2008 年 07 月 26 日

サラス–関の方法の拡張について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

2 次、3 次の行列式には、いわゆるサラス–関 の計算法、すなわち斜めに成分をかけるという計算方法があるが、4 次以上の行列には一般にそのような計算方法はなく、ある行や列に関して展開する、あるいはその前に基本変形を行う、といった方法が普通である。

しかし、4 次に関しては、行の入れかえを行った 3 枚の配置を考えることにより、サラス–関の方法に準ずる計算法が使えることを [1] で紹介した。5 次以上になると、これと同等の方法では項の数や積の計算がだいぶ多いので、むしろ基本変形を利用する方が楽なのであるが、本稿では、[1] を拡張して 5 次以上の行列式をサラス–積の方法に準ずる計算法を考察してみることにする。

2 4 次の行列式

この節では、[1] で説明している 4 次の行列式の計算方法を紹介する。

$$A = [a_{i,j}] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}$$

とする。なお、本稿ではこのように行列の成分の 2 重の添え字を ‘,’ で区切って書くことにする。

1. まず、3 次の行列式に対するサラス–関の方法と同じように、斜めに 4 つずつかけてできる 8 項を作る。ただし、3 次の場合とは違い、対角成分の積

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}$$

には $+$ を、その一つ下の斜めの積

$$a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3}a_{1,4}$$

には $-$ を、という具合にこちらの方向の積の 4 項には入れ違いに $+, -$ をつける。右上から左下の方向の斜めの積も、対角線の積

$$a_{1,4}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1}$$

には $+$、その下には順に $-, +, -$ を付ける。それらを加えたものをまず $I_4 = I_4(A)$ とする:

$$\begin{aligned} I_4(A) \quad = \quad & +a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4} - a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3}a_{1,4} \\ & + a_{3,1}a_{4,2}a_{1,3}a_{2,4} - a_{4,1}a_{1,2}a_{2,3}a_{3,4} \\ & + a_{1,4}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1} - a_{2,4}a_{3,3}a_{4,2}a_{1,1} \\ & + a_{3,4}a_{4,3}a_{1,2}a_{2,1} - a_{4,4}a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \end{aligned} \tag{1}$$

2. A の 2 行目を 4 行目に降ろし、3, 4 行目をひとつずつ上げて 2, 3 行目にした行列 A' を考える:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \end{bmatrix}$$

これに対して 1. と同じ計算を行う $(= I_4(A'))$。

3. A' に対し、2 と同じ操作を行った行列 A'' に対し、1. と同じ計算を行う $(= I_4(A''))$:

$$A'' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}$$

4. 結果として、これら 3 つの和が $|A|$ となる:

$$|A| = I_4(A) + I_4(A') + I_4(A'') \tag{2}$$

という方法である。

サラス–関と同様の計算である $I_4(A)$ だけでは 8 項しか項が得られないが、4 次の行列式には $4! = 24$ 項が必要で、同じ行、同じ列に入らない 4 つの要素のすべての組を作るためにこのような行の入れかえを行っている。

ただし、3 次の場合とは符号のつけ方も大きく違っていて、3 次の場合は、左上から右下への積は全部 $+$、右上から左下への積は全部 $-$ であるが、4 次の場合は、左上から右下への積には $+$ と $-$ が交互に現れ、右上から左下への積も同じ形で符号をつける形になっている。

この符号に関する話は後で考察するとして、まず先に行の入れ替えですべての項を重なりなく作る方法について考えることにする。

3 順列に関する用語と補題

この節では、本稿で必要となる順列の用語、それに関する補題などを紹介する。

まず、行列式の定義を紹介するが、行列式の定義は、置換群を用いて紹介する流儀もある。しかし、本稿では線形代数の教科書 [2] に書かれている定義や用語にできるだけ従うため、(置換と 1 対 1 に対応するのであるが) 順列 を用いて行列式の定義を行うことにする。

n 次の正方行列 $A = [a_{i,j}]$ に対して、その行列式は、次のように定義される:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \cdots a_{n,\sigma_n} \tag{3}$$

ここで、S_n は $\{1, 2, \ldots, n\}$ のすべての順列 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ からなる集合 (要素数 $n!$ 個) で、(3) はそのすべてにわたる和である。$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は、順列 σ から一意に決まる値で、$+1$ か -1 の値を取る関数であり (順列 σ の 符号 と呼ばれる)、その定義は 5 節で行う。

これらにより、この (3) は、A の要素のうちすべてが異なる行、異なる列に入る n 個の要素を取り出し、その積

$$a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \cdots a_{n,\sigma_n}$$

を作り、それに適当に符号をつけたものを加え合わせることを意味している。

一方、良く知られているように

$$|A| = |{}^tA| \tag{4}$$

が成り立つので、よって (3) を $|{}^tA|$ について書けば

$$|A| = |{}^tA| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma_1,1} a_{\sigma_2,2} \cdots a_{\sigma_n,n} \tag{5}$$

となる。

もちろん本来は、順列の 逆対応 $\sigma^{-1} = (\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \ldots, \sigma_n^{-1}) \in S_n$:

$$\sigma_j^{-1} = i \Leftrightarrow \sigma_i = j$$

によって σ と σ^{-1} が 1 対 1 に対応し、

$$a_{\sigma_1,1} a_{\sigma_2,2} \cdots a_{\sigma_n,n} = a_{1,\sigma_1^{-1}} a_{2,\sigma_2^{-1}} \cdots a_{n,\sigma_n^{-1}}$$

であり、また、

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \tag{6}$$

も成り立つので、そこから逆に $|A| = |{}^tA|$ が成り立つことが示されるのであるが、ここでは逆に $|A| = |{}^tA|$ を利用して、(5) を計算法の考察のために用いることにする。

この節では、まずこの行列式を生成するための順列について考察し、2,3 の補題を示すことにする。

まず、順列のうち、$(1, 2, \ldots, n)$ とは異なる部分を挙げたものを

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = [\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_m}]$$

