2009 年 05 月 26 日

外積の大きさについて

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

ある学生から、

> 「ベクトルの外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の大きさが、その 2 つのベクトルが作る平行四辺形の面積となるのがわからない」

という質問を受けた。

教科書 [1] では、それは定義なので、わからないと言われても困るのであるが、考えてみればベクトルの外積の具体的な計算問題では、定義通りではなく通常は成分計算をやるわけで、その大きさが定義通りに平行四辺形の面積になることは確かに自明ではなく、教科書 [1] にもそれは書かれてはいない。

よってここでは、ベクトルの外積の成分の式から、ベクトルの外積の図形的な定義を導きだすことを考えてみることにする。

2 外積の定義と成分

教科書 [1] による外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の定義は以下の通りである。

1. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の大きさは、その 2 つのベクトルが張る平行四辺形の面積に等しい。
2. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の方向は、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に垂直で、$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に右ねじを回して進む向きである。

一方、成分による計算式は以下のようになっている。

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

教科書では、定義 1., 2. を元に基本ベクトル同士の外積を計算し、積に関する分配法則を示した上で、成分の式 (1) を示している。本稿では逆に (1) を外積の定義と考え、そこから 1., 2. を示すことを目標とする。

なお、ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行な場合は、$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ と書けるか、または $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ となるので、それを (1) に代入すればいずれの場合も $\boldsymbol{0}$ になるし、また、このときは 1. も面積が 0 となり、それは $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ を意味するからその場合は考えなくてよい。

よって、以後は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは平行ではないとして考えることとする。

3 外積の大きさ

まずは、外積の大きさに関して、(1) から 1. を示すことを考えるが、これは単純に成分計算で示すことができる。

今、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 < \theta < \pi)$ とする。$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の長さの 2 乗を考えると、

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \right\|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\
&= a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1a_2b_1b_2 + a_1a_3b_1b_3 + a_2a_3b_2b_3) \\
&= a_1^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2) \\
&\quad -2(a_1a_2b_1b_2 + a_1a_3b_1b_3 + a_2a_3b_2b_3) \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - \{(a_1b_1)^2 + (a_2b_2)^2 + (a_3b_3)^2 \\
&\quad +2(a_1b_1)(a_2b_2) + 2(a_1b_1)(a_3b_3) + 2(a_2b_2)(a_3b_3)\} \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$ なので、

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \cos^2\theta = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \sin^2\theta
\end{aligned}
$$

となる。よって、結局

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta \tag{2}$$

となることがわかる。$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形を考えると、$|\boldsymbol{a}|$ を底辺と見れば、$|\boldsymbol{b}| \sin\theta$ がそれに垂直な高さになるので、よって (2) の右辺は、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積に等しくなる。

4 外積の方向

次は、外積の方向について、(1) から $1.$ を示すことを考える。

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ が垂直であることは、その内積を考えればわかる。

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) &= \left(\begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \right) \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 \\
&= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0
\end{aligned}$$

となるので、よって垂直となる。$\boldsymbol{b}$ も同様で、

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)b_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)b_3 \\
&= a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2 + a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 + a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 = 0
\end{aligned}$$

となる。

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行でないから、この両者に垂直な方向は一方向に決まるので、後はその向きだけとなる。

5 外積の向き

後は、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向き、すなわち $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に右ねじを回した向きになる、ということを示せば良いだけであるが、ところが実はこれは容易ではない。

それは、これが座標系の取り方 (右手系、左手系) にも関係し、単純に成分だけから得られるものではないことに起因する。例えば、もし座標系を左手系にとると、ベクトル (1) は「左ねじを回して進む向き」を持つベクトルとなってしまう。つまり、外積の向きが右ねじの進む向きである、ということの説明には、座標系が右手系である、という事実を用いないと説明ができないことになる。

これを示す方法としては、例えば $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ を中心に 90 度右回りに回転して (それは行列の積により記述できる)、それを $\boldsymbol{c}$ とするとき、$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の間に入ること、すなわち $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) > 0$ であることを言う、というものが考えられる。しかし、この方法は「$\boldsymbol{a}$ を中心として 90 度右回り回転させる行列」を求めるのが難しい (もちろんこの行列も座標系が右手系かどうかによる)。

多分、この向きに関しては、具体的な簡単なベクトルで確認してもらうのが一番楽だろうと思うし、わかりやすいのではないかと思う。しかしそれでは説明したことにはならないので、以下に、[2] にある説明を紹介する。

今、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を回転や拡大縮小などを用いて、それぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ (すなわち x 軸方向、y 軸方向の単位ベクトル) になるように連続的に変形することにする。そして、その変形の途中ではそれらが平行にはならず、しかもいずれも $\boldsymbol{0}$ にはならないようにし、さらに $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角も、元の角度から 90 度までの間のみ変形させることにする。

そうすると、(1) は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の成分に関して連続的に変化し、上の変形の条件により一度も $\boldsymbol{0}$ にはならないから、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の含まれる平面に常に垂直なベクトルである (1) は、この平面の表側から裏側へ抜けることはできない。よって、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と (1) が右手系であるか左手系であるか、すなわち (1) が $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ右ねじを進んで進む向きであるかその逆向きであるか、という性質は、このような連続的な変形では不変なはずである。

そして、

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

のときには、(1) より

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{k}$$

となるので、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と (1) は右手系、すなわち (1) は $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ右ねじを進んで進む向

きであることになる。

6 最後に

例えば分配法則や多重線形性などのベクトルの外積の性質を説明するには、1., 2. のような定義を用いるよりも、実は (1) の式で外積を定義する方が易しい。

しかし、一方でそちらから定義すると、5 に書いたようにその向きがどうなるかを説明するのが難しい。

もちろん、外積の図形的な性質自体が工学や物理への応用に取っては大事、ということもあるのであろうが、そのような難点もあって、教科書 [1] は成分からではなく、図形的な定義を採用しているのではないかと思う。

しかし、手近なベクトル解析、線形代数の本を 15 冊位調べたところ、外積の定義は図形的な定義によるものと成分によるものとがほぼ半々であった。そして、成分による定義を採用している本を見ると、もちろん外積の図形的な性質も紹介しているが、その向きについては「右ねじを回して進む向きになる」という事実だけを述べるにとどまってその理由は書いてないものがほとんどであり、中には、向きには触れていないものすらあった。

その中で [2] のみが 5 節に書いたような説明をしていた (本当は少し違うのであるが、本質的にはほぼ同等)。この説明が、学生にとってわかりやすいものかどうかは議論があると思うが、このようにすれば一応成分から定義しても、図形的な性質の説明を一通りできないわけではないことがわかる。

図形的に外積を定義しても、学生に出す実際の計算問題としては成分計算が主であるから、1 節に書いたような質問が出るのも自然なので、成分から定義してこのような説明を行うのもそれなりに意味があるようにも思える。

参考文献

[1] 石原繁、浅野重初「理工系の基礎 線形代数」、裳華房 (1995)

[2] E. クライツィグ (堀素夫訳)「線形代数とベクトル解析」、培風館 (1987)