2016 年 05 月 03 日
2017 年 04 月 11 日改訂

極限を用いない微分の公式の説明

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

通常、微積分の教科書では、微分の公式は極限による微分の定義

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

によって証明しているが、一般的に学生の極限の理解は良いとは言えず、それを用いる公式の証明の紹介は、全く意味がないと思わないが、やや意味が薄いように感じる。

そのため以前から、極限を極力用いない形での微分の公式の証明を考えていたが、本稿では、初等関数である巾乗関数 (x^α)、三角関数 ($\sin x$, $\cos x$)、指数関数 (a^x)、対数関数 ($\log_a x$) の導関数の公式に対するその試みを紹介する。極限を用いない形ということは、極限による定義 (1) の代わりに、「導関数の値 = グラフの傾き」として説明を考えていく。

なお、詳しくは調べていないが、以下の説明はいずれも難しくはないもので、多分既に考えられているものであろうから、本稿が初出だとは思わないでいただきたい。

2 指数関数

まずは、指数関数の導関数の公式

$$(e^x)' = e^x \tag{2}$$
$$(a^x)' = a^x\log_e a\ \ (a>0,\ a\neq 1) \tag{3}$$

から考える。

$f(x)=a^x$ $(a>0,\,a\neq 1)$ とすると、$y=f(x)$ のグラフの $x=p$ での傾きは $f'(p)$ である。

今 $g(x) = f(x)/a^p$ とすると、$y = g(x) = f(x)/a^p$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを y 方向に $1/a^p$ 倍したものだから $y = g(x)$ の $x = p$ での傾き $g'(p)$ は

$$g'(p) = \frac{f'(p)}{a^p} \tag{4}$$

となる。一方、指数関数の性質により、

$$g(x) = \frac{f(x)}{a^p} = \frac{a^x}{a^p} = a^{x-p} = f(x-p) \tag{5}$$

であるから、$y = g(x)$ は $y = f(x)$ を x 方向に p だけ平行移動したものとなり、$y = g(x)$ の $x = p$ でのグラフの傾き $g'(p)$ は、$y = f(x)$ の $x = 0$ でのグラフの傾き $f'(0)$ に等しいことになる (図 1)。

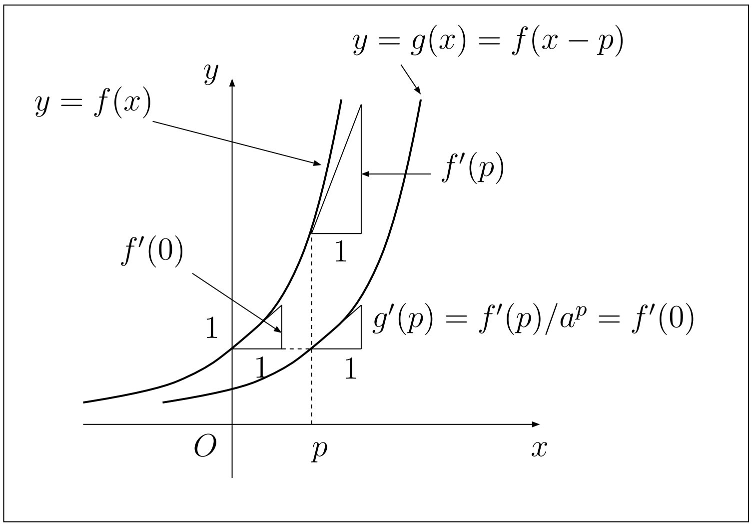

図 1: $y = g(x) = f(x)/a^p = f(x-p)$ のグラフと傾き

よって、(4) と $g'(p) = f'(0)$ により $f'(p) = f'(0)a^p$ がわかり、p は任意なので、

$$f'(x) = f'(0)a^x \tag{6}$$

が得られる。あとは $f'(0)$ の値を決定すればよい。

この $f'(0)$ の値は a によって変わるが、

「この値が 1 となるような a を e と定めると $e = 2.71828\ldots$ となる」 (7)

という形で e を定義すれば、(6) から (2) が得られることになる。

この (7) は、高校の教科書での通常の e の定義

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{8}$$

とは異なるが、(7) は極限で書けば

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1 \tag{9}$$

となり、これは e のみが持つ性質であるから、(7) による定義でも (8) と同じものが得られることが保証される。ちなみに、(7) のような e の定義の仕方は、現在私が使用している教科書 [1] でも採用している方法である。