のように書くことにする。ここで、$k \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ ならば $\sigma_k = k$ であるとする。例えば、

$$(1, 3, 4, 2) = [3, 4, 2]$$

と書くのであるが、この記法は $(1, 2, \ldots, n)$ とは違うもののみを挙げなければいけないわけではないので、一意的に決まる記法ではないことに注意する。例えば、$n = 6$ のときに $\sigma = [5, 2, 4, 1]$ と書けば、これは、$\{1, 2, 4, 5\}$ 以外の $3, 6$ は少なくとも元の位置からは動かず、残りの部分がこの順に並ぶので、

$$\sigma = (5, 2, 3, 4, 1, 6)$$

を意味することになる。しかし、これは実際には $2, 4$ も動いていないので、

$$\sigma = [5, 1] = [5, 2, 1] = [5, 2, 3, 1]$$

などのように書くこともできる。

また、順列を一つずつ順送りにしたものを 巡回順列 と呼ぶ。例えば、以下の順列は $(1, 2, 3, 4)$ の巡回順列である。

$$(2, 3, 4, 1),\ (3, 4, 1, 2),\ (4, 1, 2, 3)$$

このような順列全体が巡回するものばかりではなく、そのうち一部分のみを巡回したものも巡回順列と呼ぶ。例えば、

$$[3, 5, 2],\ [5, 2, 3]$$

は、$[2, 3, 5] = (1, 2, 3, 4, 5)$ の巡回順列である。一般に、$[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m]$ $(\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m)$ の巡回順列

$$[\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \ldots, \mu_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k] \tag{7}$$

の k を 位数 と呼び、

$$[\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \ldots, \mu_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k] = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m]^{(k)}$$

と書くことにする。この位数は、$k = m$ の場合は元に戻るので周期 m を持つと考え、m より大きい整数、あるいは 0 以下の整数 k に対しても、$k \equiv j \pmod{m}, 0 \leq j < m$

となる j を取って、

$$[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m]^{(k)} = \begin{cases} [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m]^{(j)} = [\mu_{j+1}, \mu_{j+2} \ldots, \mu_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_j] & (j > 0), \\ [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m] & (j = 0) \end{cases}$$

と書くことにする。例えば、

$$(1,2,3,4)^{(3)} = (4,1,2,3),\ [2,3,5]^{(-7)} = [2,3,5]^{(2)} = [5,2,3]$$

のようになる。

順列 σ, μ に対して、その合成による順列

$$p = (\mu_{\sigma_1}, \mu_{\sigma_2}, \ldots, \mu_{\sigma_n})$$

を σ, μ の 積 と呼び、$\sigma \circ \mu = p$ と書く。例えば、

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = (2,1,3,4), \quad \mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (1,3,2,4)$$

の場合は、

$$\mu_{\sigma_1} = \mu_2 = 3,\ \mu_{\sigma_2} = \mu_1 = 1,\ \mu_{\sigma_3} = \mu_3 = 2,\ \mu_{\sigma_4} = \mu_4 = 4$$

なので $\sigma \circ \mu = (3,1,2,4)$、

$$\sigma_{\mu_1} = \sigma_1 = 2,\ \sigma_{\mu_2} = \sigma_3 = 3,\ \sigma_{\mu_3} = \sigma_2 = 1,\ \sigma_{\mu_4} = \sigma_4 = 4$$

なので $\mu \circ \sigma = (2,3,1,4)$ となる。

この積は、置換の考え方で理解することもできる[1]。この例の σ, μ は $\sigma = [2,1], \mu = [3,2]$ であり、$\sigma \circ \mu$ は、$(1,2,3,4)$ をまず $\mu = [3,2]$ に従って 2 番目と 3 番目を入れかえて $(1,3,2,4)$ とし、次に $\sigma = [2,1]$ に従ってその順列の 1 番目と 2 番目を入れかえて $(3,1,2,4)$ としたものに等しい。

[1]むしろこの積は、元々置換の積を無理矢理順列の言葉で書き直したものである。

この順列の積について、容易に次が示される。

補題 1

1. σ とその逆対応 σ^{-1} に対して、次が成り立つ。

$$\sigma^{-1} \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^{-1} = (1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

2. 結合法則が成り立つ。

$$(\sigma \circ \mu) \circ \tau = \sigma \circ (\mu \circ \tau) \tag{9}$$

3. 巡回順列に対して、次が成り立つ。

$$[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m]^{(j)} \circ [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m]^{(k)} = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m]^{(j+k)} \tag{10}$$

証明

1. $\sigma_j = k$ とすると $\sigma_k^{-1} = j$ であるから、

$$\begin{aligned}(\sigma^{-1} \circ \sigma)_k &= \sigma_{\sigma_k^{-1}} = \sigma_j = k, \\ (\sigma \circ \sigma^{-1})_j &= \sigma_{\sigma_j}^{-1} = \sigma_k^{-1} = j\end{aligned}$$

   がすべての j に対して成り立つので (8) が成立する。

2. 両辺の j 番目の成分を見れば、

$$\begin{aligned}((\sigma \circ \mu) \circ \tau)_j &= \tau_{(\sigma\circ\mu)_j} = \tau_{\mu_{\sigma_j}}, \\ (\sigma \circ (\mu \circ \tau))_j &= (\mu \circ \tau)_{\sigma_j} = \tau_{\mu_{\sigma_j}}\end{aligned}$$

   となるので、(9) が成り立つ。

3. この積では、$\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m\}$ 以外の要素はいずれの項でも場所は動かないので、$\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m\}$ のみを考えればよいことにまず注意する。

$k = 1$ の場合を考えれば、

$$\begin{aligned}&[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m]^{(j)} \circ [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m]^{(1)} \\ &= [\mu_{j+1}, \mu_{j+2}, \ldots, \mu_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_j] \circ [\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_m, \mu_1] \\ &= [\mu_{j+2}, \mu_{j+3}, \ldots, \mu_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{j+1}] = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m]^{(j+1)}\end{aligned}$$

