2024 年 03 月 28 日

対称行列・交代行列の対角化

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

対称行列、交代行列は直交行列、およびユニタリ行列によって対角化できることが知られている。

さらに交代行列は実数成分の直交行列によって、対角行列とは別の形の標準形に変形できることも知られているが、交代行列はあまりメジャーではないせいか、標準形の結果はいくつかの線形代数の教科書などには見られるものの (例えば [3])、その変形の詳しい話があまり紹介されていない。

そこで本稿でそれを紹介するが、基本的な実ベクトル空間、行列の基本的な計算、行列式の計算程度の知識を仮定する。

2 基本事項

本稿で使用する記号、必要となる事項などを紹介する。まずは用語、記号から。

- $\boldsymbol{R}$ = 実数全体の集合, $\boldsymbol{C}$ = 複素数全体の集合
- $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ = 成分が実数の $m \times n$ 行列全体の集合、
  $M_{m,n}(\boldsymbol{C})$ = 成分が複素数の $m \times n$ 行列全体の集合
- $\boldsymbol{R}^n$: $M_{n,1}(\boldsymbol{R})$ を (実) ベクトル空間と見て、内積

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

  を導入したもの。

- $\boldsymbol{C}^n$: $M_{n,1}(\boldsymbol{C})$ を複素数を係数とする複素ベクトル空間と見て、複素内積

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \overline{\beta_j}$$

  を導入したもの。なお、複素数を係数とする複素ベクトル空間 V の **複素内積** $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$ は、複素数値をとるもので、次の 1.-4. を満たすもの。

  1. $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle}$
  2. $\langle \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma} \rangle + \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \rangle$ ($\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle + \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma} \rangle$)
  3. $\langle k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \overline{k}\boldsymbol{\beta} \rangle = k\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$ $(k \in \boldsymbol{C})$
  4. $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle$ は実数値で 0 以上。$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = 0$ となるのは $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$ のときでそのときに限る。

- $\boldsymbol{R}^n$ では、$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ のとき、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**垂直**、**直交する** といい、$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ と書く。$\boldsymbol{C}^n$ でも、$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = 0$ のとき、$\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ は **垂直**、**直交する** といい、$\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$ と書く。

- $\boldsymbol{R}^n$ では $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ を $\boldsymbol{a}$ の **長さ**、**大きさ** といい、$\boldsymbol{C}^n$ では $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle}$ を $\boldsymbol{\alpha}$ の **長さ**、**大きさ** という。また、長さが 1 のベクトルを単位ベクトルと言う。

- $\boldsymbol{K}^n$ $(\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$ の部分集合 V が、$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in V$ ならば $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} \in V$、$\boldsymbol{p} \in V$, $c \in \boldsymbol{K}$ ならば $c\boldsymbol{p} \in V$ を満たすとき、V を**部分空間** という。

- $\boldsymbol{K}^n$ $(\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$ のベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ の**線形結合**とは、$c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{p}_m$ $(c_j \in \boldsymbol{K})$ の形の式のこと。$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ が**線形従属**であるとは、そのうちの一つが他のものの線形結合で表される場合。$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ が**線形独立**であるとは、線形従属ではない場合。

- 部分空間 V の**次元** とは、その中から取れる線形独立なベクトルの組 $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ の個数 m の最大値。そのようなベクトルの組を V の**基底** と呼ぶ。

- $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ が V の基底のとき、V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は、$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{p}_m$ の形に一意に表される。

- $\boldsymbol{K}^n$ $(\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$ の部分空間 V の基底で、それらが互いに垂直な単位ベクトルの場合、それを V の **正規直交基底** と呼ぶ。

- $E = E_n (\in M_{n,n}(\boldsymbol{R})) = n$ 次単位行列 (対角成分が 1 の対角行列)、
  $O = O_{m,n} (\in M_{m,n}(\boldsymbol{R})) =$ 零行列 (成分が全部ゼロ)

- $A=[a_{i,j}]\in M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ $(\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C})$ に対し、${}^tA=[a_{j,i}]\in M_{n,m}(\boldsymbol{K})$ を A の転置行列、$A=[a_{i,j}]\in M_{m,n}(\boldsymbol{C})$ に対し、$A^*=[\overline{a_{j,i}}]=\overline{{}^tA}\in M_{n,m}(\boldsymbol{C})$ を A の**随伴行列**という。
- $A\in M_{n,n}(\boldsymbol{R})$ に対し、${}^tA=A$ となる A を対称行列、${}^tA=-A$ となる A を交代行列、${}^tAA=E$ となる A を直交行列と呼ぶ。
- $A\in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ に対し、$A^*=A$ となる A を**エルミート行列**、$A^*=-A$ となる A を**歪エルミート行列**、$A^*A=E$ となる A を**ユニタリ行列** と呼ぶ。
- 行列 $A\in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ を**対角化**するとは、正則行列 $P\in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ を取って、$P^{-1}AP$ が対角行列になるようにすること (常にできるとは限らない)。
- $A\in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ に対して、$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|$ を A の**固有多項式**、$f_A(\lambda)=0$ の解 λ を A の**固有値**、A の固有値 λ に対して、$A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{C}^n$ を A の λ に対する**固有ベクトル** と呼ぶ (必ず存在する)。

