2017 年 02 月 02 日

指数関数の定義について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

以前、高校の数学教員から、高校の数学では指数を拡張して指数関数 a^x を考えるが、x が有理数まではちゃんと定義するものの実数への拡張は適当に流している、もう少しちゃんと定義できないか、という質問を受けたことがある。

確かに「無理数乗」をちゃんと定義することは容易ではなく、通常高校の教科書でさらっと触れている「有理数乗の極限」による定義も、以下にあるようにそれなりの準備が必要となる。

- 多少の実数論といくつかの定理 (極限の存在の保証のため)
- a^x の、有理数の x に対する定義とそれに対する指数法則の証明
- a^x の、有理数の x に関する単調性とある種の連続性
- a^x の、無理数の x に関する定義 (がちゃんと定義されること)
- a^x の、無理数を含む実数の x に対する指数法則の証明

この方向での実数乗の詳しい説明は、例えば [1] の第 3 章 §3 に書かれているが、そこでは上限 (sup)、下限 (inf) を使っているので、その前にある程度の実数論と上限、下限に関する議論などが必要となる。

一方で、オイラーも指摘している ([3] 13 節、または [4] 5.4 節) ように、指数関数「e^x」は有理数乗の極限を用いなくても、自然数乗と極限だけで以下の式によって得られる。

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{1}$$

これを e^x の定義として考えれば有理数乗の極限によらずに e^x が得られ、その逆関数により自然対数 $\log x\ (=\log_e x)$ を定義すれば、一般の正の実数 $a\ (>0)$ の x 乗も、

$$a^x = e^{x\log a} \tag{2}$$

により、有理数乗の極限を使わずに得られる。そしてこの方向なら、累乗は自然数乗しか使わないので、負の整数乗や有理数乗などの拡張をせずに、実数乗をすべてこの式で定義してしまうことすら可能である。

本稿では、このような方向で指数関数を定義する場合、その性質等の証明等を紹介する。上で述べたように、本稿では負の整数乗、有理数乗すら仮定せず、そして使わずに、通常のそれらと同等のもの、および指数法則、指数関数の性質が成り立つことなどを考察する。最後に、さらなる発展として複素数乗についても考察する。

なお、本稿では、ほぼ高校程度 (数学 I,II,III) の数学の知識のみを仮定して話をするが、それを越える理論、議論が必要となる部分では、そこで必要となる知識を紹介し、それを認めて話を進めることとする。

2 極限の存在

本稿では、実数 x に対して、

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{3}$$

の極限により $\exp(x)$ を定義し、これが通常の「e^x」が持つべき性質を持つことを色々示していく。

まず最初に、(3) の右辺の極限がすべての実数 x に対して存在することを示すが、そのために、次の定理を用いる。

定理 1. (単調収束定理)

実数列 $\{a_n\}_n$ が単調増加 $(a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots)$ で、かつ上に有界、すなわちすべての n に対して $a_n \le b$ となるような有限な実数 b が取れるとき、$\{a_n\}$ は有限な極限値 α を持つ:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad (\le b)$$

これは、実数論 (実数の定義) とも深く関わっていて、簡単に証明できる定理ではないので (例えば [1] 第 2 章)、ここではこれが成り立つことを認めることとする。

以後

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{4}$$

と置く。まず、$x > 0$ を固定すると、数列 $\{f_n(x)\}_n$ が単調増加であること、すなわち、$x > 0,\ n \ge 1$ に対して、

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < f_{n+1}(x) = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \tag{5}$$

が成り立つことを示す。

$f_n(x)$ は n 次式、$f_{n+1}(x)$ は $(n+1)$ 次式であるが、まずその各 k 次 $(0 \leq k \leq n)$ の係数を比較する。2 項定理より、$f_n(x)$ の x^k の係数 b_k^n は

$$b_k^n = {}_n\mathrm{C}_k \frac{1}{n^k} \tag{6}$$

であり、これは $k \geq 2$ ならば

$$\begin{aligned} b_k^n &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\,\frac{1}{n^k} \\ &= \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \\ &= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