となることが容易に示される。後はこれと 2. を組み合わせれば、(10) は容易に示される。

■

補題 2

S_n のすべての順列は、巡回順列の $(n-1)$ 個の積

$$[1, 2, \ldots, n]^{(j_n)} \circ [2, 3, \ldots, n]^{(j_{n-1})} \circ \cdots \circ [n-1, n]^{(j_2)} \quad (0 \leq j_k < k) \tag{11}$$

で一意に表現できる。

証明

以後、(11) の積の式を $p(j_2, j_3, \ldots, j_n)$ と書くことにする。この $p(j_2, j_3, \ldots, j_n)$ は、j_2 が 0,1 の 2 通り、j_3 が 0,1,2 の 3 通り、そして最後に j_n が n 通りなので、結局 (11) は $2 \cdot 3 \cdots n = n!$ 通りあるから、異なる $(j_2, j_3, \ldots, j_n)$ に対しては異なる順列 $p(j_2, j_3, \ldots, j_n)$ が得られるのであれば、これですべての S_n の元が一意に得られることになる。

よって、$p(j_2, j_3, \ldots, j_n) = p(k_2, k_3, \ldots, k_n)$ ならば $(j_2, j_3, \ldots, j_n) = (k_2, k_3, \ldots, k_n)$ であることを示せばよい。

前に見たように、$p(j_2, j_3, \ldots, j_n)$ は $(1, 2, \ldots, n)$ を $[n-1, n]^{(j_2)}$ に従って最後の 2 つの数字を巡回し、次にそれを $[n-2, n-1, n]^{(j_3)}$ に従って最後の 3 つの数字を巡回し、という形で並び変えていき、最後に $[1, 2, \ldots, n]^{(j_n)}$ に従って n 個全部を巡回したもの、となっている。よって、1 は最後の $[1, 2, \ldots, n]^{(j_n)}$ によってのみ場所が移動するので、その 1 の場所を見れば j_n $(0 \leq j_n < n)$ が一意に決定することになる。よって結果の順列が

$$p(j_2, j_3, \ldots, j_n) = p(k_2, k_3, \ldots, k_n)$$

のように等しければ、1 の位置ももちろん等しいので $j_n = k_n$ が成り立つことになる。次にこの最後の順列による巡回 $[1,2,\ldots,n]^{(j_n)}$ $(= [1,2,\ldots,n]^{(k_n)})$ の前の状態、すなわち $p(j_2,j_3,\ldots,j_{n-1},0)$ と $p(k_2,k_3,\ldots,k_{n-1},0)$ に戻れば (左から $[1,2,\ldots,n]^{(n-j_n)}$ をかけると考えてもよい)、

$$p(j_2,j_3,\ldots,j_{n-1},0) = p(k_2,k_3,\ldots,k_{n-1},0)$$

であることになるが、この式では最後の巡回 $[2,3,\ldots,n]^{(j_{n-1})}$ で 2 が初めて移動するので、その 2 の位置によって j_{n-1} が一意に決定する。よって $j_{n-1} = k_{n-1}$ が言え、

$$p(j_2,j_3,\ldots,j_{n-2},0,0) = p(k_2,k_3,\ldots,k_{n-2},0,0)$$

が成り立つ。

この論法を繰り返せば、結局 $(j_2,j_3,\ldots,j_n) = (k_2,k_3,\ldots,k_n)$ が言える。■

例えば $n = 4$ のとき、

$$\begin{aligned} &p(k,j,i) = [1,2,3,4]^{(i)} \circ [2,3,4]^{(j)} \circ [3,4]^{(k)}, \\ &S_4 = \{p(k,j,i); \quad 0 \le i < 4,\ 0 \le j < 3,\ 0 \le k < 2\} \end{aligned}$$

が成り立つことになるが、これをすべて書いてみる。

$$\begin{aligned} p(0,0,0) &= (1,2,3,4), \\ p(1,0,0) &= (1,2,4,3), \\ p(0,1,0) &= (1,3,4,2), \\ p(1,1,0) &= [3,4,2] \circ (1,2,4,3) = (1,4,3,2), \\ p(0,2,0) &= (1,4,2,3), \\ p(1,2,0) &= [4,2,3] \circ (1,2,4,3) = (1,3,2,4), \\ p(0,0,1) &= (2,3,4,1), \\ p(1,0,1) &= (2,3,4,1) \circ (1,2,4,3) = (2,4,3,1), \\ p(0,1,1) &= (2,3,4,1) \circ (1,3,4,2) = (3,4,2,1), \\ p(1,1,1) &= (2,3,4,1) \circ (1,4,3,2) = (4,3,2,1), \\ p(0,2,1) &= (2,3,4,1) \circ (1,4,2,3) = (4,2,3,1), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p(1,2,1) &= (2,3,4,1)\circ(1,3,2,4) = (3,2,4,1),\\
p(0,0,2) &= (3,4,1,2),\\
p(1,0,2) &= (3,4,1,2)\circ(1,2,4,3) = (4,3,1,2),\\
p(0,1,2) &= (3,4,1,2)\circ(1,3,4,2) = (4,2,1,3),\\
p(1,1,2) &= (3,4,1,2)\circ(1,4,3,2) = (3,2,1,4),\\
p(0,2,2) &= (3,4,1,2)\circ(1,4,2,3) = (2,3,1,4),\\
p(1,2,2) &= (3,4,1,2)\circ(1,3,2,4) = (2,4,1,3),\\
p(0,0,3) &= (4,1,2,3),\\
p(1,0,3) &= (4,1,2,3)\circ(1,2,4,3) = (3,1,2,4),\\
p(0,1,3) &= (4,1,2,3)\circ(1,3,4,2) = (2,1,3,4),\\
p(1,1,3) &= (4,1,2,3)\circ(1,4,3,2) = (2,1,4,3),\\
p(0,2,3) &= (4,1,2,3)\circ(1,4,2,3) = (3,1,4,2),\\
p(1,2,3) &= (4,1,2,3)\circ(1,3,2,4) = (4,1,3,2)
\end{aligned}
$$

