平成 15 年 3 月 4 日

三角関数の加法定理について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

先日、ある学生から三角関数の加法定理

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \tag{1}$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \tag{2}$$

の覚え方として

$$\begin{array}{ccccccc} \sin(x+y) & = & \sin x & \cos y & + & \cos x & \sin y \\ & & \text{さいた} & \text{コスモス} & & \text{コスモス} & \text{さいた} \\ \cos(x+y) & = & \cos x & \cos y & - & \sin x & \sin y \\ & & \text{コスモス} & \text{コスモス} & & \text{さいた} & \text{さいた} \end{array}$$

と教わった、という話を聞いたが、これは本質的に「サインコサインコサインサイン」と唱えているのと変わりはないように思う。x,y の部分は x,y,x,y と順に並べるのだ、という風に覚えているのだそうだが、ならばもう少しまともな覚え方もあるのではないかと少し考えてみた。

こういった公式を覚える場合、例えば

- ひたすら暗記する
- 忘れた場合に備えて公式の導き方 (証明) も頭に入れておく
- 忘れた場合に備えて公式、あるいはそれによる結果の検算の方法を頭に入れておく

といった方法などがあると思う。

学生の試験の答案を見ていると間違った公式をそのまま使って解いていることがあるが、これはは、最初の覚え方をしているためであろう。

公式の証明や導き方はものによっては難しいものもあり、必ずしも全ての人に勧められるものではないが、適宜その方法と最後の方法を組み合わせるのが良いのではないかと思う。

間違った公式からは正しい答えはまず得られないので、だいたいこんな形だったな、で使ってはいけないだろう。公式を確認する方法を身につけているかどうかが、試験の成績などに大きく反映すると思われる。

また、公式で計算して導いた結果を検算することも非常に大事なことで、例えば、倍角の公式を間違えて覚えたために $\sin$ の値が 1 より大きい値になっているのにそれをそのまま書く、といったような、結果が明らかに不合理であるような答案を書くとその解答者の基礎の理解にすら疑問を持たれかねない。

2 図形による加法定理の証明

まず、図形による初等的な加法定理の証明をいくつか紹介する。ただし、任意の角度に対するものではなく、小さい正の角に対するものであるし、これら以外にも図形的な証明は多分色々あると思う。

証明 1

図 1 のように、直角三角形を 2 つ重ねる。今 $AD = 1$ とすると $AC = \cos y$ と

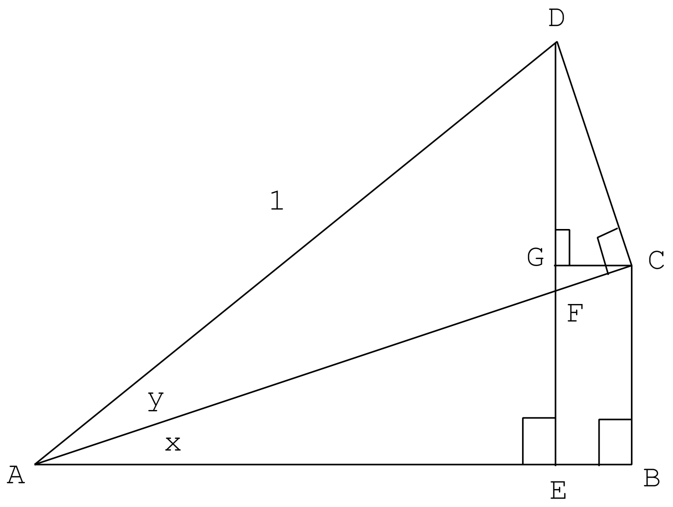

図 1: 証明 1 の図

なるので $AB = AC\cos x = \cos y \cos x$ となる。

一方 $CD = \sin y$ であり、三角形 AEF と三角形 DCF は相似なので角 $CDF = x$ であり、よって $BE = CG = CD\sin x = \sin x \sin y$ となる。ゆえに

$$\cos(x+y) = AE = AB - BE = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

となる。

また、$DG = CD\cos x = \sin y \cos x$, $GE = CB = AC\sin x = \cos y \sin x$ となるので、

$$\sin(x+y) = DE = GE + DG = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