と変形できる。同様に、$f_{n+1}(x)$ の x^k の係数は b_k^{n+1} で、よって

$$b_k^{n+1} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

となる。この 2 式を見比べれば、$2 \leq k \leq n$ に対して $b_k^n < b_k^{n+1}$ が成り立つことが容易にわかる。$k = 0, 1$ に対しては、

$$b_0^n = 1, \quad b_1^n = {}_n\mathrm{C}_1 \frac{1}{n} = 1$$

といずれも n によらずに 1 になるので、$b_k^n = b_k^{n+1} = 1$ となる。

そして、$f_{n+1}(x)$ の方には、$(n+1)$ 次の正の項

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

も含まれるので、よってこれらより確かに (5) が成り立つことがわかる。

次は、$x > 0$ を固定したときに $f_n(x)$ が n に関して上に有界であることを示す。まず、b_k^n に対して、

$$b_k^n \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad (0 \leq k \leq n) \tag{8}$$

が成り立つことに注意する。これは、$k = 0, 1$ に対しては、$b_0^n = b_1^n = 1, 0! = 1$ より確かに成立し、$k \geq 2$ に対しては、(7) より $b_k^n \leq 1/k!$ が成り立つことがわかる。$k \geq 2$ に対する $1/k!$ と $1/2^{k-1}$ の関係は、

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot k} \leq \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

となるので、よってこれで (8) が成り立つことになる。

今、固定した $x > 0$ に対して、$2x < N$ となる自然数 N を一つ取って固定する。このとき、$n \geq N$ となる n に対して、$f_n(x) \leq A$ となるような有限な値 A が取れることを示す。

なお、A は N, x で表される式となるが、N, x は固定しているため n には無関係な値となるので、これで $n \geq N$ に対しては $\{f_n(x)\}_n$ は上に有界であることがわかり、A, $f_1(x), f_2(x), \ldots f_{N-1}(x)$ の中の最大値を B とすれば、B も n には無関係で、かつすべての n に対して $f_n(x) \leq B$ が成り立つことになる。これで、x を固定すれば $\{f_n(x)\}_n$ はすべての n に対して上に有界であることが示されることになる。よって以後 $n \geq N$ の場合のみを考える。

まず、(8) より、

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} b_k^n x^k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

が成り立つことがわかる。$x < N/2$ より、$k \geq N$ である k に対しては、

$$\frac{x^k}{k!} = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \frac{x^{k-N+1}}{N(N+1)\cdots k} \leq \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \frac{x^{k-N+1}}{N^{k-N+1}} \leq \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-N+1}$$

となり、よって、

$$f_n(x) \leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=N}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} \sum_{k=N}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-N+1}$$

となる。ここで、

$$\sum_{k=N}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-N+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-N+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-N+1}} \leq 1$$

なので、よって $f_n(x)$ は、

$$f_n(x) \leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$$

となり、確かに n にはよらない値で上から抑えられる。

ゆえに、定理 1 により、$x > 0$ に対しては、(3) の右辺が収束することが示されたことになる。

$x = 0$ のときは、(3) の右辺は当然収束し 1 となる。よって、あとは $x < 0$ の場合を考えればよい。$-x = y\ (> 0)$ とすると、

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n = \left(\frac{n-y}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\dfrac{n}{n-y}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{y}{n-y}\right)^n} \quad (9)$$

となり、この分母はさらに

$$\left(1 + \frac{y}{n-y}\right)^n = \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \left(\frac{1 + \dfrac{y}{n-y}}{1 + \dfrac{y}{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \left(\frac{n^2}{n^2 - y^2}\right)^n \quad (10)$$

となるが、この最後の項の $c_n(y) = \{n^2/(n^2 - y^2)\}^n$ の極限を、はさみうちの原理を用いて求めてみる。

定理 2. (はさみうちの原理)

1. 実数列 $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ がすべての n に対し $a_n \le b_n$ で、かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β は有限値) のとき、$\alpha \le \beta$ となる。
2. 実数列 $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$, $\{c_n\}_n$ がすべての n に対し $a_n \le b_n \le c_n$ で、かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ のとき、$\lim_{n\to\infty} b_n$ も存在して α になる。