のようになり、確かにこれですべての順列が現われていることがわかる。

順列 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ に対して、それを逆順にしたもの

$$(\sigma_n, \sigma_{n-1}, \ldots, \sigma_1)$$

を σ の反転 と呼び、$\bar{\sigma}$ と書く $(\bar{\sigma}_j = \sigma_{n-j+1})$。一般の反転 $\bar{\sigma}$ は、次のように $(1,2,\ldots,n)$ の反転と σ との積で表すこともできる。

$$\bar{\sigma} = (\sigma_n, \sigma_{n-1}, \ldots, \sigma_1) = (n, n-1, \ldots, 1)\circ\sigma$$

反転と巡回の積に対して、次が成り立つ。

補題 3

$$
\begin{aligned}
&[n, n-1, \ldots, j]\circ[j, j+1, \ldots, n]^{(k)}\\
&\quad= [j, j+1, \ldots, n]^{(n-j+1-k)}\circ[n, n-1, \ldots, j]\\
&\quad= [j, j+1, \ldots, n]^{(n-j+2-k)}\circ[j, n, n-1, \ldots, j+1] \qquad (12)
\end{aligned}
$$

証明

$$
\begin{aligned}
&[j, j+1, \ldots, n]^{(1)} \circ [j, n, n-1, \ldots, j+1] \\
&\quad = \quad [j+1, j+2, \ldots, n, j] \circ [j, n, n-1, \ldots, j+1] = [n, n-1, \ldots, j]
\end{aligned}
$$

であるから、(12) の後半は結合法則から得られることになるので、最初の等式のみ示せばよい。

$k = 1$ の場合を考えると、

$$
\begin{aligned}
&[n, n-1, \ldots, j] \circ [j, j+1, \ldots, n]^{(1)} \\
&\quad = \quad [n, n-1, \ldots, j] \circ [j+1, j+2, \ldots, n, j] = [j, n, n-1, \ldots, j+1] \\
&\quad = \quad [n, j, j+1, \ldots, n-1] \circ [n, n-1, \ldots, j] \\
&\quad = \quad [j, j+1, \ldots, n]^{(n-j)} \circ [n, n-1, \ldots, j]
\end{aligned}
$$

となって、この場合には (12) の前半は成り立つ。

これを繰り返せば、補題 1 により、

$$
\begin{aligned}
&[n, n-1, \ldots, j] \circ [j, j+1, \ldots, n]^{(k)} \\
&\quad = \quad [j, j+1, \ldots, n]^{(n-j)} \circ [n, n-1, \ldots, j] \circ [j, j+1, \ldots, n]^{(k-1)} \\
&\quad = \quad \cdots = [j, j+1, \ldots, n]^{(k(n-j))} \circ [n, n-1, \ldots, j]
\end{aligned}
$$

となるが、

$$
k(n-j) = k(n-j+1) - k \equiv -k \equiv n-j+1-k \pmod{n-j+1}
$$

なので、

$$
[j, j+1, \ldots, n]^{(k(n-j))} = [j, j+1, \ldots, n]^{(n-j+1-k)}
$$

となって (12) が示される。∎

この補題を使うと、次のことが示される。

補題 4

$0 \leq j_k < k$ に対して、$m_k = k + 1 - j_k$ とすると次が成り立つ。

$$\overline{p(j_2, j_3, \ldots, j_n)} = p(m_2, m_3, \ldots, m_n) \tag{13}$$

証明

まず、反転を

$$\overline{p(j_2, j_3, \ldots, j_n)} = (n, n-1, \ldots, 1) \circ p(j_2, j_3, \ldots, j_n)$$

と積の形に書けば、補題 3 を使って、次々に $(n, n-1, \ldots, 1)$ を $p(j_2, j_3, \ldots, j_n)$ の各巡回順列の項と交換して前に出していくことができる。

$$\begin{aligned}
&(n, n-1, \ldots, 1) \circ p(j_2, j_3, \ldots, j_n) \\
&= (n, n-1, \ldots, 1) \circ [1, 2, \ldots, n]^{(j_n)} \circ p(j_2, j_3, \ldots, j_{n-1}, 0) \\
&= [1, 2, \ldots, n]^{(n+1-j_n)} \circ (1, n, n-1, \ldots, 2) \circ p(j_2, j_3, \ldots, j_{n-1}, 0) \\
&= [1, 2, \ldots, n]^{(m_n)} \circ [n, n-1, \ldots, 2] \circ p(j_2, j_3, \ldots, j_{n-1}, 0)
\end{aligned}$$

のようにしてまず n 個の巡回と入れかえ、

$$\begin{aligned}
&[n, n-1, \ldots, 2] \circ p(j_2, j_3, \ldots, j_{n-1}, 0) \\
&= [n, n-1, \ldots, 2] \circ [2, 3, \ldots, n]^{(j_{n-1})} \circ p(j_2, j_3, \ldots, j_{n-2}, 0, 0) \\
&= [2, 3, \ldots, n]^{(n-j_{n-1})} \circ [2, n, n-1, \ldots, 3] \circ p(j_2, j_3, \ldots, j_{n-2}, 0, 0) \\
&= [2, 3, \ldots, n]^{(m_{n-1})} \circ [n, n-1, \ldots, 3] \circ p(j_2, j_3, \ldots, j_{n-2}, 0, 0)
\end{aligned}$$

のようにして $(n-1)$ 個の巡回と入れかえられる。これを繰り返すと、最後は

$$\begin{aligned}
&[n, n-1] \circ [n-1, n]^{(j_2)} \\
&= [n-1, n]^{(2-j_2)} \circ [n, n-1] = [n-1, n]^{(3-j_2)} = [n-1, n]^{(m_2)}
\end{aligned}$$

となる。よってこれらを合わせれば、(13) が成り立つ。■

S_n は、$n!$ 個の要素を持つが、これは次の B_n で 2 つに分けられる:

$$B_n = \{p(0, j_3, j_4, \ldots, j_n); \quad 0 \leq j_k < k\} \tag{14}$$

この B_n は (11) のうち、$[n, n-1]$ の 2 つの巡回が含まれないものの集まり、つまり 3 つ以上の巡回から作られる順列で、この要素数は、$n!/2$ 個になる。逆に $j_2 = 1$ の項は B_n には含まれない。

