2006 年 12 月 08 日

行列式の性質の証明について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

私が講義で使用している (そして現在の工学部向けの多くの) 線形代数の教科書では、行列式は順列の符号を使って

$$|A| = \sum_{(p_1,\ldots,p_n)} \mathrm{sgn}(p_1,\ldots,p_n) a_{1p_1} \cdots a_{np_n}$$

のように定義しているが、私は講義ではこの定義を採用はせず、1 列目での展開を利用した帰納的な定義で説明している。

具体的な行列式の実際の計算には、順列の符号の式を用いることはなく、この帰納的な定義の方が計算向きであるし、式もわかりやすく、順列の符号を説明する必要もないのでそのようにしているのであるが、色んな行列式の性質を証明するには順列の符号による定義の方が有利である。

逆に言えば、帰納的な定義からでは、教科書に載っている性質の証明は割と面倒になる。ここでは、その帰納的な定義による行列式の性質の証明を考察してみる。

なおこのような話題は、学生にとっておもしろいものや意味のあるものではなく、むしろ数学者等にしか興味のない話であろうことを最初に断っておく。

2 定義

私が講義で説明している、行列式の「帰納的な」定義は以下の通りである:

定義 1

n 次の正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対し、A の行列式 $|A|$ を

$$|A|=\begin{cases}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}a_{p1}\Delta_{p1} & (n>1 \text{ のとき}) \\ a_{11} & (n=1 \text{ のとき})\end{cases} \tag{1}$$

と定める。ここで、$\Delta_{ij}=\Delta_{ij}(A)$ は、A の i 行目と j 列目を取り除いた $(n-1)$ 次の行列の行列式とする。

つまり、ひとつ低い次数の行列式を使っての定義であり、例えば、

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1|[b_2]|-a_2|[b_1]|=a_1b_2-a_2b_1, \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \tag{3}$$

のようになっていて、1 次、2 次、3 次と順に定義されることになる。このような定義を **帰納的な定義** という。

3 転置行列

定理 2

転置行列 ${}^tA$ に対して、

$$|{}^tA|=|A| \tag{4}$$

この定理の証明は、次のように帰納法を使って証明される。

$n=1,2$ のときは明らかに成立する。よって、$(n-1)$ 次、$(n-2)$ 次に対しては成り立つとして、n 次の場合に成り立つことを証明する $(n\geq 3)$。

定義 (1) より、

$$|{}^tA| = |[a_{ji}]| = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}a_{1p}\Delta_{p1}({}^tA) = a_{11}\Delta_{11}({}^tA) - a_{12}\Delta_{21}({}^tA) + \cdots$$

となるが、$\Delta_{ij}({}^tA)$ は

「${}^tA$ から i 行目、j 列目を取り除いた行列の行列式」

なので、よって

「A から j 行目、i 列目を取り除いた行列を転置したものの行列式」

となり、これは $(n-1)$ 次の行列式であるから、帰納法の仮定により、転置したものの行列式は転置する前の行列の行列式に等しい。よって、

$$\Delta_{ij}({}^tA) = \Delta_{ji}(A) \tag{5}$$

となることが言える。よって、

$$|{}^tA| = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}a_{1p}\Delta_{1p}(A) = a_{11}\Delta_{11}(A) - a_{12}\Delta_{12}(A) + \cdots \tag{6}$$

となる[1]。この (6) の 2 番目以降の $\Delta_{1p}(A)$ $(p \geq 2)$ は、A の 1 行目と p 列目を取り除いた行列式であり、その行列式の 1 列目は、A の 1 列目の 2 行目以下の成分に等しい。

よって、$\Delta_{1p}(A)$ を 1 列目で展開すると、

$$\Delta_{1p}(A) = \sum_{q=2}^{n}(-1)^{q}a_{q1}\Delta_{1p,q1}(A) \tag{7}$$

となる。ここで、$\Delta_{ij,kl}(A)$ は、A から i 行目と j 列目、および (A の) k 行目と l 列目を取り除いた $(n-2)$ 次の行列式を表すものとする。

[1] この式の右辺は、丁度 A を 1 行目で展開した式になっている。

一方で $q \geq 2$ に対し (5) より

$$\Delta_{q1}(A) = \Delta_{1q}({}^tA)$$

であり、この右辺の行列式を 1 列目で展開すれば、これは (6) で見たように $\Delta_{q1}(A)$ を 1 行目で展開した式となるが、$q \geq 2$ より $\Delta_{q1}(A)$ の 1 行目は A の 1 行目の 2 列目以降の成分に等しいので、

$$\Delta_{q1}(A) = \sum_{p=2}^{n} (-1)^p a_{1p} \Delta_{q1,1p}(A) \tag{8}$$

となる。

明らかに $\Delta_{1p,q1}(A) = \Delta_{q1,1p}(A)$ であるのでよって、(6), (7), (8) と行列式の定義より、

$$\begin{aligned}
|{}^tA| &= a_{11}\Delta_{11}(A) + \sum_{p=2}^{n}(-1)^{p+1} a_{1p}\Delta_{1p}(A) \\
&= a_{11}\Delta_{11}(A) + \sum_{p=2}^{n}(-1)^{p+1} a_{1p} \sum_{q=2}^{n}(-1)^{q} a_{q1}\Delta_{1p,q1}(A) \\
&= a_{11}\Delta_{11}(A) + \sum_{p=2}^{n}\sum_{q=2}^{n}(-1)^{p+1+q} a_{1p}a_{q1}\Delta_{1p,q1}(A) \\
&= a_{11}\Delta_{11}(A) + \sum_{q=2}^{n}\sum_{p=2}^{n}(-1)^{p+1+q} a_{1p}a_{q1}\Delta_{1p,q1}(A) \\
&= a_{11}\Delta_{11}(A) + \sum_{q=2}^{n}(-1)^{q+1} a_{q1} \sum_{p=2}^{n}(-1)^{p} a_{1p}\Delta_{q1,1p}(A) \\
&= a_{11}\Delta_{11}(A) + \sum_{q=2}^{n}(-1)^{q+1} a_{q1}\Delta_{q1}(A) = \sum_{q=1}^{n}(-1)^{q+1} a_{q1}\Delta_{q1}(A) \\
&= |A|
\end{aligned}$$

