平成 13 年 9 月 14 日

テイラー展開について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

例年、テイラー展開

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots(1)$$

の公式が何故成り立つのか、ということの説明に苦慮している。通常、部分積分やコーシーの平均値の定理などを使って「証明」するのであろうが、それではなんとなく「説明」になっていないように感じている。

ここ 2 年程それに対し「テイラー展開 = 近似式」ということを全面に押し出して説明をしてきた。それが必ずしも部分積分などよりうまく「説明」できているとは思ってはいないが、備忘録も兼ねてここでまとめておく。

2 2000 年基礎数理 II

この年の基礎数理 II では、ロピタルの定理と「n 次近似」を使って説明した。まず最初に考えた説明は以下の通りである:

$f(x)$ が無限級数

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2++A_3(x-a)^3+A_4(x-a)^4+\cdots \qquad (2)$$

と展開されたとする。(2) に $x=a$ を代入すると

$$f(a)=A_0+0+0+0+0+\cdots \quad\Rightarrow\quad A_0=f(a)$$

(2) の両辺を微分すると

$$f'(x)=A_1+2A_2(x-a)+3A_3(x-a)^2+4A_4(x-a)^3+\cdots$$

これに $x=a$ を代入すると

$$f'(a)=A_1+0+0+0+\cdots \quad\Rightarrow\quad A_1=f'(a)$$

もう一回微分して

$$f''(x)=2\cdot 1A_2+3\cdot 2A_3(x-a)+4\cdot 3A_4(x-a)^2+\cdots$$

これに $x = a$ を代入すると

$$f''(a) = 2 \cdot 1A_2 + 0 + 0 + \cdots \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{f''(a)}{2 \cdot 1}$$

同様に微分して $x = a$ を代入する。

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1A_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2A_4(x - a) + \cdots$$
$$f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot 1A_3 + 0 + \cdots \quad \Rightarrow \quad A_3 = \frac{f'''(a)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

これを繰り返すことで

$$A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

が得られる。

ただし、これではあまりに理論がなさ過ぎ、そもそも (2) と置く (展開する) ことの意味が分からない。

そこで、この年は「n 次近似」を次のように定義して、ロピタルの定理を使って説明を行った。なお、以下簡単のため $a = 0$、すなわちマクローリン展開を考えることとする。

定義 1

関数 $f(x)$ に対して $g(x)$ が

$$\frac{f(x) - g(x)}{x^n} \to 0 \quad (x \to 0 \text{ のとき}) \tag{3}$$

となるとき、$g(x)$ は $f(x)$ を $(x = 0$ で$)$ n 次に近似する、または n 次近似である と呼ぶことにする。

(3) は

$f(x) - g(x)$ は x^n より速く 0 に近づく

ことを意味し、すなわち

$f(x) - g(x)$ は x^n より 0 に近い

ことになる。(注: これを $g(x) = f(x) + o(x^n)$ と書くこともある)

定理 2

f, g: n 回微分可能で、$f^{(n)}, g^{(n)}$ が連続であるとき、

g が f の n 次近似 $\quad \Leftrightarrow \quad f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$

証明

$n = 2$ として証明する。

$(\Rightarrow)$

$$\frac{f(x) - g(x)}{x^2} \to 0 \quad (x \to 0 \text{ のとき}) \tag{4}$$

と仮定する。

1. (4) より

$$f(x) - g(x) = x^2 \frac{f(x) - g(x)}{x^2} \to 0 \quad (x \to 0 \text{ のとき})$$

となるが、$f(x), g(x)$ の連続性により左辺は

$$f(x) - g(x) \to f(0) - g(0) \quad (x \to 0 \text{ のとき})$$

となるので、よって

$$f(0) - g(0) = 0 \tag{5}$$

となる。

2. (4) より

$$\frac{f(x) - g(x)}{x} = x \frac{f(x) - g(x)}{x^2} \to 0 \quad (x \to 0 \text{ のとき})$$

となるが、一方で (5) によりこの左辺は分子も分母も 0 に収束する不定形であり、

$$\frac{\{f(x) - g(x)\}'}{(x)'} = \frac{f'(x) - g'(x)}{1} \to f'(0) - g'(0) \quad (x \to 0 \text{ のとき})$$