この定理 2 の成立も認めることとする (詳しくは [1] 第 1 章)。

$n > \sqrt{2}\,y$ である n を考えると、$n^2 > 2y^2$ なので、

$$n^2 - y^2 > n^2 - \frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{2}, \quad n^2 - y^2 < n^2$$

より、$c_n(y) = \{n^2/(n^2 - y^2)\}^n = \{1 + y^2/(n^2 - y^2)\}^n$ は $n > \sqrt{2}y$ に対して

$$1 < c_n(y) < \left(1 + \frac{2y^2}{n^2}\right)^n \quad (11)$$

とはさまれることがわかる。次の命題 3 を用いるとこの右辺の極限が 1 であることがわかり、よって定理 2 により $c_n(y)$ の極限は 1 となる。

命題 3.

$a_n > 0$ で $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha > 0$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \quad (12)$$

この命題 3 は、$\sqrt[n]{a_n} = {a_n}^{1/n}$ と考えれば簡単そうに見えるかもしれないが、そのような極限の計算では指数関数 a^x の $x = 0$ での連続性を用いることになる。本稿では、まだ指数関数を導入する前の話であるし、本稿では有理数乗も用いないので、それらを使わずに命題 3 を示す必要がある。

証明 (命題 **3**)

極限の話なので、あるところから先の n のみを考えればよいが、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より $\lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0$ であり、また $\alpha > 0$ なので、あるところから先の n に対しては $|a_n - \alpha| < \alpha/2$ であるとしてよい (厳密には、[1] 等の極限の定義による)。

このとき、$-\alpha/2 < a_n - \alpha < \alpha/2$ より

$$\frac{\alpha}{2} < a_n < \frac{3\alpha}{2} \tag{13}$$

となる。n 乗は単調であるからその逆である n 乗根も単調、よって (13) より

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3\alpha}{2}} \tag{14}$$

となるから、あとは任意の正の定数 β (> 0) に対して

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta} = 1 \tag{15}$$

が言えれば、(14) とはさみうちの原理により (12) が成り立つことがわかる。よって (15) を示す。

まず、$\beta = 1$ ならば $\sqrt[n]{\beta} = 1$ より (15) は成立する。

$\beta > 1$ のときは、$\sqrt[n]{\beta} > \sqrt[n]{1} = 1$ より、$\sqrt[n]{\beta} - 1 = p_n$ とすると $p_n > 0$ であり、よって $n \geq 1$ に対して

$$\beta = (1 + p_n)^n = 1 + np_n + \cdots + p_n^n \geq 1 + np_n$$

となり、よって

$$\frac{\beta - 1}{n} \geq p_n > 0$$

となるので、はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ となることがわかる。これで (15) が示される。

最後に、$0 < \beta < 1$ の場合は、$1/\beta = \gamma$ とすれば $\gamma > 1$ で、

$$\sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\gamma}}$$

であり (最後の等式は、n 乗すればいずれも $1/\gamma$ になることからわかる)、この最後の分母は上に示したことにより 1 に収束するから、よって $0 < \beta < 1$ の場合も (15) が成り立つことがわかる。 ∎

命題 3 を不等式 (11) に適用する。(11) の右辺は

$$\left(1+\frac{2y^2}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{2y^2}{n^2}\right)^{n^2}}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2y^2}{n^2}\right)^{n^2} = \exp(2y^2)$$

であり、この極限が存在することは $y^2 > 0$ より既に保証されている。よって命題 3 より

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2y^2}{n^2}\right)^n = 1$$

となるので、はさみうちの原理により、$\lim_{n\to\infty} c_n(y) = 1$ となる。

(10) に戻ると、結局 (10) の極限は $\exp(y)\cdot 1$ となるので、よって、(9) より

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{\exp(-x)}$$

となる。すなわち、$x < 0$ の場合も (3) の右辺は収束し、

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \tag{16}$$

が成り立つ。これは、「$e^{-x} = 1/e^x$」の指数法則に対応する。なお、(16) の逆数を取ればわかるが、これは x が正か負かに関わらずに成り立つ。

また、上の $c_n(y)$ の収束性の議論を少し一般化させると、次が成り立つことを示すことができる。

命題 4. 定数 A, B に対して、

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{B}{n^2+nA}\right)^n = 1 \tag{17}$$

