2015 年 12 月 07 日

サインの極限について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

$\sin x$, $\cos x$ の導関数を求めるときに使われる極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{1}$$

には、循環論法が起こりうることが指摘されている。それは、(1) の証明に扇形の面積を使うものがあるのだが、それだと循環論法になってしまう、つまりその証明で使われる命題をたどると結局 (1) の結果を使っていることになる、という主張である。

実際、手近のいくつかの教科書や参考書などを見ると、(1) を扇形の面積を用いて証明しているものがいくつかある。

その循環論法を避けるために、(1) を扇形の弧の長さを用いて証明をしている場合もあるが、それはそれで問題がないわけではない。

それらに関して、少し考えたこともあるので、ここに書いておく。

2 循環論法

まず、(1) にまつわる循環論法について説明しておく。

元々「円周率 (π)」は、円の面積から定義するものではなく、円の円周と直径の比として定義される:

$$\pi=\frac{\text{円周}}{\text{直径}} \tag{2}$$

よって、

$$\text{円の面積}\ =\pi r^2 \tag{3}$$

であるという事実は円周率の定義ではなく、(2) から導かなければいけない「定理」である。

現代数学では、円のように、

「曲線で囲まれた図形の面積は積分によって定義すべきもの」 (4)

と考えられているので、その立場からすれば、半径 r の円の面積 S は定積分

$$S=2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx \tag{5}$$

によって定義されることになる。この積分の計算には、$x=r\sin\theta$ $(-\pi/2\leq\theta\leq\pi/2)$ のような置換積分が用いられ、

$$\frac{dx}{d\theta}=r\cos\theta \tag{6}$$

より、

$$\begin{aligned} S &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{r^2-r^2\sin^2\theta}\,r\cos\theta\,d\theta = 2r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = 2r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\ &= 2r^2\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi r^2 \end{aligned} \tag{7}$$

となる。

さて、(1) の証明であるが、まず、$x \to -0$ に対しては、$x = -t$ とすれば $t \to +0$ となり、

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{t\to +0}\frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\to +0}\frac{\sin t}{t} \tag{8}$$

となるので、$x \to +0$ の方だけを考えればよい。

そして、その極限が 1 にあることを示すには「はさみうちの原理」を使うのであるが、扇形の面積を使う方法は以下の通り (図 1)。

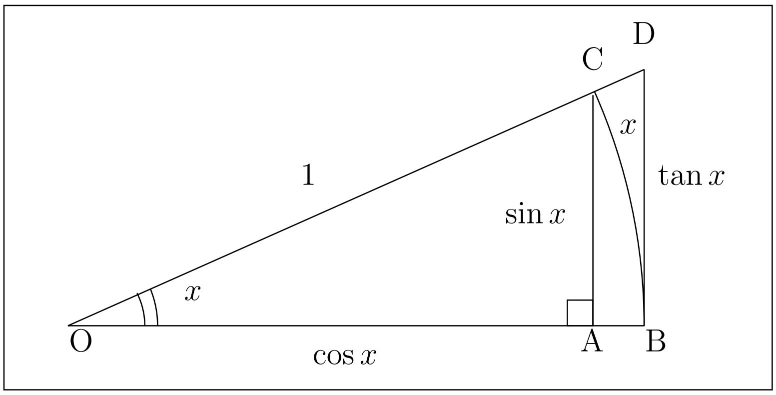

図 1: はさみうちの図

中心角 x (ラジアン)、半径 1 の扇形で、

$$\triangle\mathrm{OAC} < \text{扇形 OBC} < \triangle\mathrm{OBD} \tag{9}$$

という面積に関する不等式を考えれば、

$$\frac{1}{2}\sin x\cos x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \tag{10}$$