となる。

証明 2

図 2 のように、直角三角形を 2 つ並べて一つの三角形 ABC を作る。この高さ

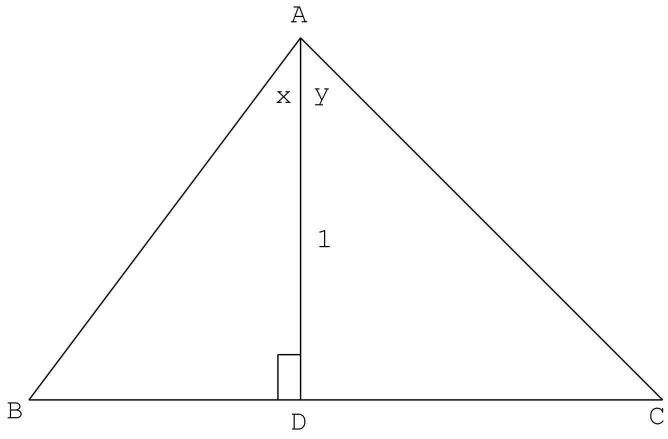

図 2: 証明 2 の図

$AD = 1$ とすると、

$$AB = \frac{1}{\cos x}, \quad BD = AB\sin x = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

同様に

$$AC = \frac{1}{\cos y}, \quad CD = AC\sin y = \frac{\sin y}{\cos y} = \tan y$$

より $BC = BD + CD = \tan x + \tan y$ である。よって、余弦定理

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos(x+y)$$

より、

$$(\tan x + \tan y)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 y} - 2\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos y}\cos(x+y)$$

となるので、

$$\begin{aligned}
&2\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos y}\cos(x+y) \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 y} - \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}\right)^2 \\
&= \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{1-\sin^2 y}{\cos^2 y} - 2\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y} - 2\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} \\
&= 2 - 2\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} \\
&= 2\frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\cos x \cos y}
\end{aligned}
$$

となる。よって両辺に $\cos x \cos y/2$ をかければ $\cos$ の加法定理 (2) が得られる。

一方、面積を考えると、

$$\triangle ABD = \frac{1}{2}AD \cdot BD = \frac{1}{2}\tan x, \quad \triangle ACD = \frac{1}{2}AD \cdot CD = \frac{1}{2}\tan y$$

であり、また

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{2\cos x \cos y}$$

であるので

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = \tan x + \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}$$

となり、両辺に $\cos x \cos y$ をかければ $\sin$ の加法定理 (1) が得られることになる。

証明 1 の方は図を工夫して、式での計算を少なくする証明方法で、証明 1 の方は図は単純で、むしろ式の計算で結果を出す証明方法であり、それぞれ特徴があるので、これらの証明を頭に入れて加法定理を覚えようとする場合はその特徴に注意し、どちらが覚えやすいのかを比較するとよい。

なお、私が高校のときは、三角関数の加法定理は行列の一次変換のところで回転行列を使った証明方法で教わった。すなわち、

$$\begin{bmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{bmatrix}$$

の行列の積として証明するやり方である。しかし現在高校のカリキュラムでは一次変換がなくなったので (多分)、これで学生に説明するのはかなり準備を必要とすることになってしまった。

3 別に加法定理を導く方法

証明以外に、加法定理の式 (1), (2) の式を導く方法を説明する。

3.1 おおまかな式から作る方法

これは、

$$\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta,\quad \cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta \tag{3}$$

と、sin, cos の 0°, 90° での値を利用する方法である。
まず、$\sin(x+y)$, $\cos(x+y)$ はいずれも

$$\sin x,\ \cos x \text{ に関する一次式 (もちろん } \sin y,\ \cos y \text{ に関しても)} \tag{4}$$

であるという性質がある。よってそれを覚えておいて

$$\sin(x+y)=A\sin x+B\cos x,\quad \cos(x+y)=C\sin x+D\cos x \tag{5}$$

のように大まかに書くと、この A,B,C,D は y の式であり、これらを求める。今、(5) に $x=0^\circ$ を代入すると

$$\sin y=A\sin 0^\circ+B\cos 0^\circ=B,\quad \cos y=C\sin 0^\circ+D\cos 0^\circ=D$$