証明

$n \geq 2|A|$ である n に対し、

$$n^2 + An \geq n^2 - |A|n \geq n^2 - \frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{2}$$

なので、

$$\begin{aligned} 1+\frac{B}{n^2+nA} &\leq 1+\frac{|B|}{n^2+nA} \leq 1+\frac{2|B|}{n^2}, \\ 1+\frac{B}{n^2+nA} &\geq 1-\frac{|B|}{n^2+nA} \geq 1-\frac{2|B|}{n^2} \end{aligned}$$

となるから、さらに $n > \sqrt{2|B|}$ でもあるとすれば $1-2|B|/n^2 > 0$ であり、よって

$$\left(1-\frac{2|B|}{n^2}\right)^n \leq \left(1+\frac{B}{n^2+nA}\right)^n \leq \left(1+\frac{2|B|}{n^2}\right)^n$$

が成り立ち、

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2|B|}{n^2}\right)^{n^2} = \exp(-2|B|), \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2|B|}{n^2}\right)^{n^2} = \exp(2|B|)$$

なので、命題 3 とはさみうちの原理により (17) が成り立つことがわかる。 ∎

3 指数法則

次は、$\exp(x)$ に対する指数法則などの基本性質を見ていく。

まず、$x < y$ のとき、

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{y}{n}\right)^n$$

であるから、

$$\exp(x) \leq \exp(y) \quad (x < y) \tag{18}$$

の単調増加性が得られる。なお、実際にはこの等号も外すことができるが、それは後で示す。

また、$n \geq 1, x > 0$ に対して、

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} b_k^n x^k \geq 1+x$$

であるから、

$$\exp(x) \geq 1+x \quad (x > 0) \tag{19}$$

が成り立ち、$x < 0$ ならば (16), (19) より

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{1-x} \tag{20}$$

が成り立つことがわかる。(16), (19) より x が正でも負でも $\exp(x)$ は常に正となるので、(19), (20) から、漸近性質

$$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \tag{21}$$

が得られる (厳密にははさみうちの原理による)。

次は指数法則を考える。まず、自然数 m に対して、

$$\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}^m = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{nm} = \left(1+\frac{mx}{nm}\right)^{nm}$$

より、$n \to \infty$ の極限を取れば

$$\exp(x)^m = \exp(mx) \tag{22}$$

が成り立つことがわかる。また、(16) と組み合わせると

$$\frac{1}{\exp(x)^m} = \frac{1}{\exp(mx)} = \exp(-mx)$$

も成り立つので、以上を合わせると、整数 m に対して、

$$\exp(mx) = \begin{cases} \exp(x)^m & (m > 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{\exp(x)^{|m|}} & (m < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{23}$$

が得られる。さらに、自然数 k に対して、(22) より

$$\exp(x) = \exp\left(k \times \frac{x}{k}\right) = \exp\left(\frac{x}{k}\right)^k$$

となるから、よって

$$\exp\left(\frac{x}{k}\right) = \sqrt[k]{\exp(x)}$$

となる。これと (23) を組み合わせれば、整数 m, k $(k>0)$ に対して、

$$\exp\left(\frac{m}{k}x\right)=\begin{cases}\sqrt[k]{\exp(x)^m} & (m>0 \text{ のとき})\\ \sqrt[k]{\dfrac{1}{\exp(x)^{|m|}}} & (m<0 \text{ のとき})\end{cases} \tag{24}$$

となることもわかる。これは、有理数 q に対して「$(e^x)^q=e^{qx}$」を示したことに相当する。しかし、実数 y に対する「$(e^x)^y=e^{xy}$」を示すには、一般の a に対する「a^x」が必要になるので、それはまだ示すことはできない。

次は、$\exp(x)\exp(y)$ を考える。

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n &= \left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n\\ &= \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\left(\frac{1+\dfrac{x+y}{n}+\dfrac{xy}{n^2}}{1+\dfrac{x+y}{n}}\right)^n\\ &= \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\left(1+\frac{xy}{n^2+n(x+y)}\right)^n\end{aligned}$$