となる。

4 任意の列での展開

定理 3

行列式を j 列目で展開すると、

$$|A| = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+j}a_{pj}\Delta_{pj} \tag{9}$$

となる。また、i 行目で展開すると、

$$|A| = \sum_{q=1}^{n}(-1)^{i+q}a_{iq}\Delta_{iq} \tag{10}$$

となる。

この展開公式の証明も、帰納法で得ることができる。なお、行に関する展開公式 (10) は、列に関する展開公式 (9) と転置行列に対する定理 2 を組み合わせれば容易に得られるので、ここでは (9) のみを考える。

(9) はもちろん $n=1$ の場合には明らかに成り立つので、$(n-1)$ 次では任意の列の展開が可能だとして、(9) を示すこととする。なお、$j=1$ のときは行列式の定義 (1) そのものなので、$j \geq 2$ の場合を考える。

このとき Δ_{pj} を 1 列目に関して展開すると、Δ_{pj} の 1 列目は、A の 1 列目の p 行目以外の成分なので、

$$\Delta_{pj} = \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k+1}a_{k1}\Delta_{pj,k1} + \sum_{k=p+1}^{n}(-1)^{k}a_{k1}\Delta_{pj,k1} \tag{11}$$

となる。ただし、$p=1$ のときは $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} = 0$, $p=n$ のときは $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} = 0$ と考えることとする。

これを、(9) の右辺に代入すると、

$$\begin{aligned}
&(9)\text{ の右辺}\\
&= \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+j}a_{pj}\left\{\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k+1}a_{k1}\Delta_{pj,k1} + \sum_{k=p+1}^{n}(-1)^{k}a_{k1}\Delta_{pj,k1}\right\}\\
&= \sum_{p=2}^{n}(-1)^{p+j}a_{pj}\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k+1}a_{k1}\Delta_{pj,k1} + \sum_{p=1}^{n-1}(-1)^{p+j}a_{pj}\sum_{k=p+1}^{n}(-1)^{k}a_{k1}\Delta_{pj,k1}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{p=2}^{n}\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p+j+k+1}a_{pj}a_{k1}\Delta_{pj,k1} + \sum_{p=1}^{n-1}\sum_{k=p+1}^{n}(-1)^{p+j+k}a_{pj}a_{k1}\Delta_{pj,k1}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\sum_{p=2}^{n}\sum_{k=1}^{p-1} &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{p=k+1}^{n} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=k+1}^{n} \quad \left(\sum_{p=n+1}^{n} = 0\right), \\ \sum_{p=1}^{n-1}\sum_{k=p+1}^{n} &= \sum_{k=2}^{n}\sum_{p=1}^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k-1} \quad \left(\sum_{p=1}^{0} = 0\right)\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}&(9)\text{ の右辺} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=k+1}^{n}(-1)^{p+j+k+1}a_{pj}a_{k1}\Delta_{pj,k1} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k-1}(-1)^{p+j+k}a_{pj}a_{k1}\Delta_{pj,k1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{p=k+1}^{n}(-1)^{p+j+k+1}a_{pj}a_{k1}\Delta_{pj,k1} + \sum_{p=1}^{k-1}(-1)^{p+j+k}a_{pj}a_{k1}\Delta_{pj,k1}\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}\left\{\sum_{p=k+1}^{n}(-1)^{p+j}a_{pj}\Delta_{pj,k1} + \sum_{p=1}^{k-1}(-1)^{p+j+1}a_{pj}\Delta_{pj,k1}\right\} \qquad (12)\end{aligned}$$

となる。

ここで、$(n-1)$ 次の行列式である Δ_{k1} は、帰納法の仮定により $(j-1)$ 列目で展開できるが、Δ_{k1} の $(j-1)$ 列目は A の j 列目の k 行目以外の成分なので、よって、

$$\begin{aligned}\Delta_{k1} &= \sum_{p=1}^{k-1}(-1)^{(j-1)+p}a_{pj}\Delta_{k1,pj} + \sum_{p=k+1}^{n}(-1)^{(j-1)+p-1}a_{pj}\Delta_{k1,pj} \\ &= \sum_{p=1}^{k-1}(-1)^{p+j+1}a_{pj}\Delta_{pj,k1} + \sum_{p=k+1}^{n}(-1)^{p+j}a_{pj}\Delta_{pj,k1}\end{aligned}$$

となり、これは (12) の中括弧の中身に等しい。よって、

$$(9)\text{ の右辺} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}\Delta_{k1}$$

となるが、これは行列式の定義より $|A|$ に等しい。ゆえに (9) が言えたことになる。

また、(9), (10) より、$|A|$ は各列の成分 (または各行の成分) の 1 次式であることが言えるので、よって、次のことも言える。

系 4

$|A|$ は各列 (または各行) に関して線形である。すなわち、ある列が k 倍されれば行列式の値は k 倍となり、ある列が 2 つの列ベクトルの和であれば、それぞれをその列とした行列式の和になり、さらにある列の要素がすべて 0 であれば行列式の値は 0 となる。