となるので $B=\sin y$, $D=\cos y$ と求まり、(5) に $x=90^\circ$ を代入すると

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ+y) &= \cos y=A\sin 90^\circ+B\cos 90^\circ=A,\\ \cos(90^\circ+y) &= -\sin y=C\sin 90^\circ+D\cos 90^\circ=C\end{aligned}$$

となるので $A=\cos y$, $C=-\sin y$ と求まる、という方法である。
なお三角関数の微分を知っていれば、$x=90^\circ$ を代入する代わりに、(5) の両辺を x で微分してから $x=0^\circ$ を代入することで A, C を求める、という手もある。

3.2 複素数を利用する方法

現在高校の数学 B で履修する複素数では、複素平面や極形式、ド・モアブルの公式などもやるようなので、

$$\cos\theta+i\sin\theta$$

という形の式は多分馴染みが深いと思われる。この形の式は、ド・モアブルの公式からも見られるように、積が角の和に変わる、という性質を持っている。

$$(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)=\cos(x+y)+i\sin(x+y) \tag{6}$$

よってこの式を覚えておけば、この式を展開して $i^2=-1$ を使うと

$$\text{左辺}=\cos x\cos y-\sin x\sin y+i(\cos x\sin y+\sin x\cos y)$$

となるので、両辺の実数部分と虚数部分を比較すれば加法定理が得られる。

なお、この式 (6) は、大学 (の理系の学部の 1,2 年生) でオイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

として学ぶもので、値の積が変数の和になることは指数法則として見ることができる。

この公式には他にも多くの応用があり、例えば三角関数の微分の公式 $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ を覚えるのに

$$(\cos x + i\sin x)' = i(\cos x + i\sin x) \quad (= -\sin x + i\cos x)$$

つまり、微分が i 倍になる ($(e^{ix})' = ie^{ix}$)、という性質として覚えることができる。

4 一方から他方を導く方法

sin と cos の加法定理 (1), (2) の一方を覚えておいて、他方はそこから導く、という方法もある。それを 2 つ程紹介する。

4.1 基本性質を利用

これは三角比の基本的な性質

$$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta, \quad \cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta \tag{7}$$

を用いる方法であるが、例えば (1) の x の代わりに $x + 90^\circ$ を代入すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sin(x + 90^\circ + y) = \cos(x + y), \\ \text{右辺} &= \sin(x + 90^\circ)\cos y + \cos(x + 90^\circ)\sin y \\ &= \cos x\cos y - \sin x\sin y \end{aligned}$$

となり、cos の加法定理 (2) が得られることになる。ただし、この場合は (7) を間違えずに覚えている必要があるが、これも割りと間違いが多い式である。

この (7) の覚え方にも色々あり、例えば単位円を利用する方法、グラフを利用する方法、加法定理を利用する方法 (今の場合は堂々巡りになってしまうが)、または

$$\begin{array}{ll} \sin(90^\circ - x) = \cos x, & \cos(90^\circ - x) = \sin x, \\ \sin(-x) = -\sin x, & \cos(-x) = \cos x \end{array} \tag{8}$$

を利用する方法などがある。(8) を利用する方法とは、(8) の最初の 2 本の式の x に $-\theta$ を代入して

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta, \quad \cos(90^\circ + \theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

のように導くやり方である。

4.2 微分を利用

これは、一方の式を x などで微分する、という方法である。例えば (1) を x で微分すれば (2) が得られるのはすぐにわかるだろう。

もちろんこれを使うには、三角関数の微分と平行移動関数の微分 (またはより一般の合成関数の微分)

$$\{f(x+a)\}' = f'(x+a)$$

が使える必要がある。

5 余談

5.1 検算について

(8) の最初の 2 つは直角三角形の図を考えてみればわかるとして、間違いやすいのは後半の $-x$ に対するものの方で、これを逆にしてしまいがちである。

これら間違いやすい公式などは、それがあっているかどうかを確認するには、適当な値 (30° など) をいくつか代入して検算するといいだろう。公式は間違えていても、具体的な角度に対する三角比の値は間違えずに計算できる、という人は多いように思う。