一般の $f(x)=a^x$ の場合は、$f'(0)=A$ とすると、

$$f\left(\frac{x}{A}\right) = a^{x/A} = \left(a^{1/A}\right)^x$$

より $y=f(x/A)$ も指数関数であり、そのグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 方向に A 倍したものなので、$x=0$ での傾きは $A/A=1$ になり、よって (7) により $a^{1/A}=e$ であることがわかる。よって、$e^A=a$ より $A=\log_e a=f'(0)$ となるので、これを (6) に代入すれば (3) が得られる。

3 対数関数

対数関数の導関数の公式

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x} \tag{10}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\log_e a}\ \ (a>0,\ a\neq 1) \tag{11}$$

にも 2 節と同様のスケール変換による説明は可能であるが、ここでは 2 節の結果と逆関数の微分を利用する。

$y=\log_a x$ は $x=a^y$ という関係と同じであり、よって $y=f(x)=\log_a x$ のグラフの横軸と縦軸を入れかえると $x=g(y)=a^y$ のグラフになる。よって、$x=g(y)$ の

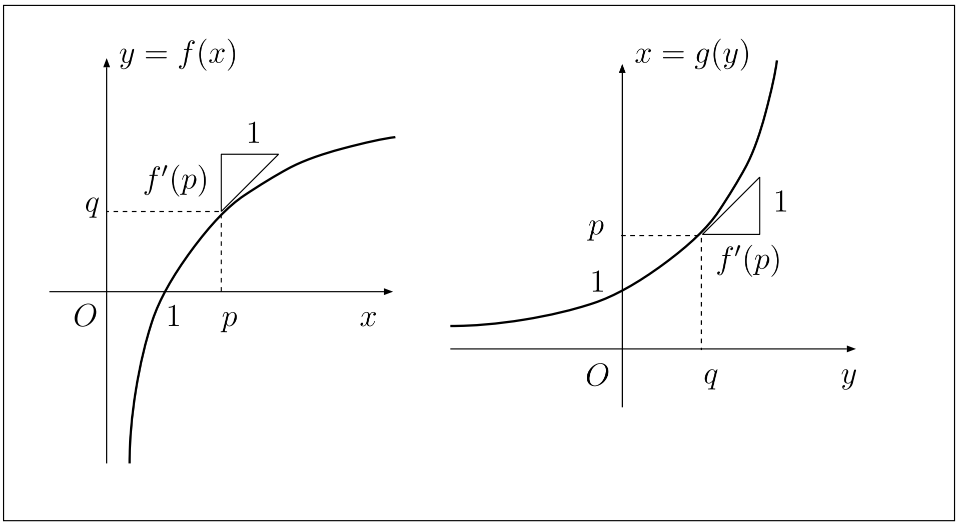

図 2: $y=f(x)$ と $x=g(y)$ のグラフと傾き

$(x,y)=(q,p)$ での傾き $g'(q)$ は、$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(x,y)=(p,q)$ での傾き $f'(p)$ の逆数に等しいことがわかる (図 2)。

よって $p=g(q)=a^q$、および (3) により、

$$f'(p)=\frac{1}{g'(q)}=\frac{1}{a^q\log_e a}=\frac{1}{p\log_e a}$$

となり、よって (11) が得られる。また、この式で $a=e$ とすれば (10) も得られる。

4 三角関数

この節では、$\sin x$ と $\cos x$ の導関数の公式

$$(\sin x)' = \cos x \tag{12}$$
$$(\cos x)' = -\sin x \tag{13}$$

を示す。そのために、まずは三角関数のグラフの作り方について考え直す。

通常高校の教科書では一般角の三角関数の定義は、単位円の円周上の点の座標と中心角の関係による。今回は、後の説明を考えて、次のように三角関数のグラフを以下のように考える。なお、以下の方法による三角関数のグラフの作成は、以前私が使用していた教科書 [2] の表紙で紹介されていたものである。