となるが、命題 4 により最後の式は $\exp(x+y)$ と 1 の積に収束するので、

$$\exp(x)\exp(y)=\exp(x+y) \tag{25}$$

が成り立つことになる。これは「$e^xe^y=e^{x+y}$」に相当する。

なお、$x>0$ であれば (19) より $\exp(x)>1$ なので、(25) より $x<y$ に対して

$$\exp(y)=\exp(y-x)\exp(x)>\exp(x) \tag{26}$$

が成り立つことがわかる。これは、(18) の等号を外すことができることを示したことになる。

(25) で y を $-y$ とすれば、(16) より

$$\frac{\exp(x)}{\exp(y)}=\exp(x-y) \tag{27}$$

が成り立つこともわかる。これは「$e^x/e^y=e^{x-y}$」に相当する。

4 一般の指数関数

一般の正の実数 $a\ (>0)$ の実数乗「a^x」に相当する $\mathrm{pow}(a,x)$ を、$a=\exp(p)$ となる p に対し、

$$\mathrm{pow}(a,x)=\exp(px) \tag{28}$$

と定義する。まず、a に対する p の存在であるが、3 節、および (26) でみたように、$\exp(x)$ は増加関数で、(21) より実数全体から正の実数全体への 1 対 1 の対応を与える。よって、$a>0$ であれば $a=\exp(p)$ となる p が必ず存在し、かつただ一つ定まることがわかる。

なお、この p は a に対してただ一つ定まるので、そのような a から p への対応を $a=\exp(p)$ の逆関数と呼び、通常は $p=\exp^{-1}(a)$ のように書くが、(-1) 乗とまぎらわしいので、本稿ではこれを $p=\ln(a)$ と書くことにする。これにより、(28) は、

$$\mathrm{pow}(a,x)=\exp(x\ln(a)) \tag{29}$$

と書けることになるが、これは (2) に対応する。この (28) により、任意の $a>0,\ x$ に対して a の x 乗に相当する $\mathrm{pow}(a,x)$ が定義されることになる。

なお、$p=1$ の場合を考えると、$e=\exp(1)$ とすれば、$1=\ln(e)$ であるから

$$\mathrm{pow}(e,x)=\exp(1\cdot x)=\exp(x)$$

となるので、よって $\exp(x)$ 自身もこの意味で「$e=\exp(1)$ の x 乗」に相当するものになっている。

今度はこの $\mathrm{pow}(a,x)$ の性質を見ていく。まず、(28) より、$p>0$ ならば $\mathrm{pow}(a,x)$ は増加関数、$p<0$ ならば $\mathrm{pow}(a,x)$ は減少関数であることがわかるが、$\exp(0)=1$ より、$p=\ln(a)>0$ となるのは $a>1$ のとき、$p<0$ となるのは $0<a<1$ のときなので、よって (21) より

- $a>1$ のときは $\mathrm{pow}(a,x)$ は増加関数で、
  $\lim_{x\to\infty}\mathrm{pow}(a,x)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\mathrm{pow}(a,x)=0$
- $0<a<1$ のときは $\mathrm{pow}(a,x)$ は減少関数で、
  $\lim_{x\to\infty}\mathrm{pow}(a,x)=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\mathrm{pow}(a,x)=\infty$

の単調性と漸近性が得られる。また、

$$\mathrm{pow}(a,0)=\exp(0)=1,\quad \mathrm{pow}(a,1)=\exp(p)=a \tag{30}$$

も言える。よって、x が正の有理数 $x = m/n$ (m, n は自然数) であれば、(24) より

$$\mathrm{pow}\left(a, \frac{m}{n}\right) = \exp\left(\frac{m}{n}p\right) = \sqrt[n]{\exp(p)^m} = \sqrt[n]{a^m}$$

で、x が負の有理数 $x = -m/n$ であれば、

$$\mathrm{pow}\left(a, -\frac{m}{n}\right) = \exp\left(-\frac{m}{n}p\right) = \sqrt[n]{\frac{1}{\exp(p)^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