これにより、行列式を n 個の列ベクトルの関数と見た場合、そのそれぞれに関して線形である、ということになるので、これを **多重線形性** と呼ぶことがある。

5　列の入れ換え

定理 5

A の i 列目と j 列目を入れかえた行列 $\tilde{A}$ $(i < j)$ に対して、

$$|\tilde{A}| = -|A| \tag{13}$$

これも、定理 3 と同様にして示される。

4 節と同様の計算によって i 列と j 列 $(i < j)$ での展開を行えば、

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+j} a_{pj} \Delta_{pj}(A) \\
&= \sum_{p=2}^{n} \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p+j+k+i} a_{pj} a_{ki} \Delta_{pj,ki}(A) \\
&\quad + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{k=p+1}^{n} (-1)^{p+j+k+i-1} a_{pj} a_{ki} \Delta_{pj,ki}(A)
\end{aligned}$$

となる。ここで、簡単のため、$\displaystyle\sum_{p=2}^{n}\sum_{k=1}^{p-1}$ と $\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{k=p+1}^{n}$ を、それぞれ $\displaystyle\sum_{p>k}$, $\displaystyle\sum_{p<k}$ と書くことにすれば、

$$|A| = \sum_{p>k}(-1)^{p+j+k+i}a_{pj}a_{ki}\Delta_{pj,ki}(A) - \sum_{p<k}(-1)^{p+j+k+i}a_{pj}a_{ki}\Delta_{pj,ki}(A) \tag{14}$$

となる。

$\tilde{A} = [\tilde{a}_{pq}]$ にこの (14) と同じ計算を行えば、

$$|\tilde{A}| = \sum_{p>k}(-1)^{p+j+k+i}\tilde{a}_{pj}\tilde{a}_{ki}\Delta_{pj,ki}(\tilde{A}) - \sum_{p<k}(-1)^{p+j+k+i}\tilde{a}_{pj}\tilde{a}_{ki}\Delta_{pj,ki}(\tilde{A})$$

となるが、$\tilde{A}$ は、A の i 列と j 列を入れ換えた行列であるから、

$$\tilde{a}_{pj} = a_{pi}, \quad \tilde{a}_{ki} = a_{kj}, \quad \Delta_{pj,ki}(\tilde{A}) = \Delta_{pj,ki}(A) = \Delta_{kj,pi}(A)$$

であり、よって

$$|\tilde{A}| = \sum_{p>k}(-1)^{p+j+k+i}a_{pi}a_{kj}\Delta_{kj,pi}(A) - \sum_{p<k}(-1)^{p+j+k+i}a_{pi}a_{kj}\Delta_{kj,pi}(A)$$

となる。この p と k を入れ換えて書けば、

$$\begin{aligned}|\tilde{A}| &= \sum_{k>p}(-1)^{k+j+p+i}a_{ki}a_{pj}\Delta_{pj,ki}(A) - \sum_{k<p}(-1)^{k+j+p+i}a_{ki}a_{pj}\Delta_{pj,ki}(A) \\ &= -\left\{\sum_{k<p}(-1)^{p+j+k+i}a_{pj}a_{ki}\Delta_{pj,ki}(A) - \sum_{k>p}(-1)^{p+j+k+i}a_{pj}a_{ki}\Delta_{pj,ki}(A)\right\}\end{aligned}$$

となるが、(14) よりこれは $-|A|$ に等しい。これで定理 5 が証明されたことになる。

また、この定理 5 より、次のこともすぐにわかる。

系 6

2 つの列が等しい行列式の値は 0 となる。

6 行列の積

帰納的な行列式の定義の場合、一番厄介なのは「行列式の積が、積の行列式」になるという性質の証明であろう。この事実を、帰納法が使えるように拡張した形で証明する。

まず、次のような記法を導入する。$m \times n$ 行列 A に対し、

- $A^{i_1,i_2,\ldots,i_k} = A$ の i_1 行, i_2 行,$\ldots$, i_k 行を上から順に並べた $m \times k$ 行列
- $A_{j_1,j_2,\ldots,j_l} = A$ の j_1 列, j_2 列,$\ldots$, j_l 列を左から順に並べた $l \times n$ 行列
- $A^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_{j_1,j_2,\ldots,j_l} = (A^{i_1,i_2,\ldots,i_k})_{j_1,j_2,\ldots,j_l}$ ($k \times l$ 行列)

例えば、

$$\begin{aligned}
&\Delta_{ij}(A) = \left|A^{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n}_{1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n}\right| \\
&(AB)^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_{j_1,j_2,\ldots,j_l} = (A^{i_1,i_2,\ldots,i_k})(B_{j_1,j_2,\ldots,j_l})
\end{aligned}$$

となることに注意せよ。

また、多重数列 $b_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ に対して、$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_n \le m$ となる $i_1, i_2, \ldots, i_n$ すべての組合せに対する和

$$\sum_{i_1=1}^{m-n+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{m-n+2} \cdots \sum_{i_n=i_{n-1}+1}^{m} b_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$$

を、簡単に

$$\sum_{i_1<\cdots<i_n} b_{i_1,\ldots,i_n}$$

と書くことにする。このとき、

$$\sum_{i_1<\cdots<i_n} \sum_{k=i_s+1}^{i_{s+1}-1} b_{i_1,\ldots,i_n,k} = \sum_{i_1<\cdots<i_s<k<i_{s+1}<\cdots<i_n} b_{i_1,\ldots,i_n,k} \tag{15}$$