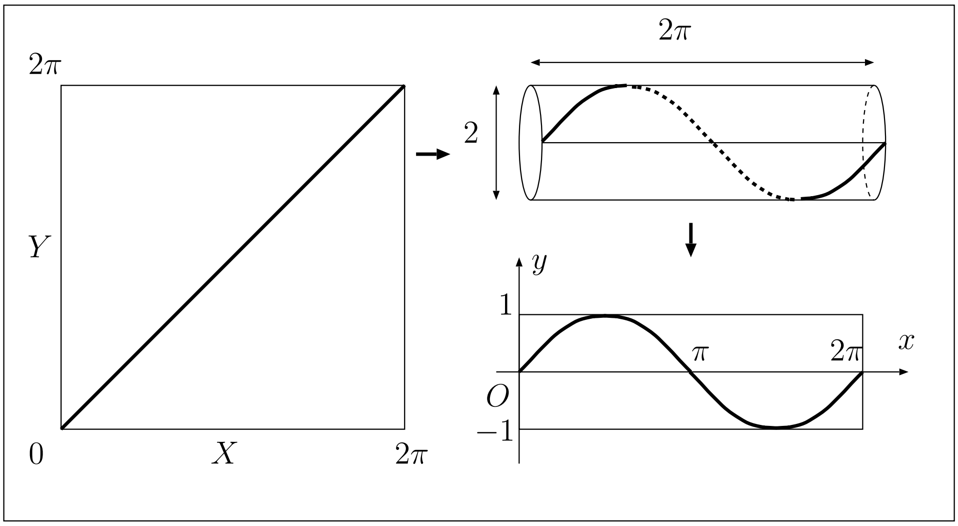

図 3: 正方形のフィルムを丸めて $\sin x$ のグラフを作る

縦横 2π の長さの正方形の透明なフィルムの対角線に 1 本線を引き、そのフィルムの横軸を X $(0 \leq X \leq 2\pi)$、縦軸を Y $(0 \leq Y \leq 2\pi)$ とする (図 3 左)。この場合対角線は $Y = X$ となる。このフィルムの Y 方向を丸めて円筒にして (図 3 右上)、そのつなぎ目が水平軸となるように側面から見ると、元の対角線が $y = \sin x$ のグラフの形の曲線として現れること が以下のようにしてわかる。

この円筒を側面として見る際、つなぎ目が手前の真ん中に来るようにして、その元の X 軸 (と同じ向きの軸) を丁度 x 軸と見て、見た目の縦方向を y 軸と見ることにする (図 3 右下)。円筒断面 (または底面) の円は、円周が 2π なので半径 1 の円となる。よって、この円筒は x は $0 \leq x \leq 2\pi$, y は $-1 \leq y \leq 1$ の範囲に収まっている。

この曲線上の $x = p$ の点を考えると、それは元の正方形では $(X, Y) = (p, p)$ という点に対応する。よってその点は円筒断面の円では出発点 (つなぎ目) から言うと円弧が p だけ進んだ点ということになり、その円の半径は 1 なので、中心角としてラジアン単位で p だけ進んだ点 $(Y = p)$ ということになる (図 4)。よって、そのときの高さ (y 座標) は $y = \sin p$ となるので、xy 平面では元の対角線は $y = \sin x$ のグラフを表すことがわかる。

次は、このグラフ $y = \sin x$ の傾きを考えてみる。元のフィルムの上の対角線は、$Y = X$ なので傾きは 1 であるが、$y = \sin x$ のグラフはそれを丸めてつなぎ目の方向から見たもの、すなわち xy 平面への射影となっていて、その際に傾きが変化する。丸めて射影しても X 方向から x 方向への線分の長さの変化はないので、変化があるのは Y 方向から y 方向への対応であり、その分傾きが変わることになる。