そして補題 4 を使うと、この B_n は順列とその反転の対を持たないことが示される。

補題 5

σ が B_n の元ならば、その反転 $\bar{\sigma}$ は B_n には含まれない。

証明

$\sigma = p(j_2, j_3, \ldots, j_n)$ とすると、$\sigma \in B_n$ ならば $j_2 = 0$ である。よって補題 4 より、$\bar{\sigma} = p(m_2, m_3, \ldots, m_n)$ $(m_k = k + 1 - j_k)$ となるが、よって、$m_2 = 3 - j_2 = 3 \equiv 1 \pmod 2$ より

$$\bar{\sigma} = p(1, m_3, \ldots, m_n) \notin B_n$$

となる。■

4 行の入れ換えによる順列の生成

この節では、3 節の考察に基づき、行列式に現れるすべての順列に対応した積を作り出すための行の入れ換えについて考察する。まずは、そのために 2 節の $n = 4$ の場合を振り返って考えてみることにする。

式 (5) の方で見た場合、(1) の和 $I_4(A)$ に現れる各項は、次の順列に対応していることがわかる:

(1,2,3,4), (2,3,4,1), (3,4,1,2), (4,1,2,3) (左上から右下の方向の積),
(4,3,2,1), (1,4,3,2), (2,1,4,3), (3,2,1,4) (右上から左下の方向の積)

例えば 6 項目の $a_{2,4}a_{3,3}a_{4,2}a_{1,1}$ は、

$$a_{2,4}a_{3,3}a_{4,2}a_{1,1} = a_{1,1}a_{4,2}a_{3,3}a_{2,4} = a_{\sigma_1,1}a_{\sigma_2,2}a_{\sigma_3,3}a_{\sigma_2,4}$$

と書けば、(5) の和の $\sigma = (1,4,3,2)$ の項に対応していることがわかる。

さて上の 8 つの順列は、(1,2,3,4) の巡回順列とその反転からできていることが容易にわかる:

$$(1,2,3,4)^{(j)},\ \overline{(1,2,3,4)^{(j)}}(= (4,3,2,1)\circ(1,2,3,4)^{(j)})\ \ (0 \le j < 3) \tag{15}$$

A' は、A の行を入れかえているが、それは順列 $p' = (1,3,4,2)$ に従って、A の i 行目を p'_i 行目にした、と見ることができる。よって、今 $A' = [a'_{i,j}]$ とすると、

$$a'_{i,j} = a_{p'_i,j}$$

となる。よって、例えばこの A' に対する順列 σ に対する積の項は、

$$a'_{\sigma_1,1}a'_{\sigma_2,2}a'_{\sigma_3,3}a'_{\sigma_4,4} = a_{p'_{\sigma_1},1}a_{p'_{\sigma_2},2}a_{p'_{\sigma_3},3}a_{p'_{\sigma_2},4}$$

となるので、これは元の A で言えば、

$$(p'_{\sigma_1}, p'_{\sigma_2}, p'_{\sigma_3}, p'_{\sigma_4}) = \sigma \circ p'$$

という順列の積に対応する。よって $I_4(A')$ の項は、(5) の和の

$$(1,2,3,4)^{(j)} \circ p',\ \overline{(1,2,3,4)^{(j)} \circ p'}\ \ (0 \le j < 3) \tag{16}$$

の 8 つの順列に対応することになる。

同様に、A'' は $p'' = (1,4,2,3)$ によって行を並べ変えたものであるから、$I_4(A'')$ の項は、(5) の和の

$$(1,2,3,4)^{(j)} \circ p'',\ \overline{(1,2,3,4)^{(j)} \circ p''}\ \ (0 \le j < 3) \tag{17}$$

の 8 つの順列に対応する。

この (15), (16), (17) の 24 個の順列がちゃんと S_4 を構成していることを確認してみる。

$$p' = (1,3,4,2) = [3,4,2] = [2,3,4]^{(1)},\ p'' = (1,4,2,3) = [4,2,3] = [2,3,4]^{(2)}$$

であるので、(15), (16), (17) の反転でない方全体は、

$$[1,2,3,4]^{(j)} \circ [2,3,4]^{(k)}\ (0 \leq j < 3,\ 0 \leq k < 2)$$

と書くことができ、これはまさに (14) の B_4 を構成している。よって、補題 5 により、この B_4 の元の反転である (15), (16), (17) の後半部分は B_4 には入らず、しかも明らかにすべて異なるから、よって、(15), (16), (17) によって S_4 全体が構成されることがわかる。

これと同様に考て一般の n に拡張できる。まず、4 次と同様の斜めの積によって、巡回順列とその反転

$$(1,2,\ldots,n)^{(j)},\ \overline{(1,2,\ldots,n)^{(j)}}\ (0 \leq j < n)$$

に対応する (5) の項が得られる $(2n$ 個$)$。

そして、行の入れ替えは、

$$C_n = \{p(0,j_3,j_4,\ldots,j_{n-1},0);\ 0 \leq j_k < k\} \tag{18}$$

の元 p を取って、その p に対して i 行目を p_i 行目に変える、ということを行う。C_n の元 p は、$j_n = 0$ であるから 1 は動かず、よって $p_1 = 1$ となるので 1 行目は動かさない。

この p それぞれに対して斜めの積を作れば、それにより順列

$$\begin{aligned}\{(1,2,\ldots,n)^{(j)} \circ p;\ 0 \leq j < n,\ p \in C_n\} &= \{p(0,j_3,j_4,\ldots,j_n);\ 0 \leq j_k < k\} \\ &= B_n\end{aligned}$$

とその反転がすべて作られるので、これで S_n の順列に対応する (5) の項がすべての得られることになる。

つまり、行の入れ換えは C_n (要素数 $(n-1)!/2$ 個) の順列に従って行えば良いことがわかるが、この C_n は巡回による構成的な表現で与えられているので、行の入れ替えの作業には便利な形にもなっている。