となり、確かに $pow(a, x)$ が通常の「a^x」に対応したもの、すなわち通常の有理数乗を含んでいることがわかる。

また、(25), (27) より、

$$\begin{aligned} \mathrm{pow}(a,x)\,\mathrm{pow}(a,y) &= \exp(px)\exp(py) = \exp(p(x+y)) = \mathrm{pow}(a, x+y), \\ \frac{\mathrm{pow}(a,x)}{\mathrm{pow}(a,y)} &= \frac{\exp(px)}{\exp(py)} = \exp(p(x-y)) = \mathrm{pow}(a, x-y) \end{aligned}$$

の通常の指数法則 ($a^x a^y = a^{x+y}$, $a^x/a^y = a^{x-y}$) が成り立つこともわかる。

次は、$\mathrm{pow}(a,x)\,\mathrm{pow}(b,x)$ を考える。$p = \ln(a)$, $q = \ln(b)$ とすると、$a = \exp(p)$, $b = \exp(q)$ であるから、

$$ab = \exp(p)\exp(q) = \exp(p+q)$$

となるので、$p + q = \ln(ab)$ であり、よって、

$$\begin{aligned} \mathrm{pow}(ab, x) &= \exp((p+q)x) = \exp(px+qx) = \exp(px)\exp(qx) \\ &= \mathrm{pow}(a,x)\,\mathrm{pow}(b,x) \end{aligned}$$

の指数法則 ($(ab)^x = a^x b^x$) が成り立つ。同様にして、$p - q = \ln(a/b)$ より

$$\mathrm{pow}\left(\frac{a}{b}, x\right) = \frac{\mathrm{pow}(a,x)}{\mathrm{pow}(b,x)}$$

となること ($(a/b)^x = a^x/b^x$) も示される。

最後に「$(a^x)^y$」の指数法則、すなわち $\mathrm{pow}(\mathrm{pow}(a,x), y)$ であるが、$p = \ln(a)$, $q = \ln(\mathrm{pow}(a,x))$ とすると、$a = \exp(p)$, $\mathrm{pow}(a,x) = \exp(q)$ となるが、

$$\mathrm{pow}(a,x) = \exp(px) = \exp(q)$$

より $\exp(x)$ の単調性から $q = px$ である。よって、

$$\mathrm{pow}(\mathrm{pow}(a,x),y) = \exp(qy) = \exp(pxy) = \mathrm{pow}(a,xy)$$

となり、「$(a^x)^y = a^{xy}$」に対応するものが得られる。

5 導関数

次は、$\exp(x)$ の導関数を考える。そのために、まず $|\Delta x| \leq 1$ となる Δx に対して、

$$\left|\left(1+\frac{\Delta x}{n}\right)^n - 1 - \Delta x\right| \leq |\Delta x|^2 \tag{31}$$

の不等式が成り立つことを示す。

$$\left(1+\frac{\Delta x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{\Delta x}{n}\right)^k = 1 + \Delta x + \sum_{k=2}^{n} b_k^n (\Delta x)^k$$

なので、$|\Delta x| \leq 1$ のときは (8) より、

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=2}^{n} b_k^n (\Delta x)^k\right| &\leq \sum_{k=2}^{n} b_k^n |\Delta x|^k \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{|\Delta x|^2}{2^{k-1}} = |\Delta x|^2 \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &\leq |\Delta x|^2\end{aligned}$$

となり、(31) が成り立つことがわかる。この式で $n \to \infty$ の極限を考えると、

$$|\exp(\Delta x) - 1 - \Delta x| \leq |\Delta x|^2 \quad (|\Delta x| \leq 1) \tag{32}$$

が得られる。指数法則により

$$\frac{\exp(x+\Delta x) - \exp(x)}{\Delta x} = \frac{\exp(x)\exp(\Delta x) - \exp(x)}{\Delta x} = \exp(x)\frac{\exp(\Delta x) - 1}{\Delta x}$$

となるから、よって (32) より、

$$\left|\frac{\exp(x+\Delta x) - \exp(x)}{\Delta x} - \exp(x)\right| = \exp(x)\left|\frac{\exp(\Delta x) - 1}{\Delta x} - 1\right| \leq \exp(x)|\Delta x|$$

となるので、x を固定して $\Delta x \to 0$ とすれば、右辺は 0 に収束するから、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\exp(x+\Delta x) - \exp(x)}{\Delta x} = \exp(x)$$