なので、$\sin x/2$ で割れば、

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

となり、$x \to +0$ とすれば、はさみうちの原理によって

$$\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{11}$$

が得られる、という論法である。

△OAC の代わりに △OBC (=$\sin x/2$) を使うこともあるが、違いはほとんどない。
そして、(1) を元にして、

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2} \tag{12}$$

が得られ、(1) と (12) により、

$$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sin x\,\frac{\cos h-1}{h}+\frac{\sin h}{h}\,\cos x\right)=\cos x \tag{13}$$

と $\sin x$ の導関数が得られる。
さて、ここまでの話でどこが循環論法かと言えば、それは (9) で使用した扇形の面積である。

> 扇形 OBC の面積が $x/2$ になる、ということには、円の面積の公式 (3) を使っていることになるが、円の面積は (5) によって定義され、それは (7) で見たように $\sin x$ の導関数を必要とし、$\sin x$ の導関数を導くには (1) が必要である、

という構造、すなわち (1) を導くのに (1) が必要になってしまっているのが循環論法である、という話である。

3 弧の長さによる証明

前節で述べた循環論法を避ける方法として、いくつかの方法が既に提示されている。例えばその代表的なものとして、三角関数の定義を変える方法や、(1) の証明で扇形の面積を使わない方法などがある。
三角関数の定義を変える方法とは、直角三角形の辺の比による定義ではなく、マクローリン級数 (例えば [1]) や、微分方程式の解として定義する方法であり、それにより (1) や三角関数の導関数を円の面積などとは無関係に導く方法である。これは、もちろんかなり大がかりだし、初学者に学ばせるためには適切な定義ではなく、あくまで数学の世界での論理的な理論の構築のためだけの方法に過ぎない。
一方、(1) の証明で扇形の面積を使わない方法とは、より π の定義に近い弧長を用いる方法で (例えば [2])、良くみるのは、

$$\mathrm{AC}<\text{ 弧}\,\mathrm{BC}<\mathrm{BD} \tag{14}$$

により、

$$\sin x<x<\tan x \tag{15}$$

となる、という不等式である。この場合は弧 BC $=x$ であることは弧度法の定義から問題なく得られるし、これが得られれば、面積による方法と同様にはさみうちの原理により (1) も得られ、大がかなりな変更でもなく、循環論法も一応避けていることになる。
ただ、この方法にもやや問題が含まれている。そのひとつは、「曲線の長さ」も折れ線の極限として定義され、面積同様積分で計算するものになるので、そこに置換積分を使うなら同じ循環論法になるのでは、という話である。しかし、そういう話になると、それは円周率の定義 (2)

や、弧度法自体の見直しにも関わる大きな話で、どこまでを認めて、どこからを示すのかを初めから考え直さないといけないことになってしまう。

もう一つ別な問題があるが、それは、(14) は本当に明らかだろうか、という話である。それは私も以前から疑問であり、あまりそれに触れている物を見たことがなかったので不思議に思っていた。「AC < 弧 BC」の方は確かに明らかだが、問題は「弧 BC < BD」の方で、これはそう明らかとは思えない。実際、この弧長による (1) の証明を採用している [2] でもこの部分に詳しい証明 (そしてやや面倒な証明) を書いているようである。となると、それを高校や大学の教育現場で導入することは難しいような気がする。

しかし、この不等式 (14) は、以下の不等式に変えたらどうだろうか。

$$\mathrm{AC} < \text{弧}\,\mathrm{BC} < \mathrm{BD} + \mathrm{CD} \tag{16}$$

「弧 BC < BD + CD」なら、B から C への経路では弧の方が近道になりそうであることは直感的に受け入れやすいのではないかと思う。一応厳密な証明も可能であり、それは次節で紹介する。

(16) は、数式では

$$\sin x < x < \tan x + \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) \tag{17}$$

を意味し、よって $\sin x$ で割れば

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x \cos x}$$

となるが、

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x)\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{(1 + \cos x)\cos x} \to 0 \ \ (x \to 0 \text{ のとき})$$