次は、本稿で必要な、容易に示される (あるいは良く知られている) 事実をあげる。

- $\boldsymbol{K}^n$ $(\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C})$ の次元は n。
- $\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_m$ が線形独立 $\Leftrightarrow$ 「$c_1\boldsymbol{p}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{0}$ となるのは $c_1=\cdots=c_m=0$ のときのみ」
- $\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_m$ が $\boldsymbol{0}$ ではなく、互いに垂直であるとき、これらは線形独立である。
- $\boldsymbol{K}^n$ $(\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C})$ の部分空間 V の次元が k $(k\leq n)$ のとき、V の正規直交基底 $\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_k$ を取ることができる。
- $\boldsymbol{K}^n$ $(\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C})$ の部分空間 V の次元が k $(1\leq k\leq n)$ で、$\boldsymbol{p}_j\in V$ $(j=1,2,\ldots,m,$ $m<k)$ が互いに垂直な単位ベクトルであるとき、これらを含む V の正規直交基底 $\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_k$ を取ることができる。
- $A=[\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]\in M_{n,n}(\boldsymbol{R})$ が直交行列 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\in\boldsymbol{R}^n$ が正規直交基底
- $A=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n]\in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ がユニタリ行列 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n\in\boldsymbol{C}^n$ が正規直交基底
- $A=B+Ci\in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ $(B,C\in M_{n,n}(\boldsymbol{R}))$ がエルミート行列 $\Leftrightarrow$ B が対称行列かつ C が交代行列、A が歪エルミート行列 $\Leftrightarrow$ B が交代行列かつ C が対称行列。よって、エルミート行列の成分が実数ならば対称行列、歪エルミート行列の成分が実数ならば交代行列。
- $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して、$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})={}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{C}^n$ に対して、$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\boldsymbol{\beta}^*\boldsymbol{\alpha}$ (右辺は行列の積として)

- $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$, $A \in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ に対して $(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, {}^t\!A\boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{b}A\boldsymbol{a}$、
  $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{C}^n, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{C}^m$, $A \in M_{m,n}(\boldsymbol{C})$ に対して $\langle A\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, A^*\boldsymbol{\beta}\rangle = \boldsymbol{\beta}^* A\boldsymbol{\alpha}$

- $\boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{a}_j + i\boldsymbol{b}_j \in \boldsymbol{C}^n$ $(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_j \in \boldsymbol{R}^n)$ $(j = 1, 2)$ に対し、
  $\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\rangle = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) + i\{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2) - (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2)\}$、$\|\boldsymbol{\alpha}_j\|^2 = |\boldsymbol{a}_j|^2 + |\boldsymbol{b}_j|^2$

- $A, B \in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ に対し $|AB| = |A||B|$

- A, B が

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right]$$

  で、A_1, A_3 の列数と B_1, B_2 の行数が n_1, A_2, A_4 の列数と B_3, B_4 の行数が n_2 のとき、

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{array}\right]$$

  なお行列内の罫線は、本稿では行列内に行列 (小行列) が成分のように並べられていることを意味するが、列ベクトルの並びや三角行列などには罫線は使わない。

- $${}^t\!\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} {}^t\!A_1 & {}^t\!A_3 \\ \hline {}^t\!A_2 & {}^t\!A_4 \end{array}\right]$$

- ${}^t(AB) = {}^t\!B\,{}^t\!A$、$\overline{(AB)} = \overline{A}\,\overline{B}$、$(AB)^* = B^*A^*$

- $A, B \in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ がユニタリ行列ならば AB, BA もユニタリ行列、
  $A, B \in M_{n,n}(\boldsymbol{R})$ が直交行列ならば AB, BA も直交行列

3 本稿で使用する命題

補題 3.1

$A, Q \in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ が、Q が正則で、

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となるとき、λ_j は A の固有値で、

$$f_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

となる。

証明

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |\lambda E - A| = |Q^{-1}(\lambda E - A)Q| = |\lambda E - Q^{-1}AQ| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & & \ast \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - \lambda_n \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) \end{aligned}$$

■

本稿で一番基本的で重要な定理は以下のものである。

定理 3.2

1. 任意の $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ に対し、

$$U^{-1}AU = U^{*}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \ast \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となるようなユニタリ行列 U が存在する。

2. 任意の $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{R})$ で A の固有値がすべて実数の場合は、上の U として成分がすべて実数の直交行列を取ることができる。

証明

1. 帰納法を用いる。$n = 1$ なら $U = 1$ で成立する。$(n-1)$ 次以下なら成立するとして、n の場合に成立することを示す。

A の固有値 λ_1 を 1 つ、その固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1 \in \boldsymbol{C}^n$ を 1 つとる。なお、$\|\boldsymbol{p}_1\| = 1$ としてよい。