となり、これは $\exp(x)$ の導関数が $\exp(x)$ であること

$$\{\exp(x)\}' = \exp(x) \tag{33}$$

を意味する。

なお、逆関数の微分公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

を用いれば、$y = \exp(x)$ の逆関数 $x = \ln(y)$ の導関数は、

$$\frac{d\ln(y)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \frac{1}{(\exp(x))'} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{y}$$

となるので、$\ln(1) = 0$ より、$\exp(x)$ の逆関数 $\ln(y)$ は、いわゆるメルカトルの自然対数 (双曲対数)

$$\ln(y) = \int_1^y \frac{dt}{t}$$

に等しいことがわかる。

6 複素数乗

$\exp(x)$ の定義式 (3) の発展として、最後に「複素数乗」を考えてみる。(3) の定義は単に自然数乗しか使わないので、この式の x を複素数にしても問題はない。それにより、いわゆるオイラーの公式による複素数乗が得られるのかを考えてみる。

なお、その考察のために、まず複素数列の収束性を定義し、複素数の極形式、ド・モアブルの公式を復習しておく。

- 複素数列 $z_n = x_n + y_n i$ $(x_n = \mathrm{Re}\, z_n,\ y_n = \mathrm{Im}\, z_n)$ が、複素数 $\alpha = p + qi$ に収束するとは、$\lim_{n\to\infty} x_n = p$ かつ $\lim_{n\to\infty} y_n = q$ であることと定める。
- 複素数 $z = a + bi$ $(\neq 0)$ に対して、$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (> 0)、$\theta = \arg(z)$ (偏角) とすると、$a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta$ となるので、$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と書ける。この式を z の極形式という。

- 加法定理を用いれば、

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\\ &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\end{aligned} \tag{34}$$

となるので、これを繰り返し使うことでド・モアブルの公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta) \quad (n \text{ は自然数}) \tag{35}$$

が得られる。

さて、まず (3) の右辺の x を $x = i\alpha$ (α は実数) とした式の極限を考える。$1 + i\alpha/n$ を極形式で表すと、

$$1 + \frac{i\alpha}{n} = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}\,(\cos\beta_n + i\sin\beta_n), \quad \beta_n = \arg\left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)$$

となる。ここで、β_n は $-\pi/2 < \beta_n < \pi/2$ と取れ、$r\cos\beta_n = 1$, $r\sin\beta_n = \alpha/n$ より、$\tan\beta_n = \alpha/n$ であることに注意する。ド・モアブルの公式より、

$$\begin{aligned}f_n(i\alpha) &= \left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n = \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}\right)^n (\cos\beta_n + i\sin\beta_n)^n\\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right)^n}\,(\cos n\beta_n + i\sin n\beta_n)\end{aligned} \tag{36}$$

となるが、先頭の根号の中身は命題 4 により、$n \to \infty$ のときに 1 に収束する。一方、$\tan\beta_n = \alpha/n \to 0$ であるから $\beta_n \to 0$ であり、よく知られているように

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$$

であるから、

$$n\beta_n = n\tan\beta_n \times \frac{\beta_n}{\tan\beta_n} = \alpha\cdot\frac{\beta_n}{\tan\beta_n} \to \alpha \quad (n\to\infty)$$

となることがわかる。よって、$f_n(i\alpha)$ の極限は、

$$\lim_{n\to\infty} f_n(i\alpha) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n = \cos\alpha + i\sin\alpha \tag{37}$$

となるから、これにより $\exp(x)$ を (3) によって複素数に拡張すると、

$$\exp(i\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha \tag{38}$$

が成り立つことになる。これは、いわゆるオイラーの公式「$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$」に対応する。

さらに x を一般の複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) とすると、

$$1 + \frac{x+iy}{n} = \sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}}\,(\cos\gamma_n + i\sin\gamma_n), \quad \gamma_n = \arg\left(1 + \frac{x}{n} + \frac{yi}{n}\right)$$

