{2}-1$ に帰着させる方法は、まさに [1] の p41「逆三角関数」の項に書かれている内容であるが、これをさらにもう一段進めるとどうなるであろうか。

5 節の条件は $0 \leq H \leq \sqrt{2}-1$ $(0 \leq \theta \leq \pi/8)$ であるので、$\tan(\pi/8) = \sqrt{2}-1$ と加法定理 (5) を使えば、

$$\tan\left(\frac{\pi}{8} - \theta\right) = \frac{\tan(\pi/8) - \tan\theta}{1 + \tan(\pi/8)\tan\theta} = \frac{\sqrt{2}-1-H}{1+(\sqrt{2}-1)H}$$

であるから、例えば $A = \sqrt{2}-1 \approx 0.41421$ という定数を (必要な精度で) 保持しておけば、H と $H_4 = (A-H)/(1+AH)$ を比較し、H_4 の方が小さい場合、すなわち $H > \tan(\pi/16)$ の場合 $(\theta > \pi/16)$ は、

$$\theta_4 = \arctan H_4$$

として θ_4 を求めて $\theta = \pi/8 - \theta_4$ とすればよいので、これで $0 \leq H \leq \tan(\pi/16)$ に帰着されることになる。この $\tan(\pi/16)$ の値は、tan の半角の公式

$$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{\sin\phi}{1+\cos\phi} = \frac{\tan\phi}{\sqrt{\tan^2\phi+1}+1} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}\right) \tag{9}$$

を用いれば、

$$\tan\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}+1} = 0.1989\ldots$$

となるが、この二重根号は解消できないようである。これに対する最大誤差は

$$\frac{\tan^9(\pi/16)}{9} \approx 5.4 \times 10^{-8} \tag{10}$$

なので、(8) より 3 桁ほど精度は上がることになる。

これと同等の精度を、この節の方法でなはく近似和の項数を増やすことで出そうとすると、5 節の $0 \le H \le \sqrt{2}-1$ の範囲での最大誤差は

$$\frac{\tan^{15}(\pi/8)}{15} \approx 1.2 \times 10^{-7}, \quad \frac{\tan^{17}(\pi/8)}{17} \approx 1.8 \times 10^{-8}$$

なので、7 項目までの和では足りず、8 項目まで加えることでようやく本節の方法の精度を超えることになる。ただし、実際にどちらが楽なのかは、それを計算する環境にもよるだろうから一概にどちらとは断定できない。

なお、この節の方法は、$A = \sqrt{2}-1$ の値を定数として保持していればよいだけなので平方根の計算をコンピュータで行う必要はない。

7 半角の公式を利用する方法

$0 \le H \le \tan(\pi/4)$ を $0 \le H \le \tan(\pi/8)$ に帰着させるのに、5 節では $\tan(\pi/4-\theta)$ の加法定理を用いて $\theta = \pi/4 - \theta_3$ を考えたが、その代わりに半角の公式 (9) を利用するという方法も考えられる。

つまり、$\theta_5 = \theta/2$ に対して、

$$H_5 = \tan\theta_5 = \tan\frac{\theta}{2} = \frac{H}{\sqrt{H^2+1}+1}$$

であるから、$H > \tan(\pi/8) = \sqrt{2}-1$ $(\theta > \pi/8)$ のときは H からこの式により H_5 を求め、

$$\theta_5 = \arctan H_5$$

として $\theta = 2\theta_5$ と求める方法である。この場合も $H_5 \le \tan(\pi/8)$ となってくれるので 5 節と同等の誤差が期待できるのであるが、しかしこの H_5 の計算には H^2+1 の平方根が含まれてしまう。元の問題に戻れば、そのマイコンに任意の正の実数の平方根を計算する機能がそなわっていない場合には、この方法が使えないことになる。つまり、半角の公式を用いる方法はそのような目的にはふさわしくない可能性がある。

8 最後に

1 節に書いた質問をしてきた院生には、そのときはやや大雑把に説明したような気がしている。実際、その後アークタンジェントのマクローリン展開を使うことをあきらめて、別な方法を使うと言っていたように思うが、そのときこのような文書をちゃんと書いてあげていればもう少し検討してもらえたのかもしれない。

ただ、マイコンに載せることができるプログラムのステップ数には制限がある、行える計算にもかなり制限がある、とも言っていたので、多少の場合分けと多少の変数を必要とするような本稿の方法は実際には彼の環境には適さなかったかもしれない。

今後、他の同様の需要がある人の参考になれば、と思う。

参考文献

[1] 奥村晴彦「C 言語による最新アルゴリズム事典」技術評論社 (1991)