$x = p$, $y = \sin p$ $(0 < p < \pi/2)$ の位置では、Y 方向の短い長さ ℓ は円筒では円筒断面

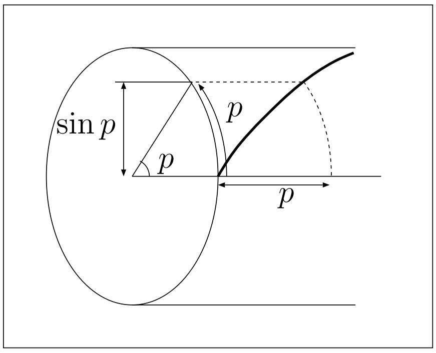

図 4: $x = p$ でのグラフの高さ

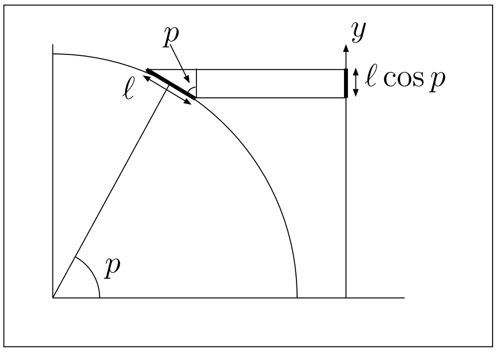

図 5: y 軸への射影による縮小

の短い円の弧の長さになり、それで射影した y 方向ではほぼ $\ell\cos p$ という長さに変わるので、$\cos p$ 倍に縮小されることになる (図 5)。

ここから、$y = \sin x$ の $x = p$ での傾きは $\cos p$ になることがわかる。

$\pi/2 < p < \pi$ では、対角線は裏側の面に行って負の傾きになり、Y 方向の長さ ℓ は y 方向には $\ell\cos(\pi - p) = -\ell\cos p$ となる。よって、p での傾きは、$-(-\cos p) = \cos p$ となる。$\pi < p < 3\pi/2$, $3\pi/2 < p < 2\pi$ の場合も同様に p での傾きが $\cos p$ となることが示される。

なお、この方法だと、$p = 0$ では、円筒を真正面から見ているので、y 方向への長さも変化はなく、よって傾きが 1 のままであることが直感的にわかるが、これは $y = \sin x$ の $x = 0$ での傾きが 1、極限で表現すれば

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{14}$$

であることを意味する。通常の三角関数の導関数は、(14) を出発点にして、(12), (13) を示すのであるが、良く知られているように (14) の証明には循環論法の批判もある。しかし、本稿の方法ならば (14) を必要としない。

$\cos x$ の導関数 (13) の方は、円筒のつなぎ目を上にして横から見れば $y = \cos x$ のグラフになるので、上と同じ考察をそれに対して行ってもよいが、$y = \sin x$ のグラフを x 方向に $-\pi/2$ 平行移動すれば $y = \cos x$ グラフになるので、(12) より $y = \cos x$ のグラフの $x = p$ での傾きは $\cos x$ の $x = p - \pi/2$ での値となり、

$$(\cos x)'|_{x=p} = \cos\left(p - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin p$$

より (13) が得られる。

なお、上のような「ほぼ $\ell \cos p$」よりもう少し直接的な説明も可能である。それは、元々のフィルムに底辺と高さが 1 の直角二等辺三角形の三角定規を貼る、と考える方法である (図 6)。元々の図の、(x, x) の位置を左下にして三角定規の底辺部分のみテー

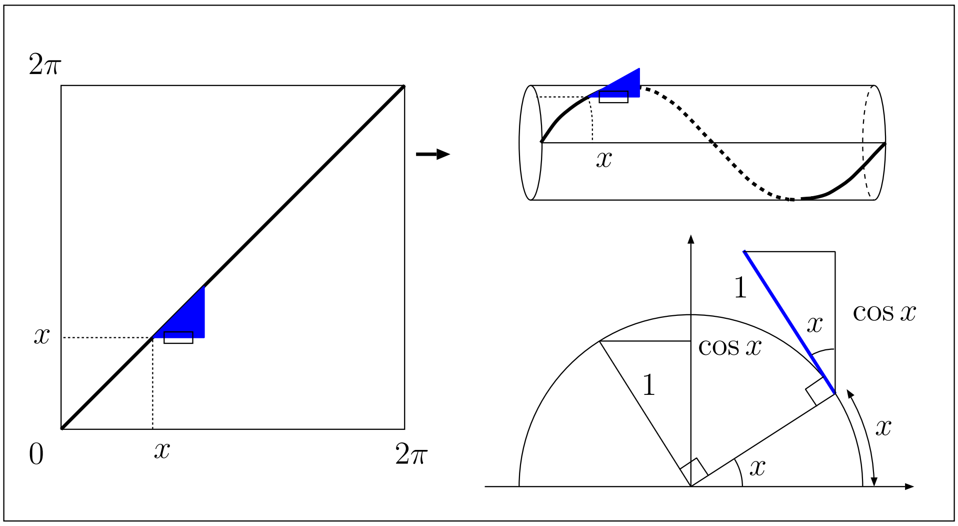

図 6: 長さ 1 の三角定規を貼る

プで止める。当然定規の傾きは 1 であるから丸める前は黒線に接している。このままフィルムを丸めて三角関数のグラフを作ると、三角定規の斜辺の部分はグラフに接したままで、正面から見た三角定規は底辺は 1 のままであるから、よってこの三角定規の正面から見た高さが $\sin x$ の x でのグラフの傾きを表すことになる。