となり、$n > |x|$ である n を考えれば $1 + x/n > 0$ なので、

$$-\frac{\pi}{2} < \gamma_n < \frac{\pi}{2}, \quad \tan\gamma_n = \frac{\dfrac{y}{n}}{1+\dfrac{x}{n}} = \frac{y}{n+x} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

より、$\lim_{n\to\infty}\gamma_n = 0$ で

$$n\gamma_n = n\tan\gamma_n \times \frac{\gamma_n}{\tan\gamma_n} = \frac{ny}{n+x} \times \frac{\gamma_n}{\tan\gamma_n} \to y \quad (n\to\infty)$$

となることがわかる。一方、

$$\begin{aligned}
\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right\}^n &= \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^n \\
&= \left(1+\frac{2x}{n}\right)^n \left(\frac{1 + \dfrac{2x}{n} + \dfrac{x^2+y^2}{n^2}}{1+\dfrac{2x}{n}}\right)^n = \left(1+\frac{2x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{\dfrac{x^2+y^2}{n^2}}{1+\dfrac{2x}{n}}\right)^n \\
&= \left(1+\frac{2x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{x^2+y^2}{n^2+2nx}\right)^n
\end{aligned}$$

であり、これは命題 4 により、$n\to\infty$ のときに $\exp(2x)\times 1$ に収束する。よって、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right\}^n}\,(\cos n\gamma_n + i\sin n\gamma_n) \\
&= \sqrt{\exp(2x)}\,(\cos y + i\sin y) = \exp(x)(\cos y + i\sin y)
\end{aligned}$$

となることが (24) からわかる。これは、

$$\exp(z) = \exp(x+iy) = \exp(x)(\cos y + i\sin y) \tag{39}$$

を意味し、これも通常の e の複素数乗の式に対応する。

そして、(39) を用いれば、複素数に対する指数法則

$$\exp(z)\exp(w) = \exp(z+w), \quad \frac{\exp(z)}{\exp(w)} = \exp(z-w), \quad \exp(z)^n = \exp(nz) \quad (40)$$

(n は自然数) も容易に示される。

7 最後に

本稿では、高校の教科書に書かれているものとは異なる実数乗の定義の仕方と、それによる指数法則の証明などを紹介したが、私は「実数乗をこのように定義すべき」と考えているわけではない。実際、本文を見てわかるように、この方法は極限に関してほぼ高校の数学 III レベルの知識を必要とするため、高校生に指数関数の定義として本稿のように説明するのは現実的ではない。あくまで、実数乗の定義には別な方法もある、という例を示しているだけで、むしろ通常の「有理数乗の極限」の方が自然だろうと思う。

ただ、このような議論は無駄なわけではなく、例えばコンピュータ上の計算では、一般の実数乗よりも e^x の方が、そして常用対数よりも自然対数の方が簡単に計算できるため、一般の実数乗を e^x と自然対数で計算する式 (2) (すなわち (29)) が数値計算では普通に使われている。よって関数電卓などで一般の底の有理数乗や無理数乗を求める場合も、実は見えないところで e^x や自然対数が使われていたりするし、自分で数値計算する場合には (29) が直接必要となることもある。

また、今回 (3) を複素数乗にも使ってみて、オイラーの公式を比較的容易に示せることを確認できたのは個人的には良かったと思う。従来オイラーの公式を説明する際は、多くの本に書かれている通りテイラー展開の式に複素数を代入する方法や、(34) などの状況証拠で説明をしていたが、いずれもややもの足りない感じがしていた。それに比べて、今回の (3) による方法は、多少面倒なところはあるが比較的「証明」らしいし、納得しやすい感じもするので、もしかしたら講義の参考資料にでも使えるかもしれない。

参考文献

[1] 田島一郎、「解析入門」(岩波全書 325)、岩波書店 (1981)

[2] 志賀浩二、「数の大航海 対数の誕生と広がり」、日本評論社 (1999)

[3] E. マオール (伊理由美訳)、「不思議な数 e の物語」、岩波書店 (1999)

[4] マイベルク、ファヘンアウア (高見穎郎訳)、「工科系の数学 1 数、ベクトル、関数」、サイエンス社 (1996)

[5] E. ハイラー、G. ヴァンナー (蟹江幸博訳)、「解析教程 上」、丸善出版 (2012)