が成り立つ。簡単のため、$n=3,\ s=1$ の場合を考えれば、

$$\begin{aligned}
\sum_{i_1<i_2<i_3}\sum_{k=i_1+1}^{i_2-1} b_{i_1,i_2,i_3,k} &= \sum_{i_1=1}^{m-2}\sum_{i_2=i_1+1}^{m-1}\sum_{i_3=i_2+1}^{m}\sum_{k=i_1+1}^{i_2-1} b_{i_1,i_2,i_3,k} \\
&= \sum_{i_1=1}^{m-3}\sum_{i_2=i_1+2}^{m-1}\sum_{i_3=i_2+1}^{m}\sum_{k=i_1+1}^{i_2-1} b_{i_1,i_2,i_3,k} \quad (i_2-1\geq i_1+1\ \text{より}) \\
&= \sum_{i_1=1}^{m-3}\sum_{i_2=i_1+2}^{m-1}\sum_{k=i_1+1}^{i_2-1}\sum_{i_3=i_2+1}^{m} b_{i_1,i_2,i_3,k} = \sum_{i_1=1}^{m-3}\sum_{k=i_1+1}^{m-2}\sum_{i_2=k+1}^{m-1}\sum_{i_3=i_2+1}^{m} b_{i_1,i_2,i_3,k} \\
&= \sum_{i_1<k<i_2<i_3} b_{i_1,i_2,i_3,k}
\end{aligned}$$

のようになるからである。同様に、

$$\begin{cases}
\displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_n}\sum_{k=1}^{i_1-1} b_{i_1,\ldots,i_n,k} = \sum_{k<i_1<\cdots<i_n} b_{i_1,\ldots,i_n,k} \\
\displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_n}\sum_{k=i_n+1}^{m} b_{i_1,\ldots,i_n,k} = \sum_{i_1<\cdots<i_n<k} b_{i_1,\ldots,i_n,k}
\end{cases} \tag{16}$$

も成り立つ。

この節では、以下の定理を示す。

定理 7

$m\times n$ 行列 A と $n\times m$ 行列 B に対して、

$$|AB| = \begin{cases}
0 & (n<m\ \text{のとき}) \\
|A||B| & (n=m\ \text{のとき}) \\
\displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_m} |A_{i_1,\ldots,i_m}||B^{i_1,\ldots,i_m}| & (n>m\ \text{のとき})
\end{cases} \tag{17}$$

これを、n を固定して、m に関する帰納法で証明する。

まず、$m=1$ のときは、A は $1\times n$ 行列、B は $n\times 1$ 行列なので、

$$|AB| = \left|[a_{11}\cdots a_{1n}]\begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1}\end{bmatrix}\right| = \left|\left[\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1}\right]\right| = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i||B^i|$$

となるので確かに成り立つ。よって $(m-1)$ までは成り立つとして m の場合を示す。

$C = AB$ とすると C は $m \times m$ 行列なので、

$$|C| = \sum_{p=1}^{m} (-1)^{p+1} c_{p1} \Delta_{p1}(C) = \sum_{p=1}^{m} (-1)^{p+1} c_{p1} \left| A^{1,\ldots,p-1,p+1,\ldots,m} B_{2,3\ldots,m} \right|$$

となるが、$A^{1,\ldots,p-1,p+1,\ldots,m}$ は $(m-1) \times n$ 行列、$B_{2,3\ldots,m}$ は $n \times (m-1)$ 行列なので、この積の行列式には帰納法の仮定を適用できる。まず $m \geq n+2$、すなわち $(m-1) > n$ の場合は

$$\left| A^{1,\ldots,p-1,p+1,\ldots,m} B_{2,3\ldots,m} \right| = 0$$

となるので、よって $|C| = 0$ が言える。$m \leq n+1$ の場合は、

$$\left| A^{1,\ldots,p-1,p+1,\ldots,m} B_{2,3\ldots,m} \right| = \sum_{i_1 < \cdots < i_{m-1}} \left| A^{1,\ldots,p-1,p+1,\ldots,m}_{i_1,\ldots,i_{m-1}} \right| \left| B^{i_1,\ldots,i_{m-1}}_{2,3\ldots,m} \right|$$

となる。ここで、$c_{p1} = \sum_{k=1}^{n} a_{pk} b_{k1}$ より、

$$\begin{aligned} |C| &= \sum_{p=1}^{m} (-1)^{p+1} \sum_{k=1}^{n} a_{pk} b_{k1} \sum_{i_1 < \cdots < i_{m-1}} \left| A^{1,\ldots,p-1,p+1,\ldots,m}_{i_1,\ldots,i_{m-1}} \right| \left| B^{i_1,\ldots,i_{m-1}}_{2,3\ldots,m} \right| \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_{m-1}} \left| B^{i_1,\ldots,i_{m-1}}_{2,3\ldots,m} \right| \sum_{k=1}^{n} b_{k1} \sum_{p=1}^{m} (-1)^{p+1} a_{pk} \left| A^{1,\ldots,p-1,p+1,\ldots,m}_{i_1,\ldots,i_{m-1}} \right| \end{aligned}$$

となるが、

$$\left| A^{1,\ldots,p-1,p+1,\ldots,m}_{i_1,\ldots,i_{m-1}} \right| = \Delta_{p1}\left(\left[* \ A_{i_1,\ldots,i_{m-1}} \right] \right) \quad (* \text{ は任意の 1 列})$$

と見ることもできるので、よって、

$$\sum_{p=1}^{m} (-1)^{p+1} a_{pk} \left| A^{1,\ldots,p-1,p+1,\ldots,m}_{i_1,\ldots,i_{m-1}} \right| = \begin{vmatrix} a_{1k} & \\ \vdots & A_{i_1,\ldots,i_{m-1}} \\ a_{mk} & \end{vmatrix} = |A_{k,i_1,\ldots,i_{m-1}}|$$