となるので、この (17) からも確かに (1) が得られることにはなる。ただし、(16) を用いた証明はこれまで目にしたことはない。

4 補題の証明

本節では、前節の「弧 BC < BD + CD」の証明を紹介する。なお、偶然だが [4] に以下と途中までほぼ同じ証明が書かれているが、[4] は最終的には「弧 BC < BD」を証明している。

曲線の弧長は、折れ線近似の上限として定義されるので、弧 BC の折れ線近似よりも、常に BD + CD の方が長いことを示せばよい。そのために、次のような補題を示すことにする。

補題 1

$\triangle$ABC は A → B → C の順に右曲り (時計回り) であるとし、$\mathrm{A} = \mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_1 \to \cdots \to \mathrm{P}_n = \mathrm{B}$ は $\triangle$ABC 内の凸な折れ線、すなわちこの折れ線に交差はなく、各 P_k の角はすべて右曲りで、180° ではないとする (図 2)。このとき、この折れ線の長さは AC+BC 以下となる。

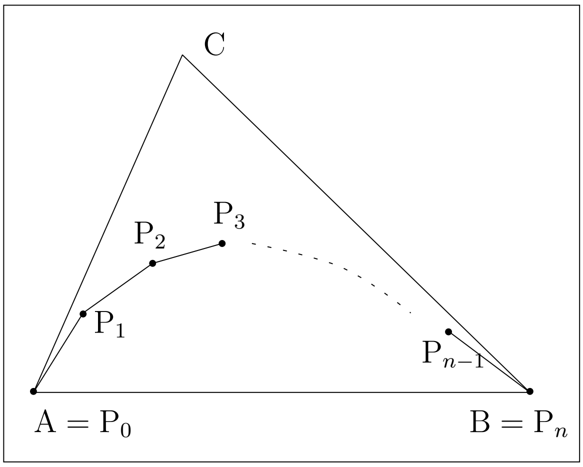

図 2: △ABC と折れ線

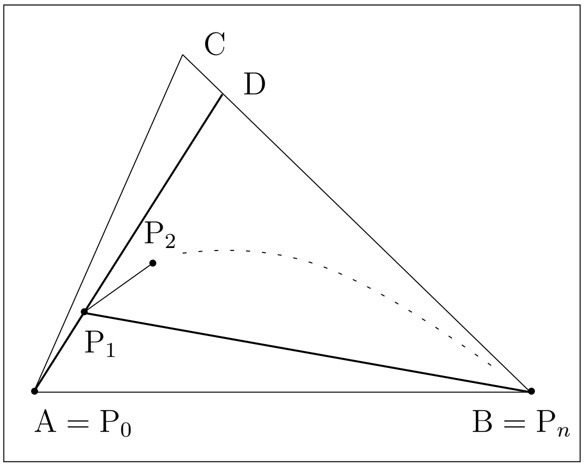

図 3: 帰納法

まず $n \geq 3$ とする。$\mathrm{P_0P_1}$ を延長すると、辺 BC と交わるが、それを D とする (図 3)。三角不等式により $\mathrm{AD} + \mathrm{BD} \leq \mathrm{AC} + \mathrm{BC}$ であり、仮定により $k \geq 1$ の点 P_k はすべて $\triangle\mathrm{P_1BD}$ に含まれている。

また、$n \geq 3$ より $\mathrm{P_1} \neq \mathrm{D}$ なので、この補題が $\triangle\mathrm{P_1BD}$ と $\mathrm{P_1} \sim \mathrm{P}_n$ の折れ線に対して成り立てば、

$$\sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k \leq \mathrm{P_1D} + \mathrm{DB}$$

より、

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k \leq \mathrm{AD} + \mathrm{DB} \leq \mathrm{AC} + \mathrm{CB}$$