となることが $f'(x), g'(x)$ の連続性によりいえる。よって、ロピタルの定理により

$$f'(0) - g'(0) = 0 \tag{6}$$

となる。

3. (4) の左辺は (5) により不定形であり、

$$\frac{\{f(x) - g(x)\}'}{(x^2)'} = \frac{f'(x) - g'(x)}{2x}$$

も、(6) により不定形となる。そして、

$$\frac{\{f'(x) - g'(x)\}'}{(2x)'} = \frac{f''(x) - g''(x)}{2} \to \frac{f''(0) - g''(0)}{2} \quad (x \to 0 \text{ のとき})$$

となることが、$f''(x), g''(x)$ の連続性によりいえ、よってロピタルの定理により

$$\frac{f''(0) - g''(0)}{2} = 0$$

すなわち

$$f''(0) - g'((0) = 0 \tag{7}$$

が成り立つ。

以上 $1., 2., 3.$ の (5),(6),(7), により

$$f(0) = g(0),\ f'(0) = g'(0),\ f''(0) = g''(0)$$

となる。

$(\Longleftarrow)$

逆に

$$f(0) = g(0),\ f'(0) = g'(0),\ f''(0) = g''(0)$$

が成り立つとすると、ロピタルの定理により

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - g'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x) - g''(x)}{2} = 0$$

■

3 2001 年基礎数理 I

前節の方法は厳密性はあるが、証明は必ずしも学生にとって簡単ではなく、そこで説明 (理解) の流れが切れてしまい、必ずしも近似による説明がうまくいったとは思えない。

よって今年はそのような証明は捨て、ロピタルの定理を全面に出してそれにより近似式を逐次作成する、という方法を取ってみた。

$y = f(x)$ の $x = a$ の近くでの y の値は、$x = a$ での接線

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

で近似できる。すなわち、

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)\ \ (x \approx a \text{ のとき}) \tag{8}$$

であることになる。右辺は x の 1 次式なので、これは $f(x)$ の 1 次近似式である と呼ばれる。

$$f(x) \approx f(a)\ \ (x \approx a \text{ のとき}) \tag{9}$$

が 0 次近似式である。

もちろん、0 次近似より 1 次近似式の方が誤差が少なく近似が良い。2 次、3 次の方が更に誤差が少なくなる。その 2 次、3 次の近似式をロピタルの定理を用いて求めてみる。

以下簡単のため $a = 0$ とする。

1. まずは、0 次近似式の誤差を考えて 1 次近似式を得ることを考えてみる。

   $a = 0$ のとき、(9) の誤差は $f(x) - f(0)$ であり、これはもちろん $x \to 0$ のときに 0 に収束するが、これと x 自身とを比較してみると

   $$\frac{f(x) - f(0)}{x}$$

   は分子、分母ともに 0 に収束するので、ロピタルの定理により

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{1} = f'(0)$$

   となる。つまり、これは

   $$f(x) - f(0) \approx f'(0)x \quad (x \approx 0 \text{ のとき})$$

   であることを意味する。この $f(0)$ を右辺に移項したものが (8) である。

2. 次は 1 次近似式の誤差 $f(x) - f(0) - f'(0)x$ を調べてみる。x と比較するとロピタルの定理により

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{1} = 0$$

   となるので、x よりずっと小さい (当前でもある)。x^2 と比較してみると

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2}$$

   となる。これは

   $$f(x) - f(0) - f'(0)x \approx \frac{f''(0)}{2}x^2 \quad (x \approx 0 \text{ のとき})$$

   を意味する。これにより 2 次近似式

   $$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \quad (x \approx 0 \text{ のとき})$$

   が得られる。

3. 同様に、この式の誤差

   $$f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2}x^2$$

を x^3 と比較することで

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x-\dfrac{f''(0)}{2}x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)-f''(0)x}{3x^2}=\frac{f'''(0)}{6}$$

(2 次近似式を得る極限の計算の f を f' としたものを 3 で割ったもの)

が得られる。これにより 3 次近似式

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3\quad (x\approx 0\text{ のとき})$$

が得られるが、これを繰り返すことでテイラー展開 (マクローリン展開)

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots\quad (x\approx 0\text{ のとき})$$

が得られる。

4 最後に

今年の方法も、結局何故各項が $f^{(n)}(a)(x-a)^n/n!$ になるのか、ということは見にくくなっていて、自分でロピタルを使って計算してみないと分からないと思う。また、実際の講義では、$f(x)$ を e^x としてやったのだが、2 次近似式を得るときに、

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)$$

を誤差と考え、これと x との比

$$\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{x}$$

を考えてしまい、これによりわかりにくくなってしまったようでもあった。

今後もより良く説明できる方法を検討していく必要があると思われる。