この $\boldsymbol{p}_1$ を含む $\boldsymbol{C}^n$ の正規直交基底 $\boldsymbol{p}_1, \ldots \boldsymbol{p}_n$ を取り、$U_1 = [\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n]$ とすると、この U_1 はユニタリ行列で、

$$AU_1 = [A\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ A\boldsymbol{p}_n] = [\lambda_1\boldsymbol{p}_1 \ A\boldsymbol{p}_2 \ \cdots \ A\boldsymbol{p}_n] = U \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & A_1 \\ \hline O_{n-1,1} & A_2 \end{array}\right]$$

となる。ここで、$A_1 \in M_{1,n-1}(\boldsymbol{C})$, $A_2 \in M_{n-1,n-1}(\boldsymbol{C})$ である。よって、

$$U_1^{-1}AU_1 = U_1^*AU_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & A_1 \\ \hline O_{n-1,1} & A_2 \end{array}\right] = B_1$$

となる。A_2 は $(n-1)$ 次正方行列なので、帰納法の仮定により、ある $(n-1)$ 次ユニタリ行列 U_2 が存在して、

$$U_2^{-1}A_2U_2 = U_2^*A_2U_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & \text{\huge$*$} \\ & \ddots & \\ \text{\huge$0$} & & \lambda_n \end{bmatrix} = B_2$$

とできる。ここで、

$$U_3 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & O_{1,n-1} \\ \hline O_{n-1,1} & U_2 \end{array}\right] \in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$$

とすると、

$$\begin{aligned} U_3^*U_3 &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & O_{1,n-1} \\ \hline O_{n-1,1} & U_2^* \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & O_{1,n-1} \\ \hline O_{n-1,1} & U_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & O_{1,n-1} \\ \hline O_{n-1,1} & U_2^*U_2 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & O_{1,n-1} \\ \hline O_{n-1,1} & E_{n-1} \end{array}\right] = E_n \end{aligned}$$

より U_3 もユニタリ行列で、このとき、

$$\begin{aligned} U_3^*B_1U_3 &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & O_{1,n-1} \\ \hline O_{n-1,1} & U_2^* \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & A_1 \\ \hline O_{n-1,1} & A_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & O_{1,n-1} \\ \hline O_{n-1,1} & U_2 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & A_1 \\ \hline O_{n-1,1} & U_2^*A_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & O_{1,n-1} \\ \hline O_{n-1,1} & U_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & A_1U_2 \\ \hline O_{n-1,1} & U_2^*A_2U_2 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & A_1U_2 \\ \hline O_{n-1,1} & B_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \text{\huge$*$} \\ & \ddots & \\ \text{\huge$0$} & & \lambda_n \end{bmatrix} = B_3 \end{aligned}$$

となり、よって、

$$U_3^*U_1^*AU_1U_3 = (U_1U_3)^*A(U_1U_3) = U_3^*B_1U_3 = B_3$$

となるから、これで、ユニタリ行列 $U = U_1U_3$ で A が三角行列 B_3 にできることが言え、帰納法によりすべての n で成り立つことが言えたことになる。

2. 1. のユニタリ行列の代わりに直交行列を取ることができることを見ていけばよい。

上の証明のうち、固有値 λ_1 と固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ を取る部分は、仮定より $\lambda_1 \in \boldsymbol{R}$ となるから、A の成分もすべて実数なので、固有ベクトルも $\boldsymbol{p}_1 \in \boldsymbol{R}^n$ のものが取れる。あとは、$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ も $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底が取れるので、帰納法の仮定も直交行列に書き換えれば、上の証明でそのまま示すことができる。■

この定理 3.2 は、A になんら仮定をしておらず、任意の正方行列について成り立つところが重要であり、すなわち対角化については、それが可能になるには色々な制限がつくのであるが、三角行列に直すだけなら制限なく常に可能で、しかもユニタリ行列や直交行列のような都合のいいものでそれができる、という非常に有益な定理である。

そして、我々が考える対称行列、交代行列、さらにより一般のエルミート行列、歪エルミート行列に対しては、この定理 3.2 から直ちにそれらの対角化可能性が得られる。その前に、それらの固有値に関する補題を一つ紹介する。

補題 3.3

1. エルミート行列 (対称行列を含む) の固有値はすべて実数
2. 歪エルミート行列 (交代行列を含む) の固有値はすべて純虚数または 0

証明

1. $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ をエルミート行列とする。その固有値を λ, 固有ベクトルを $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{C}^n$ とする。

$$\langle A\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle \lambda\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = \lambda \|\boldsymbol{\alpha}\|^2$$

となるが、一方、

$$\langle A\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, A^*\boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \lambda\boldsymbol{\alpha} \rangle = \overline{\lambda} \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = \overline{\lambda} \|\boldsymbol{\alpha}\|^2$$

となり、$\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$ より $\|\boldsymbol{\alpha}\| > 0$ なので、$\lambda = \overline{\lambda}$ となり $\lambda \in \boldsymbol{R}$ が得られる。

2. $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ を歪エルミート行列とすると、上と同様の計算で、

$$\langle A\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\rangle = \lambda\|\boldsymbol{\alpha}\|^2 = \langle \boldsymbol{\alpha}, A^*\boldsymbol{\alpha}\rangle = -\langle \boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}\rangle = -\overline{\lambda}\|\boldsymbol{\alpha}\|^2$$