となって補題が示されることになる。よって、折れ線の点の個数による帰納法により、あとは $n = 2$ のときに示せば良いことになる。

$\mathrm{P_1}$ が AC か BC 上にあるときは、三角不等式により明らか。$\mathrm{P_1}$ が △ABC の内部にあるときは、前と同様に $\mathrm{P_0P_1}$ の延長と BC の交点を D とすれば三角不等式により

$$\mathrm{P_0P_1} + \mathrm{P_1P_2} < \mathrm{AD} + \mathrm{DB} < \mathrm{AC} + \mathrm{CB}$$

となって証明される。

5 最後に

私自身は、扇形の面積による証明自体あまり気にはならない。それは、円の面積の公式 (3) に疑いを持たないからである。円の面積に関して、改めて (4) のように定義すべきだとは思わないし、中学校などの教科書で見られる (3) の説明で十分だと思っている。

もちろんそこには積分も三角関数も使われていないが、その説明手法はまさに積分の考え方そのものであるし、弧の長さの方からくる π がなぜ面積にも現れるのかがよくわかる、とても

いい説明だと思っている。円の面積の公式 (3) は、積分も三角関数も使わずにそうやって既に得られているので、よって扇形の面積による (1) の証明は、循環論法でもなんでもない、というのが私の考え方である。

ところで、今回手近な本 (高校の教科書や大学の微積分の本) 13 冊で調べたら、8 冊が扇形の面積による証明、証明が書いてない (数値で示したり弧と AB が近いと説明しているだけのもの) が 2 冊、サインの定義を級数にしているものが 1 冊 ([1]) で、弧長で説明しているのは [2] 1 冊だけであった。残りの 1 冊は [3] で、これは最初は扇形の面積で説明しているが、それは「擬証明」であると述べ、最後の補遺で改めて弧長と微積分を利用した別な証明を与えている。

これまで、弧長での証明は何度か見たような気がするので、手近な教科書のほとんどで採用されていなかったことが意外な気がしたが、もしかしたら多くの方が私に近い立場を取っておられるのかもしれない。

なお、4 節の冒頭にも書いたが、今回たまたま見た [4] に 4 節の補題がほとんどそのまま載っていて、それを使って「弧 BC $<$ BD」を証明していることがわかった。この原稿とその雑誌の発行もほぼ同時期で、全くの偶然だが、実は私の方は、11 月に高等学校の教員から聞いた「循環論法」に関する質問を元にこれを書き出したのだが、[4] はその雑誌の 10 月号の宿題の解答なので、もしかしたらその辺りがつながっていたのかもしれない。

また、[4] によれば、同じ手法で「弧 BC $<$ BD」まで確かに証明できるのであるが、個人的には 3 節に書いたように弧長で証明するなら (16) で十分であり、しかも (14) より (16) による説明の方が受け入れられやすいのではないかと思う。

なお、ここまで書いたところで、弧長による (1) の別の証明を紹介している [5] を見つけた。そこでは (16) ではなく、むしろ

$$\mathrm{AC} < \text{弧}\,\mathrm{BC} < \mathrm{AB} + \mathrm{AC}$$

すなわち、

$$1 < \frac{x}{\sin x} < 1 + \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

を用いる証明を紹介している。その証明は補題 1 とはやや異なる方法を用いているが、[5] の方法、説明の方が本稿の方法、説明よりもずっとシンプルであり、多分それが一番受け入れやすいだろうと思う。

参考文献

[1] 杉浦光夫、「解析入門 I」、東京大学出版会 (1980)

[2] 上野健爾監修、工学系数学教材研究会編、「微分積分」(工学系数学テキストシリーズ)、森北出版 (2014)

[3] 荒井正治、「理工系 微分積分学」(第 3 版)、学術図書出版社 (2011)

[4] 一松信、“ミニ数学を創ろう”、現代数学、2015 年 12 月, 23–25.

[5] 瓜生均、“三角関数のさまざまな定義”、`http://staff.miyakyo-u.ac.jp/~h-uri/blog/archive/lecture/sugakuenshu/2000/sankaku.pdf`、2001 年 2 月 9 日