平成 14 年 7 月 30 日

積、商、合成関数等のテイラー展開について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

例年基礎数理 I では、テイラー展開は

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + O((x-a)^n) \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + O((x-a)^n) \end{aligned}$$

であると講義しているが、その収束性の話 (収束半径、収束判別法) や、積、商、合成関数等のテイラー展開については時間がないためにほとんど行なっていないし、教科書にもあまり書いてない (多少は書いてある教科書を使ったこともある)。

よって、常に上の公式で計算しようとすると、特に積、商、合成関数等の場合は計算が大変になる。ここでは、

$$f(t) = \cos(at)\,\mathrm{sech}(bt)$$

を例に取り、そのマクローリン展開 (中心 0 での展開) の 5 次までの展開式を求めることによりその方法を紹介し、最後に数式処理ソフトの Mathematica による計算例と比較してみることにする。

2 手計算

まず、良く知られているように $x = 0$ の近くでは

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6) \tag{1}$$

である ($O(x^n)$ は n 次以上の項を表す) ので、

$$\cos(at) = 1 - \frac{a^2}{2}t^2 + \frac{a^4}{24}t^4 + O(t^6) \tag{2}$$

となる ($t \to 0$ のとき $at \to 0$ なので (1) にそのまま $x = at$ を代入してよい)。

また、

$$\mathrm{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

であり、良く知られているように

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^6)$$

なので

$$\begin{aligned} e^x + e^{-x} &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^6) \\ &\quad +1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + O(x^6) \\ &= 2\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right) \end{aligned}$$

となり、よって

$$\mathrm{sech}(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)}$$

となる。

ここで、良く知られているように

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + O(x^3) \tag{3}$$

であり、$x \to 0$ のとき

$$\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6) \to 0$$

なので、この (3) の x の代わりにこの項を代入することが出来て、

$$\begin{aligned} \mathrm{sech}(x) &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)} \\ &= 1 - \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right) + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right)^2 + O\left(\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right)^3\right) \end{aligned}$$

となる。ここで、3 番目の項は展開すれば分かるが

$$\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right)^2 = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + O(x^6) = \frac{x^4}{4} + O(x^6)$$

であり、4 番目の項も明らかに

$$O\left(\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right)^3\right) = O(x^6)$$

となるので、結局

$$\mathrm{sech}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right)x^4 + O(x^6) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)$$

であることがわかり、よって

$$\mathrm{sech}(bt) = 1 - \frac{b^2}{2}t^2 + \frac{5b^4}{24}t^4 + O(t^6) \tag{4}$$

となる。

故に、(2), (4) により

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(at)\,\mathrm{sech}(bt) \\ &= \left(1-\frac{a^2}{2}t^2+\frac{a^4}{24}t^4+O(t^6)\right)\left(1-\frac{b^2}{2}t^2+\frac{5b^4}{24}t^4+O(t^6)\right) \\ &= 1+\left(-\frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{2}\right)t^2+\left(\frac{a^4}{24}+\frac{a^2b^2}{4}+\frac{5b^4}{24}\right)t^4+O(t^6) \end{aligned}$$

となる。

以上の計算方法は、いずれも形式的な計算にも見えるが、実際にはいずれも正当づけられる方法である。

これを、テイラー展開の定義に戻って $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$ を計算する、というやりかたで求めようとすると、高階の導関数の計算がかなり難しくむしろ計算ミスを犯しやすくなるので、今のようにする方がよいと思われる。

3 Mathematica による計算

今の関数の計算を、Mathematica で動かしてみた結果を紹介する。Mathematica は市販の数式処理ソフトで、色んな OS (UNIX, MS–Windows, Mac OS) で動くものがあり、グラフィック出力も行なえ非常に高機能なソフトで、微積分や微分方程式の解などを近似値でなく式として出力することが可能である。もちろんテイラー展開の計算も行なうことが出来る。

今回は UNIX 版 (Solaris) を使用した結果を紹介する。

```
% math
Mathematica 3.0 for Solaris
Copyright 1988-97 Wolfram Research, Inc.
-- Motif graphics initialized --

In[1]:= Cos[a*x]*Sech[b*x]

Out[1]= Cos[a x] Sech[b x]

In[2]:= Series[%,{x,0,5}]

                2    2          4    2  2      4
              -a    b    2     a    a  b    5 b    4       6
Out[2]= 1 + (--- - --) x  + (-- + ----- + ----) x  + O[x]
              2    2          24     4      24

In[3]:= Quit
```

上記の出力のうち、最初の `% math` (Mathematica の起動) と `In[`n`]:=` の後に続く部分が私が入力したもので、`Out[`n`]:=` に続く部分が Mathematica が返した出力である。

最初に関数を設定する。$\cos x$ も $\mathrm{sech}\,x$ も Mathematica にはあらかじめ `Cos[x]`, `Sech[x]` として組み込まれている。そして `Series[`f`,{`x`,`a`,`n`}]` がテイラー展開を行なわせる命令である。

f が対象となる関数、x がその変数、a が展開の中心、n が展開を行なう次数である。関数として % と指定すると直前の式が使われる。

今回は 5 次で展開したが、全節で計算したものと同じものが得られていることが分かると思う。

この計算を手元の Mac 版 (Mathematica 2.2, Macintosh LC630) でも試してみたが、いずれも瞬時に計算結果が出力される。Mathematica にとってはこのくらいは何でもない計算なのであろう。