その位置は横から見れば中心角が x の位置で、横から見た定規の長さは、定規の元の高さの 1 に等しいから、よってその定規の高さは $\cos x$ となる。

これにより $\sin x$ の傾きが $\cos x$ となる、という説明である。これなら「ほぼ $\ell \cos p$」という議論は不要であるし、$\sin x$ の傾きが $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ であることもかなり直感的にわかるのではないかと思う。

5 巾乗関数

最後は巾乗関数 $y = x^{\alpha}$ $(x > 0)$ の導関数の公式

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \tag{15}$$

を示す。まずは、2 節同様のスケール変換の手法で $x = 1$ に帰着させる。$f(x) = x^{\alpha}$, $g(x) = f(x)/p^{\alpha}$ とすると $(p > 0)$、$y = g(x)$ の $x = p$ での傾き $g'(p)$ は $f'(p)/p^{\alpha}$ に等

しい。一方、

$$g(x)=\frac{f(x)}{p^\alpha}=\frac{x^\alpha}{p^\alpha}=\left(\frac{x}{p}\right)^\alpha=f\left(\frac{x}{p}\right)$$

より、$y=g(x)$ は $y=f(x)$ を x 方向に p 倍したグラフなので、$y=g(x)$ の $x=p$ での傾き $g'(p)$ は $y=f(x)$ の $x=p/p=1$ での傾き $f'(1)$ の $1/p$ 倍となる。よって $g'(p)=f'(1)/p$ となるので、

$$g'(p)=\frac{f'(p)}{p^\alpha}=\frac{f'(1)}{p}$$

より、p の任意性により

$$f'(x)=f'(1)x^{\alpha-1} \tag{16}$$

となることがわかる。後は、$f'(1)=\alpha$ であることを示せばよい。しかしここからが難しい。

ここでは両対数グラフを利用する。両対数グラフは良く知られるように x 軸、y 軸の目盛を指数的 (通常底 a は 10) に取って表現するもので (図 7 左)、言いかえれば見た目の位置を表す軸 (X,Y) の平面に写像したグラフを書くものである (図 7 右)。ここで、

$$X=\log_a x,\ \ Y=\log_a y$$

である。

このグラフ上では、$y=x^\alpha$ は

$$Y=\log_a y=\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x=\alpha X$$

となり、つまり両対数グラフでは傾き α の直線となる。

これが、元の xy のグラフではどのような傾きになるかを考えてみる。

まず、x 軸と X 軸の長さの変化を考えてみる。$X=\log_a x$ のグラフを考えればわかるが (図 8)、

$$\frac{dX}{dx}=\frac{1}{x\log_e a}$$

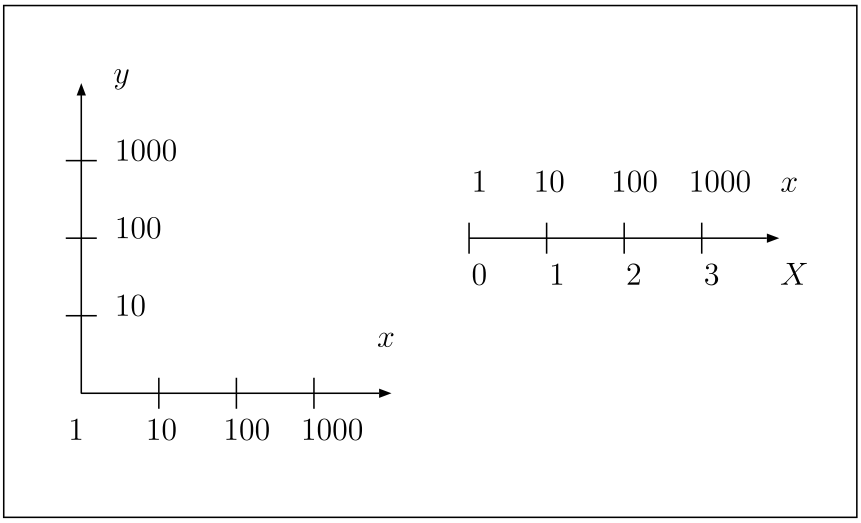

図 7: 両対数グラフ (左) と対数軸と見た目の軸 (右)