となり、

$$|C| = \sum_{i_1<\cdots<i_{m-1}} \left|B^{i_1,\ldots,i_{m-1}}_{2,3\ldots,m}\right| \sum_{k=1}^{n} b_{k1}|A_{k,i_1,\ldots,i_{m-1}}| \tag{18}$$

となる。ここで、$m = n+1$ の場合は、

$$(i_1,\ldots,i_{m-1}) = (i_1,\ldots,i_n) = (1,\ldots,n)$$

となるので、

$$|A_{k,i_1,\ldots,i_{m-1}}| = |\boldsymbol{a}_k\ A| \quad (A = [\boldsymbol{a}_1\ \cdots \boldsymbol{a}_n])$$

となり、1 列目の $\boldsymbol{a}_k$ と $(k+1)$ 列目が必ず等しくなるので、よって系 6 よりすべての k に対して $|\boldsymbol{a}_k\ A| = 0$ となり、よって $|C| = 0$ となる。

よって、後は $1 \leq m \leq n$ の場合のみ考えればよい。

上に述べたことと同様に、k が $i_1,\ldots,i_{m-1}$ のいずれかと一致すれば $|A_{k,i_1,\ldots,i_{m-1}}| = 0$ となるので、よって、

$$\sum_{k=1}^{n} b_{k1}|A_{k,i_1,\ldots,i_{m-1}}| = \left(\sum_{k=1}^{i_1-1} + \sum_{k=i_1+1}^{i_2-1} + \cdots + \sum_{k=i_{m-1}+1}^{n}\right) b_{k1}|A_{k,i_1,\ldots,i_{m-1}}| \tag{19}$$

となる。列の入れ換え (定理 5) を順に行なえば、

$$|A_{k,i_1,i_2,\ldots,i_{m-1}}| = -|A_{i_1,k,i_2,\ldots,i_{m-1}}| = (-1)^2|A_{i_1,i_2,k,\ldots,i_{m-1}}| = \cdots$$

のようになり、よって $i_s < k < i_{s+1}$ のとき

$$|A_{k,i_1,i_2,\ldots,i_{m-1}}| = (-1)^s|A_{i_1,\ldots,i_s,k,i_{s+1},\ldots,i_{m-1}}|$$

とできるので、(18) に (19) を代入すれば、(15), (16)、および $\{i_i,\ldots,i_{m-1},k\}$ を $\{j_1,\ldots,j_m\}$ と書くことにより、

$$|C| \ = \ \sum_{i_1<\cdots<i_{m-1}} \sum_{k=1}^{n} b_{k1}|A_{k,i_1,\ldots,i_{m-1}}| \left|B^{i_1,\ldots,i_{m-1}}_{2,3\ldots,m}\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i_1<\cdots<i_{m-1}} \sum_{k=1}^{i_1-1} b_{k1}|A_{k,i_1,\dots,i_{m-1}}| \left|B_{2,3\dots,m}^{i_1,\dots,i_{m-1}}\right| \\
&\quad + \sum_{i_1<\cdots<i_{m-1}} \sum_{k=i_1+1}^{i_2-1} (-1)^1 b_{k1}|A_{i_1,k,\dots,i_{m-1}}| \left|B_{2,3\dots,m}^{i_1,\dots,i_{m-1}}\right| \\
&\quad + \cdots + \sum_{i_1<\cdots<i_{m-1}} \sum_{k=i_{m-1}+1}^{n} (-1)^{m-1} b_{k1}|A_{i_1,\dots,i_{m-1},k}| \left|B_{2,3\dots,m}^{i_1,\dots,i_{m-1}}\right| \\
&= \sum_{j_1<\cdots<j_m} |A_{j_1,\dots,j_m}| b_{j_1 1} \left|B_{2,3\dots,m}^{j_2,j_3,\dots,j_m}\right| \\
&\quad + \sum_{j_1<\cdots<j_m} |A_{j_1,\dots,j_m}| b_{j_2 1} (-1)^1 \left|B_{2,3\dots,m}^{j_1,j_3,\dots,j_m}\right| \\
&\quad + \cdots + \sum_{j_1<\cdots<j_m} |A_{j_1,\dots,j_m}| b_{j_m 1} (-1)^{m-1} \left|B_{2,3\dots,m}^{j_1,j_2,\dots,j_{m-1}}\right| \\
&= \sum_{j_1<\cdots<j_m} |A_{j_1,\dots,j_m}| I, \\
I &= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} b_{j_k 1} \left|B_{2,3\dots,m}^{j_1,\dots,j_{k-1},j_{k+1}\dots,j_m}\right|
\end{aligned}$$

のようにすることができる。この、最後の行列式は、

$$\left|B_{2,3\dots,m}^{j_1,\dots,j_{k-1},j_{k+1}\dots,j_m}\right| = \Delta_{k1}\left(\left[* \ B_{2,3\dots,m}^{j_1,\dots j_m}\right]\right)$$

なので、

$$I = \begin{vmatrix} b_{j_1 1} & \\ \vdots & B_{2,3\dots,m}^{j_1,\dots j_m} \\ b_{j_m 1} & \end{vmatrix} = |B^{j_1,\dots,j_m}|$$

