2022 年 10 月 14 日

逆三角関数の性質

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

講義では、逆三角関数について基本的なことを紹介したが、講義で取り上げなかった性質を本稿でいくつか紹介する。

- $\cos^{-1} y + \sin^{-1} y = \dfrac{\pi}{2} \quad (-1 \le y \le 1)$

証明:

$-1 \le y \le 1$ に対し $\alpha = \cos^{-1} y$, $\beta = \sin^{-1} y$ とすると、$\cos\alpha = y$, $0 \le \alpha \le \pi$, $\sin\beta = y$, $-\pi/2 \le \beta \le \pi/2$ なので、

$$y = \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\beta$$

となり、$0 \le \alpha \le \pi$ より $-\pi/2 \le \pi/2 - \alpha \le \pi/2$ だから $\pi/2 - \alpha = \beta$ となる。よって $\pi/2 - \cos^{-1} y = \sin^{-1} y$ (証明おわり)

証明からもわかるが、これは、ほぼ $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta$ という性質を逆三角関数の言葉で表したものである。

また、これはグラフからも容易にわかる。それは、$\theta = \cos^{-1} y$ のグラフは、$\theta = \sin^{-1} y$ のグラフを上下反転させて、$\pi/2$ だけ上にあげたグラフとなっているからである。

- $\sin^{-1} y$, $\tan^{-1} y$ は奇関数

これは、$\theta = \sin^{-1} y$, $\theta = \tan^{-1} y$ のグラフが原点対称になっていることからわかる。だから、負の y に対するこれらの値は、例えば

$$\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$$

のように求めることもできる。

一方、$y=\cos\theta$ は偶関数、すなわち y 軸に関してグラフが対称だが、$\theta=\cos^{-1}y$ は偶関数でも奇関数でもない。

- $\sin^{-1}\sqrt{1-y^2}=\cos^{-1}y \quad (0\le y\le 1)$
- $\cos^{-1}\sqrt{1-y^2}=\sin^{-1}y \quad (0\le y\le 1)$

証明:

$0\le y\le 1$ に対し $\theta=\sin^{-1}\sqrt{1-y^2}$ とすると、$\sqrt{1-y^2}\ge 0$ より $0\le\theta\le\pi/2$ で、

$$\sin\theta=\sqrt{1-y^2},\quad y^2=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$$

となり、$y\ge 0, \cos\theta\ge 0$ より $y=\cos\theta$ となるから、$0\le\theta\le\pi/2$ より $\theta=\cos^{-1}y$ となる。後者も同様。(証明おわり)

これは、証明からもわかるが、ほぼ $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ を逆三角関数の言葉で表したものである。

- $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)=\tan^{-1}y \quad (y\ge 0)$

証明:

$y\ge 0$ に対し $\theta=\cos^{-1}(1/\sqrt{1+y^2})$ とすると、$\cos\theta=1/\sqrt{1+y^2}>0$, $0\le\theta<\pi/2$ となる。よって、

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}},\quad y^2=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\tan^2\theta$$

となり、$y\ge 0, \tan\theta\ge 0$ より $y=\tan\theta$, よって $\theta=\tan^{-1}y$ となる。(証明おわり)

これは、$\cos^2\theta=1/(1+\tan^2\theta)$ を逆三角関数で表現したもの。

- $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}\right)=\cos^{-1}y \quad (y\ge 0)$

- $\sin^{-1}\left(\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = \tan^{-1} y$
- $\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right) = \sin^{-1} y$

これらもひとつ前のものとほぼ同様で、証明は省略するが、それぞれ、

$$\tan^2\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}, \quad \tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}, \quad \sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

を逆三角関数で表現したものである。

- $\tan^{-1} y + \tan^{-1}\dfrac{1}{y} = \dfrac{\pi}{2} \qquad (y > 0)$
- $\tan^{-1} y + \tan^{-1}\dfrac{1}{y} = -\dfrac{\pi}{2} \qquad (y < 0)$

証明:

$y > 0$ に対し $\theta = \tan^{-1}(1/y)$ とすると、$1/y = \tan\theta$, $0 < \theta < \pi/2$ となる。ここで、