となるので、$\lambda = -\overline{\lambda}$ より λ は純虚数、または 0 となる。■

この補題 3.3 と定理 3.2 を組み合わせれば、次の結果が得られる。

定理 3.4

1. $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ がエルミート行列 (対称行列も含む)、または歪エルミート行列 (交代行列も含む) ならば、ユニタリ行列で対角化できる。すなわち

$$U^{-1}AU = U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となるユニタリ行列 $U \in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ が存在する。

2. $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{R})$ が対称行列ならば、直交行列で対角化できる。すなわち、

$$Q^{-1}AQ = {}^tQAQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる直交行列 $Q \in M_{n,n}(\boldsymbol{R})$ が存在する。

証明

1. A に対して定理 3.2 の 1. より、

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = B$$

とするようなユニタリ行列 U が取れる。A がエルミート行列の場合は、$A^* = A$ より、

$$B^* = (U^*AU)^* = U^*A^*U = U^*AU = B$$

となるので、B は三角行列でかつエルミート行列となり、よって対角行列となる。

A が歪エルミート行列の場合も、$A^* = -A$ より、

$$B^* = U^*A^*U = -U^*AU = -B$$

となり、B は三角行列でかつ歪エルミート行列なので、やはり対角行列となる。

2. 対称行列 A の固有値は、補題 3.3 よりすべて実数なので、定理 3.2 の 2. より、

$$ {}^tQAQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = B$$

となるような直交行列 Q が取れる。このとき、

$${}^tB = {}^t({}^tQAQ) = {}^tQ\,{}^tAQ = {}^tQAQ = B$$

となり、B は三角行列かつ対称行列なので、対角行列となる。■

これで、複素数の範囲ではエルミート行列、歪エルミート行列が対角化可能、実数の範囲で対称行列が対角化可能であることがわかったことになる。このように、対称行列の対角化定理は比較的シンプルに得られるが、交代行列の方は固有値は実数ではなく、よって実数の範囲で対角化はできず、ここから先は少し面倒である。

なお、A がユニタリ行列で対角化可能ということは、A の (複素) 固有ベクトルで正規直交基底が作れることを意味することに注意する。

4 固有値、固有ベクトルの性質

次は交代行列を実数の範囲で、ある標準形に変換することを考える。そのためにまず補題をいくつか示す。

まずは、固有値 0 に対する固有空間の次元、基底に関する性質から。

補題 4.1

$A \in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ のとき、

$$Z_C(A) = \{\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{C}^n | A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}\}, \quad Z_R(A) = \{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n | A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}\}$$

とするとこれらはそれぞれ、$\boldsymbol{C}^n$, $\boldsymbol{R}^n$ での部分空間で、その次元は等しく、$Z_R(A)$ の基底 (正規直交基底) が $Z_C(A)$ の基底 (正規直交基底) にもなる。

証明

$Z_C(A)$, $Z_R(A)$ が部分空間であることは容易。

$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}i\in\boldsymbol{C}^n$ $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^n)$ に対し、A の成分は実数なので、$A\boldsymbol{\alpha}=A\boldsymbol{a}+iA\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ と $A\boldsymbol{a}=A\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ は同値なので、$\boldsymbol{\alpha}\in Z_C(A)$ と $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in Z_R(A)$ は同値となる。よって、$Z_R(A)$ の基底を $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ とすると、$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}i\in Z_C(A)$ は $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in Z_R(A)$ より、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}_j$ の線形結合で表され、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}i\\
&= (c_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_m)+(d_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+d_m\boldsymbol{a}_m)i\\
&= (c_1+id_1)\boldsymbol{a}_1+\cdots+(c_m+id_m)\boldsymbol{a}_m
\end{aligned}
$$

と書けるので、$Z_C(A)$ の元はすべて $\boldsymbol{a}_j$ の複素係数の線形結合で表される。

一方、$(c_1+id_1)\boldsymbol{a}_1+\cdots+(c_m+id_m)\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$ とすると、

$$(c_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_m)+(d_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+d_m\boldsymbol{a}_m)i=\boldsymbol{0}$$

となるから、$\boldsymbol{a}_j\in\boldsymbol{R}^n$ より

$$c_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_m=d_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+d_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$$

となり、$\boldsymbol{a}_j$ は $\boldsymbol{R}^n$ で線形独立なので、$c_1=\cdots=c_m=0$, $d_1=\cdots=d_m=0$ となり、よって $\boldsymbol{a}_j$ は $\boldsymbol{C}^n$ でも線形独立となる。これで、$\boldsymbol{a}_j$ が $Z_C(A)$ の基底でもあることが言え、$Z_C(A)$ の次元も m となる。

$\boldsymbol{a}_j$ が $Z_R(A)$ での正規直交基底であれば、$\langle\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{a}_k\rangle=(\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{a}_k)=0$ $(j\neq k)$, $\|\boldsymbol{a}_j\|=|\boldsymbol{a}_j|=1$ なので、それは $Z_C(A)$ でも正規直交基底となる。■