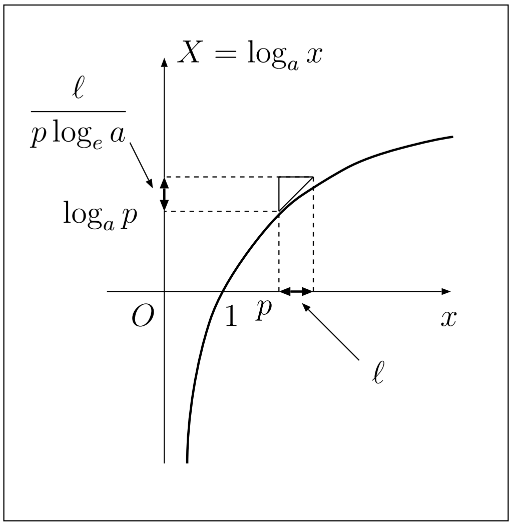

図 8: 対数軸での傾きと長さの変化

より、x 軸の $x = p$ での短い長さ ℓ は、X 軸の $X = \log_a p$ の場所での $\ell/(p \log_e a)$ の長さに変わる。

y 方向も同様であるので、ここから、xy 平面の $(x, y) = (s, t)$ での傾き β、すなわち x 方向の底辺 ℓ、高さ $\beta\ell$ は、両対数グラフの XY 平面の位置 $(X, Y) = (S, T) = (\log_a s, \log_a t)$ では、X 方向の長さは $\ell/(s \log_e a)$ に、Y 方向は $\beta\ell/(t \log_e a)$ になるの

で、その傾きは

$$\frac{\dfrac{\beta\ell}{t\log_e a}}{\dfrac{\ell}{s\log_e a}} = \frac{\beta s}{t} \tag{17}$$

へと変わることになる。

$f(x)$ の場合、$(x,y)=(1,1)$ での傾き $f'(1)$ は、両対数グラフでは傾きが $\beta s/t = f'(1)$ になっているはずで、それが α に等しいので、よって $f'(1)=\alpha$ であることがわかる。これで (16) より (15) が示されたことになる。

なお、(17) を使うのであれば、スケール変換を行って (16) を導かなくても、最初から $y=f(x)$ の $(x,y)=(p,f(p))$ での傾き $f'(p)$ が両対数グラフでは $f'(p)p/f(p)$ に変わることがわかり、それが $Y=\alpha X$ の傾き α に等しいので、

$$f'(p) = \alpha\frac{f(p)}{p} = \alpha p^{\alpha-1}$$

となり、(15) が得られる。なお、この (17) を用いる証明法は、いわゆる「対数微分法」に相当する。

6 最後に

今回の内容は、なるべく極限を用いない証明であるが、遠回りに思えるものもあるので、必ずしもこちらの方がわかりやすいとはいえない。

また、三角関数の射影による部分や、対数グラフの長さの変化の部分では、厳密には短い長さの変化の「極限」を見ていることになるので、極限を全く使っていないわけではない。

ただ、例えば三角関数の微分の説明は、割と直感的にわかるようなものなので、それなりに意味はあるのではないかと思う。これは後半の方は早くに考えていたのであるが、4 節でも述べたように紙を丸めてグラフを作り直すという考えを [2] で見つけてから今回の方法を思いついた。

しかし、特に巾乗は極限を用いれば、x^2, x^3 は二項定理により簡単に導関数が導けるのであるが、極限を用いないと本稿で見たようにそれほど易しくはない。積の微分が使えればまだなんとかなるが、今のところ、5 節の両対数グラフを使う以外にはあま

りいい方法を思いついていない。$f(x) = x^\alpha$ に対する $f'(1)$ を $F(\alpha)$ として、F に対する性質を導いて、そこから $f'(1)$ を求める、という方法もなくはないが、かなり遠回りになる気がする。

今後は、積や合成関数などの微分の公式や、積分についても同様のことができないか考えたい。

参考文献

[1] 石村園子「やさしく学べる微分積分」、共立出版 (1999)

[2] 橋口秀子、星野慶介、山田宏文「数学入門」、学術図書出版社 (2003)