2010 年 07 月 09 日

三次の逆行列とベクトルの外積

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

例年線形代数の講義で教えているが、一般の逆行列を与える式は教科書 [1] 定理 19.1 に書いてあるように、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}, \quad \tilde{A} = {}^t\Big[(-1)^{i+j}\Delta_{ij}\Big] \tag{1}$$

で与えられる。この $\tilde{A}$ は**余因子行列**と呼ばれる。

ところで、この定理を使って 3 次の行列の逆行列を計算すると、2 次の小行列式 Δ_{ij} 9 つと、3 次の行列式 $|A|$ 1 つを計算して求めることになるが、2 次の小行列式 9 つを求める手順がやや煩雑であると感じる。また、その結果があっているかどうかのチェックとして、最後に余因子行列 $\tilde{A}$ と A との積が

$$\tilde{A}A = |A|E \tag{2}$$

となることの計算がよく行われるが、その計算は 3 つずつの 3 次元ベクトルの内積の計算をやっていることと同じであり、しかもそれらの大半は 0、すなわちそのいくつかのベクトルが垂直であることを意味している。

実はそれを考察すると、3 次元の余因子行列は 3 つのベクトルの外積で表わされることがわかるのであるが、本稿ではそれについて簡単に紹介する。

2 逆行列

行列 A の逆行列 $X = A^{-1}$ は、$AX = XA = E$ となるものを言うが、実際には $XA = E$ さえ成り立てば、$X = A^{-1}$ となる。

今、3 次の正方行列 A を列ベクトルに、B を行ベクトルに分けて、

$$A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3], \quad B = {}^t[\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3] = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{b}_1 \\ {}^t\boldsymbol{b}_2 \\ {}^t\boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix}$$

($\boldsymbol{a}_j$, $\boldsymbol{b}_j$ はいずれも列ベクトル) として積 BA を考えると、

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{b}_1 \\ {}^t\boldsymbol{b}_2 \\ {}^t\boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_1 & {}^t\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_2 & {}^t\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_3 \\ {}^t\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_1 & {}^t\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_2 & {}^t\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_3 \\ {}^t\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{a}_1 & {}^t\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{a}_2 & {}^t\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_3) \\ (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_3) \\ (\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}_3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となることがわかる。ここで、$(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{a}_j)$ はベクトル $\boldsymbol{b}_i$ と $\boldsymbol{a}_j$ の内積で、行列としての積 ${}^t\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}_j$ は明らかに、ベクトルとしての内積 $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{a}_j)$ に等しい。

もし、この BA が対角行列になるとすると、

$$\begin{cases} (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2) &= (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_3) &= 0, \\ (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_1) &= (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_3) &= 0, \\ (\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}_1) &= (\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{a}_2) &= 0 \end{cases}$$

でなければならないが、これは、

$$\boldsymbol{b}_1 \perp \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{b}_1 \perp \boldsymbol{a}_3, \quad \boldsymbol{b}_2 \perp \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{b}_2 \perp \boldsymbol{a}_3, \quad \boldsymbol{b}_3 \perp \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{b}_3 \perp \boldsymbol{a}_2$$

を意味する。よって、例えば $\boldsymbol{b}_1$ は $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ に垂直であるから、その外積 $\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3$ に平行であることになり、同様にして、

$$\boldsymbol{b}_1 \,//\, \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3, \quad \boldsymbol{b}_2 \,//\, \boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{b}_3 \,//\, \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$$

が成り立つことになる。

そして、今

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3, \quad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \tag{3}$$

とすると、ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の三重積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ が、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の作る行列の行列式に等しい (教科書 [1] p58 (14.6)) という性質:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}|$$

および定理 15.4 により、

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_1) &= (\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_1) = |\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_1| = -|\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3| = |\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3| = |A|,\\
(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{a}_2) &= (\boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2) = |\boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2| = -|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_2| = |\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3| = |A|,\\
(\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{a}_3) &= (\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3) = |\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3| = |A|
\end{aligned}$$

となるので、この (3) による B、すなわち

$$B = {}^t[\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3\ \ \boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2] \tag{4}$$

に対して、

$$BA = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A|E$$

が成り立つことになる。よって (2) により、この B は A の余因子行列 $\tilde{A}$ に等しいことがわかる。

結局、3 次の逆行列を求める場合、A の列ベクトルの外積からなる行列の転置行列 (4) を計算すればこれが余因子行列となるので、これを $|A|$ で割れば A の逆行列が求まることがわかったことになる。

3 例

次の A の逆行列を求める。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

この場合、

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

とすると、

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad |A| = 10$$

なので、

$$\tilde{A} = {}^t[\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \ \ \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \ \ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}] = {}^t\begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & 3 \\ 7 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 4 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

より、

$$A = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2/5 & -1/10 & 7/10 \\ 2/5 & -2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 3/10 & -1/10 \end{bmatrix}$$

となる。

4 最後に

計算量としては、外積で計算しても元の公式 (1) を使っても変わらないのであるが、外積としてまとめて計算する方が間違いは少ないようにも思うので、全く意味がないわけではないと思うし、そのように見る方が図形的なイメージも与えられることになるので、理解しやすいのではないかと思う。

なお 4 次以上の場合は、図形的にイメージしやすい簡単な外積がないので、このような話が展開できず、よってこの話は残念ながら 3 次元にしか意味を持たない。

参考文献

[1] 石原繁、浅野重初「理工系の基礎 線形代数」、裳華房 (1995)