エルミート行列、歪エルミート行列の固有値は 補題 3.3 のような性質を持っていたが、その固有ベクトルには次のような直交性があることも知られている。

定理 4.2

1. エルミート行列、歪エルミート行列の、異なる固有値に対する (複素) 固有ベクトル同士は直交する。

2. 対称行列の異なる固有値に対する (実) 固有ベクトル同士は直交する。

証明

1. A の固有値 $\lambda,\ \mu$ とそれぞれの固有ベクトル $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}$ を取ったとき、$\lambda \neq \mu$ ならば $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$ となることを示す。

まず A がエルミート行列の場合、

$$\langle A\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle = \langle \lambda\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle$$

となるが、一方、

$$\langle A\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, A^*\boldsymbol{\beta}\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\beta}\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \mu\boldsymbol{\beta}\rangle = \overline{\mu}\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle$$

となる。ここで、補題 3.3 より $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ なので、

$$\lambda\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle = \mu\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle$$

となり、$\lambda \neq \mu$ より $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle = 0$ となるので $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$ が得られる。

次は、A が歪エルミート行列の場合。上と同様に計算すると、

$$\langle A\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, A^*\boldsymbol{\beta}\rangle = -\langle \boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\beta}\rangle = -\overline{\mu}\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle$$

となるが、補題 3.3 より λ, μ は純虚数または 0 なので、$-\overline{\mu} = \mu$ となり、よって $\lambda \neq \mu$ より、やはり $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle = 0$ となる。

2. A を対称行列とし、A の固有値 $\lambda,\ \mu$ (実数) とそれぞれの (実) 固有ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ を取ったとき、$\lambda \neq \mu$ ならば $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ となることを示せばよいが、それは上の計算にすべて含まれる。■

さて、補題 3.3 より交代行列 A の固有値は 0 かまたは純虚数であり、$f_A(\lambda)$ は実数係数の方程式だから、$\lambda = \mu i$ $(\mu \neq 0,\ \mu \in \boldsymbol{R})$ が $f_A(\lambda) = 0$ の解なら、必ず $\lambda = -\mu i$ も解となる。よって、A の固有値は、

$$\pm i\mu_1, \ldots, \pm i\mu_k \quad (\mu_j \neq 0,\ \mu_j \in \boldsymbol{R})$$

および 0 が $(n-2k)$ 個 (すなわち $(n-2k)$ 重解)、となる。今、

$$R(\mu)=\begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{bmatrix}$$

とするとき、交代行列 A の標準形とは、ある直交行列 Q による

$$Q^{-1}AQ={}^{t}QAQ=\begin{bmatrix} R(\mu_1) & & & & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\mu_k) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & & & 0 \end{bmatrix}=S_0 \tag{1}$$

の形である。

以下で、交代行列をこの標準形に直すことを考える。

5 交代行列の標準形への変形

前節で見たように交代行列 A の固有値を $\pm i\mu_1,\ldots,\pm i\mu_k,0 \quad (\mu_j>0)$ とする。このとき定理 3.4 より、

$$U^{-1}AU=U^{*}AU=\begin{bmatrix} i\mu_1 & & & & & & & \text{\huge 0} \\ & -i\mu_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & i\mu_k & & & & \\ & & & & -i\mu_k & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

となるようなユニタリ行列 U が存在する。

実は、この U を用いて、(1) の標準形へ直す Q がほぼ作れるのであるが、そのために順番にその性質を見ていく。

まず、U の列ベクトルを、

$$U = [\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\beta}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_k\ \boldsymbol{\beta}_k\ \boldsymbol{\gamma}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\gamma}_{n-2k}]$$

と書くことにすると、これらは互いに垂直な (複素) 単位ベクトルで、

$$A\boldsymbol{\alpha}_j = i\mu_j\boldsymbol{\alpha}_j,\quad A\boldsymbol{\beta}_j = -i\mu_j\boldsymbol{\beta}_j,\quad A\boldsymbol{\gamma}_m = \mathbf{0}\quad (1 \le j \le k,\ 1 \le m \le n-2k) \tag{3}$$

となる。以下、これらを実部と虚部に分けて、

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{a}_j + i\boldsymbol{b}_j,\quad \boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{p}_j + i\boldsymbol{q}_j,\quad \boldsymbol{\gamma}_m = \boldsymbol{r}_m + i\boldsymbol{s}_m$$

と書くことにする。

補題 5.1

1. $|\boldsymbol{a}_j| = |\boldsymbol{b}_j| = 1/\sqrt{2}$、$\boldsymbol{a}_j \perp \boldsymbol{b}_j$ $(1 \le j \le k)$
2. $j \ne \ell$ に対して $\boldsymbol{a}_j \perp \boldsymbol{a}_\ell$、$\boldsymbol{a}_j \perp \boldsymbol{b}_\ell$、$\boldsymbol{b}_j \perp \boldsymbol{b}_\ell$ $(1 \le j, \ell \le k)$
3. 任意の $\boldsymbol{r} \in Z_R(A)$ に対し、$\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{b}_j$ $(1 \le j \le k)$