しかし、例えば 45° では $\sin$ と $\cos$ の値は等しく、それによって $\sin$ か $\cos$ かが曖昧であるような公式のチェックは原理的にできないし、また $\cos 0 = 1$, $\cos 90^\circ = 0$ などは間違える人が割と多いようなので、どういう値を代入するかも検算がうまくいくかどうかに関係する。それに、負の角や 90° より大きい角に対する三角比の値が正しく計算できなければ検算ができない場合もあるだろう。

一般角に対する三角比の計算方法は、何か自分で一つ確実な方法を身につけておく必要があるだろうが、代表的なものは

- 三角関数のグラフ
- 単位円の動径が作る角と三角比の関係

を利用するやり方だろう。私は大抵頭の中で単位円を書いている。

私が高校生の頃は、倍角、半角の公式、三倍角の公式、和 $\rightarrow$ 積、積 $\rightarrow$ 和の公式などはその都度加法定理を使って導いていたし、そのために、普段から間違いなく導けるかどうかも訓練していたように記憶している。

5.2 関数方程式

3.1 節の、大まかな形から導くという話にやや関連した話であるが、例えば、すべての実数 x, y に対して

$$f(x+y) = f(x)\cos y + f(y)\cos x$$

を満たす関数 $f(x)$ を求める、といったような問題を関数方程式という。この関数方程式の場合、$f(x)$ は微分可能である、といった条件がつけばそのような f は

$$f(x) = (\text{定数}) \times \sin x$$

の形になることがいえてしまう。どうしてそうなるのか考えてみるといいだろう。

同様に、

$$g(x+y) = g(x)g(y) - \sin x \sin y$$

を満たす g を求めることもできるが、この方程式はやや難しい (大学レベル)。さらに連立の関数方程式

$$\begin{cases} f(x+y) &= f(x)g(y) + g(x)f(y) \\ g(x+y) &= g(x)g(y) - f(x)f(y) \end{cases}$$

を満たす f, g を求める、という問題も考えられるが、これは実は

$$f(x) = \sin ax, \quad g(x) = \cos ax \quad (a \text{ は定数})$$

だけが解ではない。この 2 つの問題はいずれも「微分方程式」を勉強すれば解くことができる (多分)。

6 最後に

「加法定理を正確に覚えること」にどれくらい意味があるかについては、実は私にはよくわからない。

例えば、そこからさらに便利な多くの公式 (三倍角、和 → 積、積 → 和の公式など) を導くのに使う、ということもあるだろうし、三角関数の導関数を導くのに必要、という意味もあるだろうが、それらの場合は、必要ならば公式を本で確認すればいいだけのことで、正確に覚える、ということの必要性は薄いと思う。

他にも、三角関数には加法定理という便利なものが成り立つのだ (対数のように加法定理などない関数も多い) とか、$\sin(x+y) = \sin x + \sin y$ ではない (線形ではない) ということを認識する、という意味もあるのだろうが、この場合は加法定理というものを理解する、ということが大事で、形を正確に覚える必要性とはあまり関係がない。

もちろん、実際の測量や工学の現場で必要となる、ということもあるかもしれないが、そのような人は多分かなり少ないだろうし、数式の計算でなくて具体的な数字の計算であれば、関数電卓で済んでしまうことが多いだろう。
私が高校で公式を覚えたときも、使い慣れていたものは覚えていたが、長いもの、覚えにくいものは、むしろ思い出し方、導き方などを頭に入れておいてそこから思い出していたことが多かったように思う。また、上に書いたことからも多少わかると思うが、機械的に覚えるよりもその方が公式の色々な意味も見えてくるし、計算を確認する癖をつけることにもなるのでは、と思う。
以上、いくつかの覚え方、導き方を紹介したが、結局は自分に合った覚え方を自分で見つける、または自分で作るのが、多分うまく覚える早道なんだろうと思う。