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin(\pi/2-\theta)}{\cos(\pi/2-\theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta} = y$$

となるので、$0 < \pi/2 - \theta < \pi/2$ より

$$\tan^{-1} y = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{1}{y}$$

となる。

一方、$y < 0$ に対し $\theta = \tan^{-1}(1/y)$ とすると、$-\pi/2 < \theta < 0$ なので、

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - \theta < 0$$

となり、よって

$$\tan^{-1} y = -\frac{\pi}{2} - \theta = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{1}{y}$$

となる。(証明おわり)

これらも、ほぼ $\tan(\pi/2-\theta)=1/\tan\theta$ を逆三角関数に読み替えたもの。

次は加法定理から得られるものを紹介する。

- $\cos^{-1}(2y^2-1)=2\cos^{-1}y \quad (0\le y\le 1)$
- $\cos^{-1}(1-2y^2)=2\sin^{-1}y \quad (0\le y\le 1)$

証明:

$0\le y\le 1$ に対し $\theta=\cos^{-1}y$ とすると $y=\cos\theta,\ 0\le\theta\le\pi/2$ で、$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2y^2-1$ となるが、$0\le 2\theta\le\pi,\ -1\le 2y^2-1\le 1$ なので、$2\theta=\cos^{-1}(2y^2-1)$ となる。

後者も同様。(証明おわり)

これらは、倍角の公式 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$ を逆三角関数に読み替えたもの。

- $\cos^{-1}(4y^3-3y)=3\cos^{-1}y \quad (1/2\le y\le 1)$
- $\sin^{-1}(3y-4y^3)=3\sin^{-1}y \quad (-1/2\le y\le 1/2)$

証明:

まず $4y^3-3y$ が $1/2\le y\le 1$ では -1 から 1 に単調増加することに注意する ($(4y^3-3y)'=3(4y^2-1)$ から容易にわかる)。よって、$\theta=\cos^{-1}y$ とすると $\cos\theta=y$ で、$0\le\theta\le\pi/3$ となる。このとき、$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\sin\theta=4y^3-3y$ となり、$0\le 3\theta\le\pi,\ -1\le 4y^3-3y\le 1$ なので、$3\theta=\cos^{-1}(4y^3-3y)$ となる。

後者も、$3y-4y^3$ が $-1/2\le y\le 1/2$ では -1 から 1 に単調増加することからほぼ同様に示される。(証明おわり)

これは、三倍角の公式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,\ \sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ を逆三角関数に読み替えたもの。

ちなみに、$-1\le 4y^3-3y\le 1$ は $-1\le y\le 1$ で成り立つが、角の範囲が変わるので、例えば前者は、$-1/2\le y\le 1/2$ の場合は、$\pi/3\le\theta\le 2\pi/3$ より $\pi\le 3\theta\le 2\pi$ となってしまうので、$\cos 3\theta=\cos(2\pi-3\theta)$ から、また $-1\le y\le -1/2$ の場合は、$2\pi/3\le\theta\le\pi$ より $2\pi\le 3\theta\le 3\pi$ となってしまうので、$\cos 3\theta=\cos(3\theta-2\pi)$ から、

- $\cos^{-1}(4y^3-3y) = 2\pi - 3\cos^{-1} y \quad (-1/2 \le y \le 1/2)$
- $\cos^{-1}(4y^3-3y) = 3\cos^{-1} y - 2\pi \quad (-1 \le y \le -1/2)$

のように変わる。$\sin^{-1}$ の方も同様である。

tan は加法定理が tan だけで表されるので、倍角の公式でなくても加法定理から直接次の公式が得られる。

- $\tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \tan^{-1}\left(\dfrac{y+z}{1-yz}\right) + r$
  ただし r は $0, \pi, -\pi$ のいずれかで、(左辺) $- r$ が $(-\pi/2, \pi/2)$ に入るように選ぶ。

これは、加法定理 $\tan(\alpha+\beta) = (\tan\alpha + \tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$ から容易に得られる。