証明

まず、$A\boldsymbol{\alpha}_j = A\boldsymbol{a}_j + iA\boldsymbol{b}_j,\quad i\mu_j\boldsymbol{\alpha}_j = i\mu_j\boldsymbol{a}_j - \mu_j\boldsymbol{b}_j$ より、

$$A\boldsymbol{a}_j = -\mu_j\boldsymbol{b}_j,\quad A\boldsymbol{b}_j = \mu_j\boldsymbol{a}_j \tag{4}$$

となることに注意する。

1. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し、$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, {}^t\!A\boldsymbol{y}) = -(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$ なので、(4) より、

$$(A\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_j) = -\mu_j(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_j) = -(\boldsymbol{a}_j, A\boldsymbol{b}_j) = -\mu_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_j)$$

となるから、$\mu_j > 0$ より $|\boldsymbol{a}_j| = |\boldsymbol{b}_j|$ が得られる。ここで、$\boldsymbol{\alpha}_j$ は単位ベクトルだから、$\|\boldsymbol{\alpha}_j\|^2 = |\boldsymbol{a}_j|^2 + |\boldsymbol{b}_j|^2 = 1$ なので、よって $|\boldsymbol{a}_j| = |\boldsymbol{b}_j| = 1/\sqrt{2}$ が得られる。また、

$$(A\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_j) = -\mu_j(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{a}_j) = -(\boldsymbol{a}_j, A\boldsymbol{a}_j) = \mu_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_j)$$

となるので、$\mu_j > 0$ より $(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_j) = 0$ となり、$\boldsymbol{a}_j \perp \boldsymbol{b}_j$ が得られる。

2. 仮定より、複素ベクトルとして $\boldsymbol{\alpha}_j \perp \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\ell}}$ なので、

$$\langle\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\ell}}\rangle = (\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_\ell) + (\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_\ell) + \{(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{a}_\ell) - (\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_\ell)\}i = 0$$

より、

$$(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_\ell) = -(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_\ell), \quad (\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{a}_\ell) = (\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_\ell) \quad (j \neq \ell) \tag{5}$$

となる。また、1. と同様にして、(4) より、

$$(A\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{a}_\ell) = \mu_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_\ell) = -(\boldsymbol{b}_j, A\boldsymbol{a}_\ell) = \mu_\ell(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_\ell)$$

となる。これに (5) を代入すると、

$$(\mu_j + \mu_\ell)(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_\ell) = 0$$

となるが、$\mu_j + \mu_\ell > 0$ より $(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_\ell) = 0$, そして (5) より $(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_\ell) = 0$ も言えて、$\boldsymbol{a}_j \perp \boldsymbol{a}_\ell$, $\boldsymbol{b}_j \perp \boldsymbol{b}_\ell$ が得られる。また、

$$(A\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_\ell) = \mu_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_\ell) = -(\boldsymbol{b}_j, A\boldsymbol{b}_\ell) = -\mu_\ell(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{a}_\ell)$$

となるが、これに (5) を代入すると、

$$(\mu_j + \mu_\ell)(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_\ell) = 0$$

となるので、$\boldsymbol{a}_j \perp \boldsymbol{b}_\ell$, $\boldsymbol{b}_j \perp \boldsymbol{a}_\ell$ も言える。

3. $A\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ より、

$$0 = (A\boldsymbol{r}, \boldsymbol{b}_j) = -(\boldsymbol{r}, A\boldsymbol{b}_j) = -\mu_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_j)$$

となるので、$\mu_j > 0$ より $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_j) = 0$、よって $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{a}_j$、また

$$0 = (A\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_j) = -(\boldsymbol{r}, A\boldsymbol{a}_j) = \mu_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{b}_j)$$

より $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{b}_j$ となる。■

なお、補題 5.1 は、$\boldsymbol{\alpha}_j$ の実部、虚部のみについて述べているが、同様のことは、$\boldsymbol{\beta}_j$ の実部、虚部についても成り立つ。ただし、それらは今後の議論では必要ないし、

$$A(\boldsymbol{a}_j + i\boldsymbol{b}_j) = i\mu_j(\boldsymbol{a}_j + i\boldsymbol{b}_j)$$

の両辺の共役を取れば、

$$A(\boldsymbol{a}_j - i\boldsymbol{b}_j) = -i\mu_j(\boldsymbol{a}_j - i\boldsymbol{b}_j)$$

となるので、実は $\boldsymbol{\beta}_j$ を $\boldsymbol{a}_j - i\boldsymbol{b}_j = \overline{\boldsymbol{\alpha}_j}$ と取りかえることも可能である。

また、補題 5.1 の 3. より、$\boldsymbol{r}_m, \boldsymbol{s}_m$ も $\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_j$ に垂直であることが言えることになるが、$\boldsymbol{r}_m, \boldsymbol{s}_m$ も今後の議論には直接は必要ない。

さて、A の固有値 0 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{\gamma}_1, \ldots \boldsymbol{\gamma}_{n-2k}$ は $Z_C(A)$ 内のベクトルで、互いに垂直で、よって線形独立なので $Z_C(A)$ の次元は $(n-2k)$ 以上となる。もし $Z_C(A)$ からさらにこれらに線形独立な $\boldsymbol{\delta}$ がとれたとすると矛盾が起きることを示す。$\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\gamma}_m$ は $\boldsymbol{C}^n$ の基底なので、

$$\boldsymbol{\delta} = \sum_{j=1}^{k} \xi_j \boldsymbol{\alpha}_j + \sum_{j=1}^{k} \eta_j \boldsymbol{\beta}_j + \sum_{m=1}^{n-2k} \nu_m \boldsymbol{\gamma}_m$$

