2006 年 12 月 25 日

佐渡島の海岸

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

海岸道路を柏崎市から新潟市へ走ると、徐々に佐渡島が大きく見えてくる。佐渡島は海の上に浮いて見えるが、地球は丸いので、本州の低いところから佐渡島の海岸が見えるわけではなく、佐渡島が水平線の上に顔を出している部分が見えているわけである。

では、佐渡島の海岸を見ようと思ったら新潟の海岸からどれ位の高さから見れば見えるのか、ふと気になったので簡単に計算してみた。しかし、その計算には三角関数やテイラー展開などを利用するので、それらの応用例の一つとしてここに紹介したいと思う。

2 基本情報

佐渡島は、本州、北海道、九州、四国、沖縄本島、および北方領土 (国後島、択捉島) を除けば、日本最大の島であり[1]、新潟県のほぼ中央部分の日本海沿岸に位置する。

本州との最短距離は、地図で見たところ角田山沿岸から約 30 km で、通常は佐渡島手前側の岸約 40 km 部分がこちらに面しているが、天気のいい日には、佐渡島の向こう側 (両津湾の向こう岸) の端まで見通せるので、総延長約 60 km 位の部分が見えることになる。

ほぼ最短距離の地点にある、角田山、弥彦山と海岸にはさまれた越後七浦シーサイドラインからはっきり見える[2]が、佐渡島の両側の海水面 (水平線) が真っすぐ水平につながった海水面の上に佐渡島が見えるので、あたかも海に青い島が浮かんでいるように見える。

[1] 関西には淡路島の方が大きいと思っている人もいるようであるが、面積は佐渡島が約 1.4 倍あり、淡路島は佐渡島、奄美大島 (鹿児島県) に次いで 3 番目の大きさの島である。

[2] もちろん、角田から約 50 km 程離れたこの柏崎の海岸からでも、よく見える。

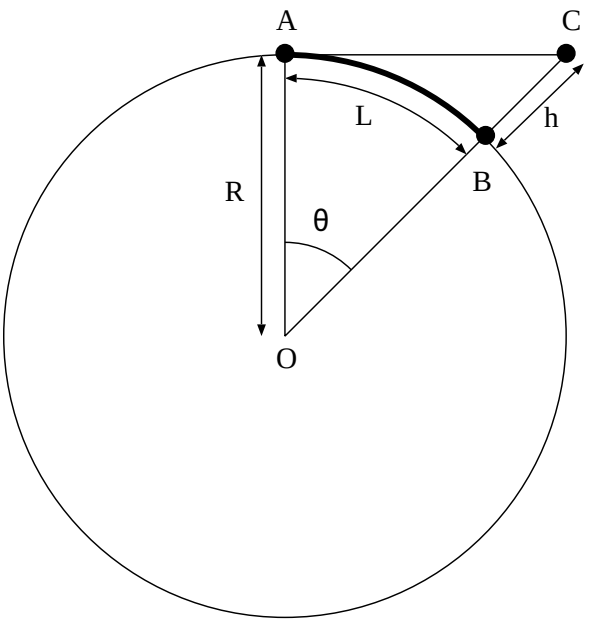

図 1: 地球の図

天気のいい日には、建物や山肌が見えることもあるが、佐渡島の海岸は見えない。では新潟の海岸のどれ位の高さからなら佐渡の海岸が見えるのか、これを佐渡と本州との最短距離 30 km、及び地球の円周約 4 万 km という数字から計算してみることにする。

3 考察

今、地球の中心を O, 半径を R とし、佐渡島の海岸を A, そこから 30 km 離れた本州の海岸を B, B から佐渡島の海岸が見える高さ h の地点を C とし、弧 AB の中心角を θ とする (図 1 参照)。実際には、中心角 θ は非常に小さいので、弧 AB はほとんど直線と見てよく、よって弧 AB と弦 AB は違いはない。よって、今弧 AB の長さが 30 km であるとする。

C は A が見えるギリギリの高さなので、半径 OA と AC は垂直となり、よって、

$$\cos\theta = \frac{OA}{OC} = \frac{R}{h+R}$$

なので、

$$h = \frac{R}{\cos\theta} - R = R\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right) \tag{1}$$

となる。一方、弧 AB の長さが 30 km なので、θ をラジアンで考えれば、

$$\begin{aligned} R\theta &= 30\ [\mathrm{km}], & (2)\\ 2\pi R &= 40000\ [\mathrm{km}] & (3)\end{aligned}$$