となる。よって、結局、

$$|C| = \sum_{j_1<\cdots<j_m} |A_{j_1,\dots,j_m}||B^{j_1,\dots,j_m}|$$

が得られたことになり、これで定理 7 の証明が終了する。

7 一次独立性

一次独立性は、例年講義で紹介している話ではないが、行列式の重要な性質の一つなので、ここでその証明を紹介しておく。この証明も、通常は行列の階数を元に考えるのが普通だと思うが、ここでは帰納法による証明を試みる。ただし、そのため議論がやや煩雑になる。

定義 8

- ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ の**一次結合** とは、

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k \quad (a_1, a_2, \ldots, a_k: \text{ スカラー})$$

  の形の式のことを言う。

- ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ が**一次従属** であるとは、

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{0} \text{ かつ } (a_1, \ldots, a_m) \neq (0, \ldots, 0) \tag{20}$$

  を満たす $a_1, \ldots, a_m$ が存在することを言う。

- ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ が**一次独立** であるとは、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ が**一次従属** ではない状態を指す。

(20) の場合、$a_j \neq 0$ となる a_j が少なくとも一つはあるので、それを使って

$$\boldsymbol{x}_j = \left(-\frac{a_1}{a_j}\right)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \left(-\frac{a_{j-1}}{a_j}\right)\boldsymbol{x}_{j-1} + \left(-\frac{a_{j+1}}{a_j}\right)\boldsymbol{x}_{j+1} + \cdots + \left(-\frac{a_n}{a_j}\right)\boldsymbol{x}_n$$

と書けることになり、$\boldsymbol{x}_j$ が残りの他のものの一次結合となる。

逆に、$\boldsymbol{x}_j$ が残りの他のものの一次結合であれば、

$$\boldsymbol{x}_j = b_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + b_{j-1}\boldsymbol{x}_{j-1} + b_{j+1}\boldsymbol{x}_{j+1} + \cdots + b_n\boldsymbol{x}_n$$

より、

$$b_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + b_{j-1}\boldsymbol{x}_{j-1} + (-1)\boldsymbol{x}_j + b_{j+1}\boldsymbol{x}_{j+1} + \cdots + b_n\boldsymbol{x}_n = \mathbf{0},$$
$$(b_1, \ldots, b_{j-1}, -1, b_{j+1}, \ldots, b_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

となるので一次従属となる。よって、一次従属であるとは、

「そのいずれかひとつが、他の残りのものの一次結合となる」

と言いかえることもできる。

例えば、平行でない 2 つの平面ベクトルや、一つの平面に乗らない 3 つの空間ベクトルなどは一次独立であるが、平行な 2 つのベクトルや、一つの平面上の 3 つ以上のベクトルなどは一次従属である。

定理 9

n 次正方行列

$$A = [\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix}$$

に対して、次の 3 つの条件は同値になる。

1. $|A| \neq 0$
2. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は一次独立
3. $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ は一次独立

この証明は、1. と 3. が同値であることが言えれば、2. は、

$${}^t\!A = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}, \quad |{}^t\!A| = |A|$$

より、

$$1. \iff |{}^tA| \neq 0 \iff {}^t\boldsymbol{a}_1, \ldots, {}^t\boldsymbol{a}_n \text{ が一次独立} \iff 2.$$

となって 1. と 2. が同値であることも言えるから、1. と 3. の同値性のみ証明すればよい。

まず、1. $\Rightarrow$ 3 を示す。もし $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ が一次独立でなければ、

$$\boldsymbol{\alpha}_j = b_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + b_{j-1}\boldsymbol{\alpha}_{j-1} + b_{j+1}\boldsymbol{\alpha}_{j+1} + \cdots + b_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

と書ける $\boldsymbol{\alpha}_j$ (と b_k) が存在するので、系 4 より、

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} \quad (1 \text{ 行目と } j \text{ 行目の入れかえ}) \\
&= -\begin{vmatrix} b_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + b_{j-1}\boldsymbol{\alpha}_{j-1} + b_{j+1}\boldsymbol{\alpha}_{j+1} + \cdots + b_n\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} \\
&= -\left\{ b_1 \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} + \cdots + b_{j-1} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{j-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} + b_{j+1} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{j+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} + \cdots + b_n \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

となるが、この行列式はいずれも 1 行目に等しい他の行が存在するのですべて 0 になり、よって $|A| = 0$ となる。つまり、3. でなければ 1. でないことになり、背理法により 1. $\Rightarrow$ 3. が言えたことになる。

今度は 3. $\Rightarrow$ 1. を考えるが、この証明に帰納法を用いる。$n = 1$ のときは明らかに成り立つから、$(n-1)$ 次では 1., 2., 3. の同値性が言えているとする。

3. $\Rightarrow$ 1. を示すために、3. であって、かつ 1. でないとして矛盾を導くことにする。つまり、

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n \text{ は一次独立で、かつ } |A| = 0 \text{ である}$$

と仮定する。

任意の k $(1 \le k \le n)$ に対し、$|A|(= 0)$ を k 列目で展開すると、

$$|A| = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+k} a_{pk} \Delta_{pk}(A) = 0 \tag{21}$$

を得る。一方、$j \ne k$ に対し、A の k 列目 $(= \boldsymbol{a}_k)$ を A の j 列目 $(= \boldsymbol{a}_j)$ で置きかえた行列 $\tilde{A}$ の行列式は、系 6 より 0 になるが、これを k 列目で展開すると

$$|\tilde{A}| = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+k} a_{pj} \Delta_{pk}(A) = 0 \tag{22}$$

となる。つまり、(21), (22) より、この場合は $j = k$ も含めてすべての j に対して (22) が成り立つことになるので、

$$\sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+k} \boldsymbol{\alpha}_p \Delta_{pk}(A) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+k} [a_{p1} \ \cdots \ a_{pn}] \Delta_{pk}(A) = \mathbf{0}$$