と書けるが、$\boldsymbol{\delta} \in Z_C(A)$ と (3) より

$$A\boldsymbol{\delta} = \sum_{j=1}^{k} i\mu_j \xi_j \boldsymbol{\alpha}_j - \sum_{j=1}^{k} i\mu_j \eta_j \boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{0}$$

となる。$\boldsymbol{\alpha}_j$, $\boldsymbol{\beta}_j$ は線形独立だから $\xi_j = \eta_j = 0$ となり、よって

$$\boldsymbol{\delta} = \sum_{m=1}^{n-2k} \nu_m \boldsymbol{\gamma}_m$$

となるが、これは $\boldsymbol{\gamma}_m$ $(1 \le m \le n-2k)$, $\boldsymbol{\delta}$ が線形独立、という仮定に矛盾する。よって、$Z_C(A)$ にはこれ以上線形独立なベクトルを取ることはできず、$Z_C(A)$ の次元は $(n-2k)$ となることがわかる ($\boldsymbol{\gamma}_m$ が正規直交基底)。

よって補題 4.1 より $Z_R(A)$ の次元も $(n-2k)$ となり、その $(n-2k)$ 個の実ベクトルからなる正規直交基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-2k}$ を取ることができる (これは $\boldsymbol{\gamma}_m$ の代わりの $Z_C(A)$ の正規直交基底にもなる)。

また、補題 5.1 の 1.,2. より、$\hat{\boldsymbol{a}}_j = \sqrt{2}\,\boldsymbol{a}_j,\ \hat{\boldsymbol{b}} = \sqrt{2}\,\boldsymbol{b}_j\ (1 \le j \le k)$ の $2k$ 個の実ベクトルは互いに垂直な単位ベクトルとなる。よって、補題 5.1 の 3. より、n 個のベクトル

$$\hat{\boldsymbol{a}}_j,\ \hat{\boldsymbol{b}}_j,\ \boldsymbol{u}_m\ (1 \le j \le k,\ 1 \le m \le n-2k)$$

は、互いに垂直な単位ベクトルで、

$$A\hat{\boldsymbol{a}}_j = -\mu_j\hat{\boldsymbol{b}}_j, \quad A\hat{\boldsymbol{b}}_j = \mu_j\hat{\boldsymbol{a}}_j, \quad A\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0} \quad (1 \le j \le k,\ 1 \le m \le n-2k) \tag{6}$$

を満たす。よって、

$$Q = [\hat{\boldsymbol{a}}_1\ \hat{\boldsymbol{b}}_1\ \cdots\ \hat{\boldsymbol{a}}_k\ \hat{\boldsymbol{b}}_k\ \boldsymbol{u}_1\ \cdots\ \boldsymbol{u}_{n-2k}]$$

とすれば、Q は直交行列で、(6) より (1) の S_0 に対して $AQ = QS_0$ となることがわかる。これで、交代行列の標準形 S_0 への変形が、各固有ベクトルを元にして作れることがわかった。

6 例

最後に、交代行列の標準形への変形の例を示す。

$n = 2$ の交代行列は $R(\mu)$ そのものなので、$n = 3$ の交代行列の一般形

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

から考える。

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -b \\ a & \lambda & -c \\ b & c & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + abc - abc + a^2\lambda + b^2\lambda + c^2\lambda \\ &= \lambda(\lambda^2 + r^2) \quad (r = \sqrt{a^2+b^2+c^2}) \end{aligned}$$

となるので、固有値は $\lambda = 0, \pm ri$ となる。$r = 0$ なら $A = O$ なので $r > 0$ とする。さらに、$r^2 - a^2 = b^2 + c^2 = 0$ ならば、$b = c = 0$ なので、A は

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の標準形そのものの形なので、$r^2 - a^2 > 0$ の場合を考える。

$\lambda = 0$ に対する単位固有ベクトルが、

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} c \\ -b \\ a \end{bmatrix}$$

であることは容易に確認できる。また、$\lambda = \pm ri$ の固有ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_\pm$ は少し面倒だが、

$$\boldsymbol{\alpha}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}\,r\sqrt{r^2 - a^2}}\begin{bmatrix} -ac \mp bri \\ ab \mp cri \\ r^2 - a^2 \end{bmatrix}$$

となり、$\boldsymbol{\alpha}_\pm = \boldsymbol{a}_\pm + i\boldsymbol{b}_\pm$ と分けると、

$$\boldsymbol{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}\,r\sqrt{r^2 - a^2}}\begin{bmatrix} -ac \\ ab \\ r^2 - a^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_\pm = \frac{\mp 1}{\sqrt{2}\sqrt{r^2 - a^2}}\begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}$$

