2006 年 4 月 25 日

巾乗の差の極限について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

極限のところで、$\infty-\infty$ の不定形の例として、

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$$

であること (正確に言えば、これとほぼ同等の問題) を、

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

を利用して示しました。その一方で、

$$\lim_{n\to\infty}\{(n+1)-n\}=1$$

となります。では、一般に、

$$\lim_{n\to\infty}\{(n+1)^p-n^p\}\quad(p>0)$$

の極限はどうなるのでしょうか。講義の寄り道として、少し考えてみましょう。

2 考察

数列の極限

$$\lim_{n\to\infty}\{(n+1)^p-n^p\}$$

は、もし実数の極限

$$\lim_{x\to\infty}\{(x+1)^p - x^p\} \quad (x \text{ は実数})$$

が存在すれば、もちろんそれと同じ極限を持つはずなので、こちらを考えることにします。

$$\begin{aligned}&(x+1)^p - x^p\\ &= \ x^p\left\{\frac{(x+1)^p}{x^p} - 1\right\} = x^p\left\{\left(\frac{x+1}{x}\right)^p - 1\right\} = x^p\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^p - 1\right\}\end{aligned}$$

となるので、$1/x = t$ とおくと、この式は

$$(x+1)^p - x^p = \left(\frac{1}{t}\right)^p\{(1+t)^p - 1\}$$

となります。$x \to \infty$ と $t \to +0$ は同じことですから、よって、

$$\lim_{x\to\infty}\{(x+1)^p - x^p\} = \lim_{t\to+0}\frac{(1+t)^p - 1}{t^p} = \lim_{t\to+0}\frac{(1+t)^p - 1}{t}\ t^{1-p}$$

となりますが、$f(t) = t^p$ とすれば

$$\lim_{t\to+0}\frac{(1+t)^p - 1}{t} = \lim_{t\to+0}\frac{f(1+t) - f(1)}{t} = f'(1) = p$$

$(f'(t) = pt^{p-1})$ となることがわかります。

一方、

$$\lim_{t\to+0} t^{1-p} = \begin{cases} \infty & (p > 1) \\ 1 & (p = 1) \\ 0 & (0 < p < 1) \end{cases}$$

なので、結局、

$$\lim_{x\to\infty}\{(x+1)^p - x^p\} = \begin{cases} \infty & (p > 1) \\ 1 & (p = 1) \\ 0 & (0 < p < 1) \end{cases}$$

であることが言えることになります。

3 おわりに

$(n+1)^p - n^p$ の極限は、$p = 1/2$ の場合、すなわち $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ の場合は、通常有理化のような計算により $\infty - \infty$ の不定形を解消して答を求めます。

$p = 1/3,\ 1/4$ のような有理数の場合もそれと同様の方法でうまくいきますが、有理数でない場合はどうするのかな、と思って考えてみました。

このような話は講義からすると寄り道で、時間が足りなくなるので講義ではこのような話はできませんが、たまにはこのように疑問に思ったことに寄り道するのもいいのではないかと思いますので、また何か思いついたらまとめてみたいと思います。