が言える。仮定により、$\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ は一次独立であるから、その係数の $(-1)^{p+k}\Delta_{pk}(A)$ はすべて 0 でなければならない。

よって、すべての p に対して $\Delta_{pk}(A) = 0$ となることになるが、k も任意であったので、結局この場合すべての i, j に対して $\Delta_{ij}(A) = 0$ であることになる。

今、A から i 行目と j 列目を取り除いた行列を $\delta_{ij}(A)$ と書くことにする (よって $\Delta_{ij}(A) = |\delta_{ij}(A)|$)。すると、$\delta_{ij}(A)$ は $(n-1)$ 次の正方行列で、$|\delta_{ij}(A)| = \Delta_{ij}(A) = 0$ なので、帰納法の仮定により、その $(n-1)$ 個の行ベクトルは一次従属となる。

よって、任意の j に対し、

$$\delta_{1j}(A) = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2^j \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_n^j \end{bmatrix}$$

($\tilde{\alpha}_k^j$ は α_k から j 列目の成分を取り除いた $(n-1)$ 次元行ベクトル) とすれば

$$\tau_{j2}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2^j+\cdots+\tau_{jn}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_n^j=[\tau_{j2}\ \cdots\ \tau_{jn}]\delta_{1j}(A)=\mathbf{0},\quad (\tau_{j2},\ldots,\tau_{jn})\neq(0,\ldots,0)$$

となる τ_{jk} が存在することになる。$\tau_{j1}=0$ と定めれば、これは

$$\tau_{j1}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1^j+\cdots+\tau_{jn}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_n^j=\mathbf{0} \tag{23}$$

と書くこともできるから、

$$\lambda_j=\tau_{j1}a_{1j}+\cdots+\tau_{jn}a_{nj}$$

とすれば、(23) より

$$\tau_{j1}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\tau_{jn}\boldsymbol{\alpha}_n=[0\ \cdots\ \lambda_j\ \cdots\ 0]=\lambda_j{}^t\boldsymbol{e}_j$$

($\boldsymbol{e}_j$ は、j 番目の成分が 1 でそれ以外は全部 0 の n 次元列ベクトル) となり、

$$[\tau_{j1}\ \cdots\ \tau_{jn}]A=\lambda_j{}^t\boldsymbol{e}_j \tag{24}$$

となることになる。

今、もし $\lambda_j=0$ であると、$[\tau_{j1}\ \cdots\ \tau_{jn}]\neq[0\ \cdots\ 0]$ でかつ

$$\tau_{j1}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\tau_{jn}\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$$

となるので、これは $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ が一次独立であることに矛盾する。よって、$\lambda_j\neq 0$ であることになる。

この (24) をすべての j で考えれば、結局 $T=[\tau_{ij}]$ に対し

$$TA=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$$

($\mathrm{diag}\{a_1,\ldots,a_n\}$ は、$a_1,\ldots,a_n$ を対角成分とする対角行列) となることになる。

さて、この式の右辺は対角行列で、その行列式は 1 列目から展開していけばわかるが、

$$|\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}| = \lambda_1\cdots\lambda_n$$

の λ_j の積となり、$\lambda_j \neq 0$ よりこれは 0 ではない。しかし左辺の行列式は、仮定 $|A| = 0$ より $|TA| = |T||A| = 0$ となってしまうので、よって $\lambda_1\cdots\lambda_n = 0$ となり矛盾となる (なお、T も $\tau_{j1} = 0$ より 1 列目がすべて 0 なので $|T| = 0$ でもある)。

よって、3. であって、かつ 1. でないとすると矛盾が起こることになり、ゆえに 3. ⇒ 1. が言えることになる。

定理 10

$m \leq n$ に対して、$m \times n$ 行列

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix}$$

に対して、次の 2 つの条件は同値になる。

1. $|A_{i_1,\ldots,i_m}| \neq 0$ となる $i_1 < \cdots < i_m$ の組が存在する。
2. $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ は一次独立

1. ⇒ 2. は比較的容易であるので、まずこちらを示す。

$$|A_{i_1,\ldots,i_m}| \neq 0 \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n)$$

とすると、定理 9 より、この行列の行ベクトル

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\ldots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m \quad \left(A_{i_1,\ldots,i_m} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m \end{bmatrix} \right)$$

は一次独立となる。よって、

$$c_1\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \cdots + c_m\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m = \mathbf{0} \tag{25}$$

ならば、必ず $(c_1, \ldots, c_m) = (0, \ldots, 0)$ となる。

今、

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

であるとすると、この式の $i_1, \ldots, i_m$ 成分が (25) であるので、よって $(c_1, \ldots, c_m) = (0, \ldots, 0)$ となる。ゆえに $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ は一次独立である。

次に、2. $\Rightarrow$ 1. を、n に関する帰納法で証明する。$n = m$ のときは、定理 9 より明らかに成り立つので、$n > m$ として、$(n-1)$ のときに成り立つとして n のときに成り立つことを示す。そして、そのために、2. であって、かつ 1. でないとして矛盾を導く。すなわち、

> $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ は一次独立で、かつ、すべての $i_1 < \cdots < i_m$ に対して、$|A_{i_1,\ldots,i_m}| = 0$ である

と仮定する。

今、A から j 列目を取り除いた $m \times (n-1)$ 行列 $A_{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n}$ を $A^{(j)}$ と書くこととし、その行ベクトルを上から順に $\boldsymbol{\alpha}_1^j, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m^j$ と書くことにする。

$$A^{(j)} = A_{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^j \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^j \end{bmatrix}$$