となるので、

$$\hat{\boldsymbol{a}}_\pm = \sqrt{2}\,\boldsymbol{a}_\pm = \frac{1}{r\sqrt{r^2 - a^2}}\begin{bmatrix} -ac \\ ab \\ r^2 - a^2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{b}}_\pm = \sqrt{2}\,\boldsymbol{b}_\pm = \frac{\mp 1}{\sqrt{r^2 - a^2}}\begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる。この $\hat{\boldsymbol{a}}_+, \hat{\boldsymbol{b}}_+, \boldsymbol{a}_0$ が互いに垂直な単位ベクトルとなり、

$$A\hat{\boldsymbol{a}}_+ = -r\hat{\boldsymbol{b}}_+, \quad A\hat{\boldsymbol{b}}_+ = r\hat{\boldsymbol{a}}_+, \quad A\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{0}$$

となるので、$Q = [\hat{\boldsymbol{a}}_+ \ \hat{\boldsymbol{b}}_+ \ \boldsymbol{a}_0]$ により、

$$Q^{-1}AQ = {}^tQAQ = \begin{bmatrix} 0 & -r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。

$n = 4$ の場合も少し見ておく。交代行列の一般形は

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}$$

で、$f_A(\lambda)$ は

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -b & -c \\ a & \lambda & -d & -e \\ b & d & \lambda & -f \\ c & e & f & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -d & -e \\ d & \lambda & -f \\ e & f & \lambda \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ d & \lambda & -f \\ e & f & \lambda \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ \lambda & -d & -e \\ e & f & \lambda \end{vmatrix} \\ &\quad -c \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ \lambda & -d & -e \\ d & \lambda & -f \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda^3 + d^2\lambda + e^2\lambda + f^2\lambda) - a(-a\lambda^2 - cdf + bef - af^2 + ce\lambda + bd\lambda) \\ &\quad +b(ad\lambda - cf\lambda + be^2 - cde - aef + b\lambda^2) \\ &\quad -c(-adf - c\lambda^2 + bde - cd^2 - ae\lambda - bf\lambda) \\ &= \lambda^4 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)\lambda^2 + a^2f^2 + b^2e^2 + c^2d^2 \\ &\quad -2abef + 2acdf - 2bcde \\ &= \lambda^4 + (|\boldsymbol{p}|^2 + |\boldsymbol{q}|^2)\lambda^2 + (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})^2 \quad \left(\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} f \\ -e \\ d \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

となる。$g(t) = t^2 + (|\boldsymbol{p}|^2 + |\boldsymbol{q}|^2)t + (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})^2$ とすると、$f_A(\lambda) = g(\lambda^2)$ で、$g(t) = 0$ の

判別式は、

$$D = (|\boldsymbol{p}|^2 + |\boldsymbol{q}|^2)^2 - 4(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})^2 = (|\boldsymbol{p}|^2 - |\boldsymbol{q}|^2)^2 + 4\{|\boldsymbol{p}|^2|\boldsymbol{q}|^2 - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})^2\}$$

であり、シュワルツの不等式 $|(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})| \leq |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|$ より $D \geq 0$ となり、$D = 0$ となるのは $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{q}|$ かつ $|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| = |(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})|$ のとき、すなわち $\boldsymbol{q} = \pm\boldsymbol{p}$ のとき。

また、放物線 $y = g(t)$ の軸は負で $g(0) \geq 0$ なので、$g(t) = 0$ の解は 2 つとも 0 以下となる。よって場合分けすれば以下のようになる。

- $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \neq 0$ かつ $\boldsymbol{q} \neq \pm\boldsymbol{p}$ ならば $g(t) = 0$ の解は $t = -t_1, -t_2$ $(t_1 > t_2 > 0)$ となり、固有値は $\lambda = \pm\sqrt{t_1}\,i, \pm\sqrt{t_2}\,i$ となる。よって標準形は $R(\sqrt{t_1})$, $R(\sqrt{t_2})$ で表される。
- $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \neq 0$ かつ $\boldsymbol{q} = \pm\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $g(t) = 0$ は重解 $t = -t_1$ $(t_1 > 0)$ を持つので、固有値は $\lambda = \pm\sqrt{t_1}\,i$ (重解) となる。標準形は $R(\sqrt{t_1})$ が 2 つ並ぶ形となる。この場合、$\lambda = \pm\sqrt{t_1}\,i$ に対する固有空間の次元はそれぞれ 2 となり、垂直な固有ベクトルが 2 つずつ取れることになる。
- $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0$ かつ $|\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{q}| > 0$ ならば、固有値は $\lambda = 0$ (重解), $\pm\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + |\boldsymbol{q}|^2}\,i$ となる。標準形は $R\left(\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + |\boldsymbol{q}|^2}\right)$ と 0, 0 が並ぶものとなる。
- $|\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{q}| = 0$ ならば、$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ で、この場合は $A = O$ となる。

参考文献

[1] 石原繁、浅野重初、「理工系の基礎 線形代数」(1995)、裳華房

[2] 佐藤正次、永井治、「新版 基礎課程 線型代数学」(1976)、学術図書出版社

[3] Nomizu Katsumi, “*Fundamentals of Linear Algebla*”, 2nd ed. (1979), Chelsea Publ.