例えば、$n=5$ の場合、

$$C_5 = \{p(0,i,j,0) = [2,3,4,5]^{(j)} \circ [3,4,5]^{(i)};\ 0 \le i < 3,\ 0 \le j < 4\}$$

であるので、この場合行の入れ換えは、3,4,5 行目の下 3 行の巡回 ($[3,4,5]^{(i)}$) を行い (3 通り)、その後に行う 2,3,4,5 行目の下 4 行の巡回 ($[2,3,4,5]^{(j)}$) を行うことになる (4 通り)。この計 12 通りの面に対し、それぞれで斜めの積による 10 項を作ればよい ($12 \times 10 = 120 = 5!$ 項)。

同様に $n=6$ の場合は、下 3 行の巡回 (3 通り)、それに続く下 4 行の巡回 (4 通り)、そしてそれに続く下 5 行の巡回 (5 通り) による $3 \times 4 \times 5 = 60$ 面を作り、そのそれぞれで斜めの積による 12 項を作ればすべての順列に対応する項 $60 \times 12 = 720 = 6!$ 項ができ上がる。

実際にこれを実行するのはかなり大変であるが、原理的にはこれですべての順列に対応する項を生成できることになる。

5 順列の符号

この節では、行列式の定義 (3) (またはそれと同等の (5) に現れる順列の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ について述べ、4 節で構成した積にどのように符号をつければいいのかを考える。

まず $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は、[2] では以下のように定義されている:

> 順列 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ の各成分の 2 つの組 (σ_i, σ_j) $(i<j)$ のうち、大小関係が反対になっている $(\sigma_i > \sigma_j)$ ものを転倒 と呼ぶ。この転倒の個数を $m(\sigma)$ とするとき、
>
> $$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)} \tag{19}$$
>
> とする。

例えば、$\sigma = (3,2,4,1)$ の場合、転倒は

(3,2), (3,1), (2,1), (4,1)

の 4 つなので、$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^4 = 1$ ということになる。

同じことであるが、この順列の符号は、次のような式で定義することもできる:

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \frac{\prod_{i<j}(\sigma_j - \sigma_i)}{\prod_{i<j}(j-i)} \tag{20}$$

ここで $\prod_{i<j}$ は、$1 \le i < j \le n$ となる i, j すべての組み合わせに対する積を表わし、よって例えば

$$\prod_{i<j}(\sigma_j - \sigma_i) = \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}(\sigma_j - \sigma_i)$$

のように書くこともできる。σ は順列であるから、この (20) の分子と分母はいずれも $\{1, 2, \ldots, n\}$ から異なる 2 つの組を一つずつ選んだものの差の積となっているので、符号の違いを除けば全く同じものになっていて、結果としてはこの値は $+1$ か -1 になり、分子と分母に現われるその組で符号が違っているものがまさに順列の転倒である 2 つの組に対応するので、この式の値 (20) が (19) と同じであることが容易にわかる。

この順列の符号に対して、次が言える。

補題 6

1. (積) $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \mu) = \mathrm{sgn}(\sigma) \circ \mathrm{sgn}(\mu)$
2. (部分順列) $\sigma = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m]$ に対して、$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ 同士の転倒の個数を M とすると

   $$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^M$$

   (すなわち、$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ 以外のものにはよらない)
3. (巡回) $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m$ に対して、$\mathrm{sgn}([\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m]^{(k)}) = (-1)^{k(m-1)}$
4. (反転) n が 4 で割って余りが 0,1 のときは $\mathrm{sgn}(n, n-1, \ldots, 1) = 1$、$n$ が 4 で割って余りが 2,3 のときは $\mathrm{sgn}(n, n-1, \ldots, 1) = -1$

証明

1. (20) を利用すれば、

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(\sigma\circ\mu) &= \mathrm{sgn}(\mu_{\sigma_1},\mu_{\sigma_2},\ldots,\mu_{\sigma_n})\\ &= \frac{\prod_{i<j}(\mu_{\sigma_j}-\mu_{\sigma_i})}{\prod_{i<j}(j-i)} = \frac{\prod_{i<j}(\mu_{\sigma_j}-\mu_{\sigma_i})}{\prod_{i<j}(\sigma_j-\sigma_i)}\,\frac{\prod_{i<j}(\sigma_j-\sigma_i)}{\prod_{i<j}(j-i)}\end{aligned}$$

と書けるが、後者の商は $\mathrm{sgn}(\sigma)$ に等しく、前者も、σ で転倒しているものを分子と分母で合わせて前後を入れかえれば、結局

$$\frac{\prod_{i<j}(\mu_j-\mu_i)}{\prod_{i<j}(j-i)} = \mathrm{sgn}(\mu)$$

に等しいことがわかる。

2. $\sigma=[\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m]$ は、$\sigma_{i_j}=\mu_j$ とすれば、$k\notin\{i_1,i_2,\ldots,i_m\}$ ならば $\sigma_k=k$ であることを意味する。

   この動いていない k 番目の要素に関する転倒の個数を数えてみると、その転倒は k より前にあった i_j が k より後ろに行った場合と、k より後ろにあった i_j が k より前に来たものからなる。しかし、移動前と移動後で k より前のものの個数は $(k-1)$ のまま変わらないから、k を飛び越えて前に移動したものと後ろに移動したものの個数は同数となるはずである。つまり、k に関する転倒の個数は必ず偶数となる。

   よって、σ の転倒の個数全体は、$\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m$ 同士の転倒の個数 M と偶数 $2L$ の和となり、

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{M+2L} = (-1)^M$$

   となる。

3. 2. より、移動したもの同士の転倒だけを考えればよく、

$$[\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m]^{(1)} = [\mu_2,\mu_3,\ldots,\mu_m,\mu_1]$$

   の転倒は最後の μ_1 と他のものとの組すべてであるので、$(m-1)$ 個ある。よって、

$$\mathrm{sgn}([\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m]^{(1)}) = (-1)^{m-1} \tag{21}$$