となり、よって

$$\theta = \frac{30}{R} = \frac{60\pi}{40000} = \frac{3\pi}{2000} \approx \frac{9}{2} \times 10^{-3} \tag{4}$$

である。この最後の $9/2 \times 10^{-3}$ は、後で誤差評価で使用するもので、直接近似値として使うわけではない。

今、$\theta \approx 0$ なので、$\cos\theta$ の $\theta = 0$ でのテイラー展開 (マクローリン展開) を考えれば、

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + O(\theta^6)$$

となる。ここで、$O(\theta^6)$ は、その部分が θ^6 と同じ位の大きさの値であることを意味するものとする。

今、$x = 1 - \cos\theta\ (\approx 0)$ とすると、

$$x = \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24} + O(\theta^6)$$

であり、$x \approx 0$ より $1/(1-x)$ の $x = 0$ でのテイラー展開を考えれば、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\cos\theta} - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = (1 + x + x^2 + \cdots) - 1\\ &= x + x^2 + O(x^3) = \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24} + \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24} + O(\theta^6)\right)^2 + O(\theta^6) + O(x^3)\\ &= \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24} + \frac{\theta^4}{4} + O(\theta^6) = \frac{\theta^2}{2} + \frac{5}{24}\theta^4 + O(\theta^6) \qquad (5)\end{aligned}$$

となる。(2) より $R = 30/\theta$ km なので、(1), (5) より

$$h = R\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right) = \frac{30}{\theta}\left(\frac{\theta^2}{2} + \frac{5}{24}\theta^4 + O(\theta^6)\right) = 15\theta + \frac{25}{4}\theta^3 + O(\theta^5)$$

となる。この、$(25/4)\theta^3$ は (4) より

$$\frac{(25/4)\theta^3}{15\theta} = \frac{5}{12}\theta^2 \approx \frac{5}{12} \times \frac{81}{4} \times 10^{-6} = \frac{135}{16} \times 10^{-6} \approx 0.8 \times 10^{-5}$$

なので、$(25/4)\theta^3$ は 15θ に比べてはるかに小さいこと (10 万分の 1 程度) がわかる。よって、(4) より

$$h \approx 15\theta = 15 \times \frac{3\pi}{2000}\ [\mathrm{km}] = \frac{45}{2}\pi\ [\mathrm{m}] \approx 70.7\ [\mathrm{m}]$$

となる。

同様にして、最初から高次の項を無視して考えれば、一般に AB の距離が L km の場合、

$$\theta = \frac{L}{R} = \frac{2\pi L}{40000} = \frac{\pi L}{20000}$$

より、

$$\begin{aligned} h &= R\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right) = R\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) \approx R(1 + x - 1) = Rx \approx R\frac{\theta^2}{2} = \frac{L}{\theta}\,\frac{\theta^2}{2} \\ &= \frac{L}{2}\theta = \frac{L}{2}\,\frac{\pi L}{20000} = \frac{\pi L^2}{40000}\ [\mathrm{km}] = \frac{\pi L^2}{40}\ [\mathrm{m}] \end{aligned}$$

という式が得られることになる。

角田山の高さは 482 m, 弥彦山は 688 m であるから、いずれもその山腹からなら十分佐渡の海岸が見えることになるが、シーサイドラインは、最も高いところでも 70 m はないような気がするので、シーサイドラインからは佐渡の海岸は見えないように思う。

4 おわりに

「水平線」を、海と空との境目、と考えている人も中にはいるようであるが、本来は「水平線」とは、地球が丸いために、あるところの水面より向こうの物体がその水面より下に隠れてしまって、よってその水面が他の物体に邪魔されずに横に真っすぐのびた線として見える状態、を指している言葉だろうと思う。よって、佐渡島や琵琶湖のように、水平線の上に陸が見えてもおかしくはない景色はあちこちにある[3]。

我々は、70 m 程の高さからでないと佐渡の海岸が見えない、ということがわかったことになるが、これは逆に考えれば、我々が新潟の海岸から見ている佐渡は、佐渡の 70 m 以上の高さの景色である、ということも意味している。

しかし、冬場などには、ごくわずかであるが蜃気楼が起きて、佐渡島の端が水平線よりも上に (空中に) 浮いて見えることもあるので、そのような場合は、もしかしたら佐渡の海岸近くも見えているのかもしれない。

[3]実は、水平線の上に陸が見えるのはおかしい、というような言い方をふと耳にし、このレポートはそこから思いついたものでもある。