この $A^{(j)}$ に対しても、仮定よりすべての $1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n-1$ に対して、

$$|A^{(j)}_{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n}| = 0$$

が成り立つことになるので、よって帰納法の仮定により、$A^{(j)}$ の行ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_1^j, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m^j$ は一次従属となる。よって、

$$\tau_{j1}\boldsymbol{\alpha}_1^j + \cdots + \tau_{jm}\boldsymbol{\alpha}_m^j = \mathbf{0}, \quad (\tau_{j1}, \ldots, \tau_{jm}) \neq (0, \ldots, 0) \tag{26}$$

となる τ_{jk} が存在する。

$$\tau_{j1}a_{1j} + \cdots + \tau_{jm}a_{mj} = \lambda_j$$

とすれば、(26) より

$$\tau_{j1}\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \tau_{jm}\boldsymbol{\alpha}_m = \lambda_j{}^t\boldsymbol{e}_j \tag{27}$$

となる。もし、$\lambda_j = 0$ ならば、(27) は $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ が一次従属であることを意味するので仮定に反する。よって $\lambda_j \neq 0$ である。(27) は

$$[\tau_{j1}\ \cdots\ \tau_{jm}]A = \lambda_j{}^t\boldsymbol{e}_j$$

となるので、$1 \leq j \leq n$ のものをすべて合わせれば、

$$T = [\tau_{ij}] = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \cdots & \tau_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_{n1} & \cdots & \tau_{nm} \end{bmatrix} \quad (n \times m \text{ 行列})$$

に対し

$$TA = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

となる。この行列式を考えれば、

$$|\mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}| = \lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$$

となる。一方、T は $n \times m$ 行列、A は $m \times n$ 行列で $n > m$ であるから、定理 7 により $|TA| = 0$ となるので矛盾となる。これで定理 10 が示されたことになる。

この定理を用いれば、行列の階数 (ランク) と一次独立性の定理も証明できるので、それもついでに紹介しておく。A を $m \times n$ 行列とし、$k \leq n$ かつ $k \leq m$ のとき、$1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ に対し

$$\left|A^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}\right|$$

の形の行列式を、A の k 次の **小行列式** と呼ぶ。

k 次の小行列式がすべて 0 なら、$p > k$ に対し、p 次の小行列式もすべて 0 となることが展開定理から容易に分かるので、よって、A に対して

> 「$(k+1)$ 次以上の小行列式はすべて 0 で、k 次 (および k 以下の次数) の小行列式には、少なくとも一つ 0 でないものがある」

を満たすような k が一つ定まることになる。この k を A の **階数** または **ランク** と呼び、rank$A$ であらわす。なお、定理 10 のような場合は rank$A = m$, 零行列の場合は rank$O = 0$ と見る。

定理 11

$$A = [\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix}$$

に対し、$k = \mathrm{rank}A$ は、ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ から取り出せる一次独立なベクトルの組の最大の個数に等しく、$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ から取り出せる一次独立なベクトルの組の最大の個数に等しい。

これは、定理 10 より容易に示される。$k = \mathrm{rank}A$ より、

$$\left|A^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}\right| \neq 0$$

となるような $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ が少なくとも一つ存在するが、この場合、定理 10 より明らかに $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_k}$ は一次独立で、$\boldsymbol{a}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_k}$ も一次独立となる。よって、一次独立なベクトルが選べる最大数は、少なくとも k 以上である。

逆に、$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_p}$ が一次独立なら、行列 $A^{i_1,\ldots,i_p}$ を考えれば定理 10 より、

$$\left|A^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_p}\right| \neq 0$$

となるような $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$ が少なくとも一組存在することになるから、よって $p \leq k$ である。

$\boldsymbol{a}_j$ に関しても同様なので、ゆえに、一次独立なベクトルの組の最大数と、$\mathrm{rank}A$ は等しいことになる。

8 おわりに

帰納的な行列式の定義から、行列式の主要な性質を帰納法で証明してみたが、そのうちいくつかは、最初に

> $|A|$ は、A の n^2 個の要素のうちの n 個の要素の積からなる $n!$ 個の項に $+$ か $-$ をつけたものの和となっていて、
>
> - $+$ をつけた項と $-$ をつけた項の数は等しい ($= n!/2$ 個)
> - 各項の n 個の積の要素は、そのすべてが異なる行、異なる列に入っていて、よって各項にはすべての行の要素、すべての列の要素が一つずつ含まれている
> - 各項の n 個の積の要素の取り方に重複はなく、よってそれらの組合せのすべて (総数 $n!$ 個) が丁度現れる

という事実を証明しておけば (これの証明自体はさほど難しくはない[2])、そこから簡単に導かれるのであるが、ここではあえて帰納法にこだわった証明を行った。

よって、あまり自然でもなく、必要以上に煩雑な議論になってしまっているところもあるように感じる。

また最初に述べたように、これはあくまで数学者としての証明に対する興味の結果であり、学生の勉強に向くものではなく、実用性もほとんどないと思われる。よってこれを見ても (ましてや勉強しても) 何かの役に立つ、ということはまずないと思う。

しかし逆に言えば、数学者の問題意識はどこにあるのか、つまり普通の人とは違ってこういうところが気になる、むしろこういうところに興味がある、あるいは普段こういう証明などを考えている、ということを知ってもらうという点では意味があるのかもしれない[3]。

[2] 難しいのは、どれに $+$ をつけてどれに $-$ をつけるかを決めるやり方である。
[3] しかし、それを「知ってもらう」ということ自体にあまり意味があるような気もしない。