となり $k=1$ の場合は 3. は成立する。

一般の k に対しては、補題 1 より $[\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m]^{(k)}$ が $[\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m]^{(1)}$ の k 回の積であることから、上の 1. と (21) により容易に示される。

4. $(n,n-1,\ldots,1)$ は、すべての組 $(n(n-1)/2$ 個$)$ が転倒しているので、

$$\mathrm{sgn}(n,n-1,\ldots,1)=(-1)^{n(n-1)/2}$$

となる。ここで、$L=n(n-1)/2$ は、$n=4m$ ならば、

$$L=\frac{4m(4m-1)}{2}=2m(4m-1)$$

なので偶数である。以下同様に、$n=4m+1$, $n=4m+2$, $n=4m+3$ の場合はそれぞれ

$$L=2m(4m+1),\ L=(2m+1)(4m+1),\ L=(2m+1)(4m+3)$$

となり、それぞれ、偶数、奇数、奇数であることがわかる。よって、$n=4m$, $4m+1$, $4m+2$, $4m+3$ の場合 $(-1)^L$ は、それぞれ $+1$, $+1$, -1, -1 となる。

■

この補題 6 を使って、4 節で考察した各項にどのような符号をつければよいかを考察する。

まずは、各面での斜めの計算について考える。

左上から右下への斜めの方向は $[1,2,\ldots,n]^{(j)}$ の巡回順列に対応するので、補題 6 より

$$\mathrm{sgn}([1,2,\ldots,n]^{(j)})=(-1)^{j(n-1)}$$

となる。一方、右上から左下への斜めの積はその反転であるので、補題 6 より

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(\overline{[1,2,\ldots,n]^{(j)}}) &= \mathrm{sgn}((n,n-1,\ldots,1)\circ[1,2,\ldots,n]^{(j)})\\ &= \mathrm{sgn}(n,n-1,\ldots,1)\,\mathrm{sgn}([1,2,\ldots,n]^{(j)})\\ &= (-1)^{n(n-1)/2}(-1)^{j(n-1)}\end{aligned}$$

となる。これを合わせると、これらの積の符号は次のようになる。

- n が 4 で割り切れれば、$(-1)^{n-1}=-1$、$(-1)^{n(n-1)/2}=1$ より、左上から右下への対角線と右上から左下への対角線は $+1$、その下のものはどちらの方向も一つ下がる度に $+1$ と -1 が交互に現われる (2 節の 4 次の計算に対応する)
- n が 4 で割って 1 余る場合は、$(-1)^{n-1}=(-1)^{n(n-1)/2}=1$ より、すべての符号が $+1$ となる
- n が 4 で割って 2 余る場合は、$(-1)^{n-1}=(-1)^{n(n-1)/2}=-1$ より、左上から右下への対角線は $+1$、右上から左下への対角線は -1、その下のものはどちらの方向も一つ下がる度に $+1$ と -1 が交互に現われる
- n が 4 で割って 3 余る場合は、$(-1)^{n-1}=1$、$(-1)^{n(n-1)/2}=-1$ より、左上から右下への方向の積はすべて $+1$、右上から左下への方向の積はすべて -1 となる (3 次のサラス–関の方法に対応する)

もちろん行の入れ換えによっても符号は変化するが、行の入れ替えの順列は、4 節により、$p\in C_n$ に対して

$$(1,2,\dots,n)^{(j)}\circ p$$

とその反転を行うだけであるから、符号はその面に対するすべての項の符号が $\mathrm{sgn}(p)$ 倍されることになる。つまり、上のような符号のままの計算を各面に対して行い、その面に対する合計を求めた後でそれに $\mathrm{sgn}(p)$ をつければよいことになる。

さて、$\mathrm{sgn}(p)$ は、$p=p(0,j_3,j_4,\dots,j_{n-1},0)$ に対して、補題 6 より、

$$\begin{aligned}&\mathrm{sgn}(p)\\ &=\ \mathrm{sgn}([2,3,\dots,n]^{(j_{n-1})})\,\mathrm{sgn}([3,4,\dots,n]^{(j_{n-2})})\cdots\mathrm{sgn}([n-2,n-1,n]^{(j_3)})\\ &=\ (-1)^{(n-2)j_{n-1}}(-1)^{(n-3)j_{n-2}}\cdots(-1)^{2j_3}\end{aligned}$$

となる。よって、行の巡回の際、奇数個の行の巡回は符号を変えず、偶数個の行の巡回 1 回が (-1) 倍に対応する、と数えていけばよいことになる。

6 5 次、6 次の計算方法

最後に、4 節、5 節で得られた結果を用いて、5 次, 6 次の行列式の計算方法を紹介する。

まずは 5 次を考えると、5 は 4 で割って 1 余るので、一つの面に対する斜めの積につける順列の符号はすべて $+1$ となる:

$$\begin{aligned} I_5(A) &= +a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,5} + a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3}a_{5,4}a_{1,5} + a_{3,1}a_{4,2}a_{5,3}a_{1,4}a_{2,5} \\ &\quad + a_{4,1}a_{5,2}a_{1,3}a_{2,4}a_{3,5} + a_{5,1}a_{1,2}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,5} \\ &\quad + a_{1,5}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,2}a_{5,1} + a_{2,5}a_{3,4}a_{4,3}a_{5,2}a_{1,1} + a_{3,5}a_{4,4}a_{5,3}a_{1,2}a_{2,1} \\ &\quad + a_{4,5}a_{5,4}a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} + a_{5,5}a_{1,4}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1} \end{aligned}$$

一方、

$$C_5 = \{p(0,i,j,0) = [2,3,4,5]^{(j)} \circ [3,4,5]^{(i)};\ 0 \le j < 4,\ 0 \le i < 3\}$$

