2022 年 09 月 14 日

積、商、合成関数等のテイラー展開について その3

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

昔、テイラー展開の計算について、教科書には載っていない話をいくつか書いた ([1],[2],[3])。それ以外にも、別に書いた記事の中にテイラー展開の計算を書いたものもいくつかある。

それに関して、ネット上で、[4] を引いて、$x/(1-e^{-x})$ のマクローリン展開を同様にできないか、という質問があがっているのを最近見つけた。

それに対して、質問者の方法は間違い、という回答がついていて、「展開できる」という話も書かれてはいるようであったが、その方法についてはなかったようなので、せっかくなのでここに少しまとめておく。

2 不定形の場合のマクローリン展開

まず、関数

$$f_1(x)=\frac{x}{1-e^{-x}}\quad(x\neq 0)$$

について考える。これは、$x=0$ では分母は 0 になってしまうが、分子もそこで 0 なので、$x=0$ では 0/0 の不定形になっていて、$x=0$ への極限値は 1 となることが容易にわかる。関数論の言葉を使えば、この $x=0$ は $f_1(x)$ の除去可能特異点になっていて、よって、

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-e^{-x}} & (x\neq 0)\\[2ex] 1 & (x=0)\end{cases}$$

と定義すれば、$f_1(x)$ は滑らかな関数、特に解析関数になり、当然マクローリン展開も可能である。そのマクローリン展開の方法を紹介する。

一般に、$f(x), g(x)$ の $x=a$ でのテイラー展開が、

$$\begin{aligned} f(x) &= a_k(x-a)^k + a_{k+1}(x-a)^{k+1} + \cdots \\ g(x) &= b_k(x-a)^k + b_{k+1}(x-a)^{k+1} + \cdots, \quad (b_k \neq 0) \end{aligned}$$

のように k 位 $(k \geq 1)$ の零点を持つ場合、商 $f(x)/g(x)$ は $0/0$ となるが、$(x-a)^k$ で約分ができるため $x=a$ での極限は存在し、$x=a$ はこの商の除去可能特異点となる。よってこの商を

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{a_k(x-a)^k + a_{k+1}(x-a)^{k+1} + \cdots}{b_k(x-a)^k + b_{k+1}(x-a)^{k+1} + \cdots} \\ &= \frac{1}{b_k} \frac{a_k + a_{k+1}(x-a) + a_{k+2}(x-a)^2 + \cdots}{1 + (b_{k+1}/b_k)(x-a) + (b_{k+2}/b_k)(x-a)^2 + \cdots} \end{aligned}$$

と変形し、

$$h_1(x) = a_k + a_{k+1}(x-a) + a_{k+2}(x-a)^2 + \cdots = \frac{f(x)}{(x-a)^k} \tag{1}$$

$$h_2(x) = \frac{b_{k+1}}{b_k}(x-a) + \frac{b_{k+2}}{b_k}(x-a)^2 + \cdots = \frac{g(x)}{b_k(x-a)^k} - 1 \tag{2}$$

とすれば、$h_2(x) = O(x-a)$ であるから、分母は

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{b_k} \times \frac{h_1(x)}{1+h_2(x)} = \frac{h_1(x)}{b_k} \times (1 - h_2(x) + h_2^2(x) + \cdots) \tag{3}$$

のように展開ができることになる。この式に、(1), (2) を代入して形式的に展開すれば、$f(x)/g(x)$ の $x=a$ でのテイラー展開が得られることになる。例えば、3 次以上の項を δ_3 と書くことにして 2 次の項まで計算すれば、

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{1}{b_k}(a_k + a_{k+1}(x-a) + a_{k+2}(x-a)^2 + \delta_3) \\ &\quad \times \left\{ 1 - \left(\frac{b_{k+1}}{b_k}(x-a) + \frac{b_{k+2}}{b_k}(x-a)^2 + \delta_3 \right) + \left(\frac{b_{k+1}^2}{b_k^2}(x-a)^2 + \delta_3 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{b_k}(a_k + a_{k+1}(x-a) + a_{k+2}(x-a)^2 + \delta_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times\left\{1-\frac{b_{k+1}}{b_k}(x-a)+\frac{b_{k+1}^2-b_kb_{k+2}}{b_k^2}(x-a)^2+\delta_3\right\}\\
=\ &\frac{a_k}{b_k}+\frac{a_{k+1}b_k-a_kb_{k+1}}{b_k^2}(x-a)\\
&+\frac{(b_{k+1}^2-b_kb_{k+2})a_k-b_kb_{k+1}a_{k+1}+b_k^2a_{k+2}}{b_k^3}(x-a)^2+\delta_3
\end{aligned}$$

のようになる。

これと同じようにすれば、$f_1(x)$ のマクローリン展開も得られ、

$$\begin{aligned}
e^{-x} &= 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+O(x^4),\\
1-e^{-x} &= \frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+O(x^4),\\
f_1(x) &= \frac{x}{x/1!-x^2/2!+x^3/3!+O(x^4)} = \frac{1}{1-(x/2!-x^2/3!+O(x^3))}\\
&= 1+\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{3!}+O(x^3)\right)+\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{3!}+O(x^3)\right)^2\\
&= 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+O(x^3)
\end{aligned}$$

のようになる。

つまり、0/0 の場合は、テイラー展開レベルで約分をし、それから商のテイラー展開の手法を利用すればいいわけである。

なお、元の質問者は、

$$\frac{1}{1-e^{-x}}=1+e^{-x}+(e^{-x})^2+\cdots$$

のように展開しようとしていたようだがこれは無理で、$x=0$ の近くでは e^{-x} は 0 に近くない (1 に近い) ためこのような展開はできない。

$$\frac{1}{1-y}=1+y+y^2+\cdots$$

が利用できるのは、あくまで y が 0 に近い場合 (正確には $|y|<1$ の場合) だけである。このように、合成関数の形でテイラー展開を行う場合には、そういう点に注意する必要がある。

参考文献

[1] 竹野茂治、「テイラー展開について」(2001)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic1/data/taylor.pdf

[2] 竹野茂治、「積、商、合成関数等のテイラー展開について」(2002)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic1/data/taylor2.pdf

[3] 竹野茂治、「積、商、合成関数等のテイラー展開について その 2」(2003)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic1/data/taylor3.pdf

[4] 竹野茂治、「双曲線関数について」(2010)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/data/hyper1.pdf

[5] Yahoo 知恵袋: 数学 (2022-04-23)
https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q13260759703