であるので、A を $p(0,i,j,0)$ に対応した行の入れ換え、すなわち、下 3 行を i 回巡回し、その後で下 4 行を j 回巡回したものを $A_{i,j}$ と書くことにすると、

$$\mathrm{sgn}(p(0,i,j,0)) = (-1)^j$$

なので、

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(-1)^j I_5(A_{i,j}) \\ &= I_5(A_{0,0}) + I_5(A_{1,0}) + I_5(A_{2,0}) - I_5(A_{0,1}) - I_5(A_{1,1}) - I_5(A_{2,1}) \\ &\quad + I_5(A_{0,2}) + I_5(A_{1,2}) + I_5(A_{2,2}) - I_5(A_{0,3}) - I_5(A_{1,3}) - I_5(A_{2,3}) \end{aligned}$$

となる。つまり、下 3 行の巡回では符号は変えずに、下 4 行の巡回のときに 1 回ずつ符号を変えて加えればよい。

次に 6 次の場合を考える。6 は 4 で割って 2 余るので、一つの面に対する斜めの積につける順列の符号は、左上から右下への対角線の積には $+1$、右上から左下への対角線の積には -1 をつけ、その下には $+1$ と -1 を交互につける。

$$\begin{aligned} I_6(A) &= +a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,5}a_{6,6} - a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3}a_{5,4}a_{6,5}a_{1,6} \\ &\quad + a_{3,1}a_{4,2}a_{5,3}a_{6,4}a_{1,5}a_{2,6} - a_{4,1}a_{5,2}a_{6,3}a_{1,4}a_{2,5}a_{3,6} \\ &\quad + a_{5,1}a_{6,2}a_{1,3}a_{2,4}a_{3,5}a_{4,6} - a_{6,1}a_{1,2}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,6} \\ &\quad - a_{1,6}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,3}a_{5,2}a_{6,1} + a_{2,6}a_{3,5}a_{4,4}a_{5,3}a_{6,2}a_{1,1} \\ &\quad - a_{3,6}a_{4,5}a_{5,4}a_{6,3}a_{1,2}a_{2,1} + a_{4,6}a_{5,5}a_{6,4}a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \\ &\quad - a_{5,6}a_{6,5}a_{1,4}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1} + a_{6,6}a_{1,5}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,2}a_{5,1} \end{aligned}$$

一方、

$$p(0,i,j,k,0) = [2,3,4,5,6]^{(k)} \circ [3,4,5,6]^{(j)} \circ [4,5,6]^{(i)}$$

に対応して行を巡回した A を $A_{i,j,k}$ と書くことにすると、

$$\mathrm{sgn}(p(0,i,j,k,0)) = (-1)^j$$

なので、

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{4}(-1)^j I_6(A_{i,j,k}) \\
&= I_6(A_{0,0,0}) + I_6(A_{1,0,0}) + I_6(A_{2,0,0}) - I_6(A_{0,1,0}) - I_6(A_{1,1,0}) - I_6(A_{2,1,0}) \\
&\quad + I_6(A_{0,2,0}) + I_6(A_{1,2,0}) + I_6(A_{2,2,0}) - I_6(A_{0,3,0}) - I_6(A_{1,3,0}) - I_6(A_{2,3,0}) \\
&\quad + I_6(A_{0,0,1}) + I_6(A_{1,0,1}) + I_6(A_{2,0,1}) - I_6(A_{0,1,1}) - I_6(A_{1,1,1}) - I_6(A_{2,1,1}) \\
&\quad + I_6(A_{0,2,1}) + I_6(A_{1,2,1}) + I_6(A_{2,2,1}) - I_6(A_{0,3,1}) - I_6(A_{1,3,1}) - I_6(A_{2,3,1}) \\
&\quad + I_6(A_{0,0,2}) + I_6(A_{1,0,2}) + I_6(A_{2,0,2}) - I_6(A_{0,1,2}) - I_6(A_{1,1,2}) - I_6(A_{2,1,2}) \\
&\quad + I_6(A_{0,2,2}) + I_6(A_{1,2,2}) + I_6(A_{2,2,2}) - I_6(A_{0,3,2}) - I_6(A_{1,3,2}) - I_6(A_{2,3,2}) \\
&\quad + I_6(A_{0,0,3}) + I_6(A_{1,0,3}) + I_6(A_{2,0,3}) - I_6(A_{0,1,3}) - I_6(A_{1,1,3}) - I_6(A_{2,1,3}) \\
&\quad + I_6(A_{0,2,3}) + I_6(A_{1,2,3}) + I_6(A_{2,2,3}) - I_6(A_{0,3,3}) - I_6(A_{1,3,3}) - I_6(A_{2,3,3}) \\
&\quad + I_6(A_{0,0,4}) + I_6(A_{1,0,4}) + I_6(A_{2,0,4}) - I_6(A_{0,1,4}) - I_6(A_{1,1,4}) - I_6(A_{2,1,4}) \\
&\quad + I_6(A_{0,2,4}) + I_6(A_{1,2,4}) + I_6(A_{2,2,4}) - I_6(A_{0,3,4}) - I_6(A_{1,3,4}) - I_6(A_{2,3,4})
\end{aligned}$$

となる。つまり、下 3 行の巡回、下 5 行の巡回では符号は変えずに、下 4 行の巡回のときに 1 回ずつ符号を変えて加えればよい。

7 最後に

いわゆる「サラス–関の方法」を $n \geq 4$ にも拡張できることがそれなりに示されたが、もちろんここにある方法で計算するのはあまり現実的ではないし易しくもない。

ただ、線形代数の教科書によく見られる、

「4 次以上の行列式にはサラス–関のような方法がない」

という記述は、初学者の誤解や間違いを防ぐための、それなりに適切な標語なのかもしれないが、本稿で見たように実際には、

> 「考えられないこともないが、3 次の場合とは違い、むしろそちらの方が計算量がすごく多くなるし、易しくもない。よって (通常行われる) 基本変形などによる計算を行うべき」

ということなのだろうと思う。

今後はそんな風に説明してみようかと思っている。

参考文献

[1] 竹野茂治、「4 次の行列式」、2002 年 11 月 03 日
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic2/basic2.html#4dimdeterm

[2] 石原繁、浅野重初、「理工系の基礎 線形代数」、裳華房 (1995)