2024 年 06 月 17 日

指数の拡張と指数法則の証明

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

自然数乗は、高校で 0 乗、負の整数乗、有理数乗と拡張され、そして形式的には実数乗まで拡張される。

講義でも、その話の復習と、それに伴なって指数法則も有理数乗 (実際には実数乗) に対しても成立する、という話を紹介しているが、教科書、あるいは解析学のほとんどの本にもその証明は書かれていないので、本稿ではその証明を紹介する。

2 自然数乗

本稿で証明する「指数法則」とは、以下の 5 つである。

- [L1] $a^x a^y = a^{x+y}$
- [L2] $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- [L3] $(a^x)^y = a^{xy}$
- [L4] $(ab)^x = a^x b^x$
- [L5] $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

a, b, x, y に関する条件は節毎に異なるが、まず本節では自然数乗について考える。

自然数乗、すなわち [L1]~[L5] の x, y が自然数である場合、次の条件

> 条件 N: x, y は任意の自然数、a, b は任意の実数で、[L2] では $a \neq 0$ かつ $x > y$、[L5] では $b \neq 0$

を満たす場合にこれらが成立することはほぼ明らかであるが、簡単に説明する。

まず [L1] は、左辺は a の x 個の積と y 個の積同士の積なので、合計して $x+y$ 個の積となるから右辺に等しい。

[L2] は、$a \neq 0$ より $a^y \neq 0$ で、左辺は分子が a の y 個の積、分母が a の x 個の積で、$x > y$ より y 個の a で約分ができ、分母は 1、分子には $x-y$ 個の a の積が残るので右辺に等しい。

なお、[L2] は、[L1] を用いて、

$$a^{x-y}a^y = a^{(x-y)+y} = a^x \tag{1}$$

が得られ、$a \neq 0$ より $a^y \neq 0$ なので、この式の両辺を a^y で割って得ることもできる。

[L3] は、左辺は a^x の y 個の積であり、a^x が a の x 個の積なので、全体で a の xy 個の積となり右辺に等しい。

[L4] は、ab の x 個の積であり、順序を入れ替えれば a の x 個、b の x 個の積となるから右辺に等しい。

[L5] は、$\frac{a}{b}$ の x 個の積であり、よって分子は a の x 個、分母は b の x 個の積となるから右辺に等しい。

なお、[L5] は、[L4] を用いて、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x b^x = \left(\frac{a}{b} \times b\right)^x = a^x \tag{2}$$

が得られ、$b \neq 0$ より $b^x \neq 0$ なので、この式の両辺を b^x で割って得ることもできる。

[L1] から [L2] を、[L4] から [L5] を得る方法は、後の証明でもほぼ同じ方法で用いる。

3 整数乗

次は一般の整数乗に対する指数法則を考える。そのためにまず累乗を 0 以下の整数に拡張する。

0 乗と負の整数乗は、実数 $a \neq 0$ に対して

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ (n \text{ は自然数}) \tag{3}$$

と定義される。なお、$a = 0$ に対しては、0^0 と 0^{-n} は定義しない。

これにより、$a \neq 0$ に対してすべての整数乗が定義されたことになるが、これに対して指数法則 [L1]~[L5] が成り立つことを示す。なお一般の整数乗に対する指数法則では次の条件 Z を課す:

> 条件 Z: a, b は 0 以外の任意の実数、x, y は任意の整数

この条件の元で [L1]~[L5] を証明するが、$x > 0$ かつ $y > 0$ であれば、これらは 2 節の指数法則に含まれるので、そうでない x, y、すなわち少なくとも一方が 0 以下であるものに対して示せばよい。

まず最初に自然数に対する [L2] が、$x > y$ の制限なしに成り立つこと、すなわち任意の自然数 m, n と、実数 $a \neq 0$ に対して、

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{4}$$

が成り立つことを先に示す。これは、$m > n$ に対しては 2 節で既に示してあるので、$m \leq n$ に対して成り立つことを示せばよい。

$m = n$ なら (4) の両辺は、(3) によりともに 1 になるので成立する。$m < n$ なら、2 節より、

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

となるから、その逆数を考えれば、(3) により、

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$$

となるので、よってすべての m, n で (4) が成立する。

まず [L1] から考える。$x = 0$ の場合は、(3) より両辺ともに a^y となるので成立する。$y = 0$ の場合も同様に成立する。よってあとは、

> (ア) $x < 0$ かつ $y > 0$ の場合、(イ) $x > 0$ かつ $y < 0$ の場合、(ウ) $x < 0$ かつ $y < 0$ の場合

の 3 通りを考えればよい。なおこの場合分けも今後よく用いる。また、$x < 0$ の場合は $x = -x'$、$y < 0$ の場合は $y = -y'$ とする。この書き方も今後よく用いる。

まず (ア) の場合。この場合は、(3), (4) より

$$a^x a^y = a^{-x'} a^y = \frac{a^y}{a^{x'}} = a^{y-x'} = a^{y+x} \tag{5}$$

となるので [L1] は成立する。(イ) の場合も同様で、

$$a^x a^y = a^x a^{-y'} = \frac{a^x}{a^{y'}} = a^{x-y'} = a^{x+y} \tag{6}$$

となり成立する。最後に (ウ) の場合は、(3)、および自然数乗の [L1] により、

$$a^x a^y = a^{-x'} a^{-y'} = \frac{1}{a^{x'}} \frac{1}{a^{y'}} = \frac{1}{a^{x'} a^{y'}} = \frac{1}{a^{x'+y'}} = a^{-(x'+y')} = a^{x+y} \tag{7}$$

となって成立する。これで [L1] が示された。

また、[L2] は、2 節の (1) のやり方で [L1] から示される。

次は [L3]。$x=0$ または $y=0$ の場合は、(3) によりそれぞれ

$$(a^0)^y = 1^y = 1, \quad (a^x)^0 = 1 \tag{8}$$

となって左辺は 1、右辺も (3) により 1 になるので成立する。よってあとは、[L1] と同じ (ア)(イ)(ウ) の場合に示せばよい。

まず、(ア) の場合は、(3)、および自然数乗に対する [L5],[L3] より、

$$(a^x)^y = (a^{-x'})^y = \left(\frac{1}{a^{x'}}\right)^y = \frac{1^y}{(a^{x'})^y} = \frac{1}{a^{x'y}} = a^{-x'y} = a^{xy} \tag{9}$$

となって成立する。(イ) の場合は、(3)、および自然数乗に対する [L3] より、

$$(a^x)^y = (a^x)^{-y'} = \frac{1}{(a^x)^{y'}} = \frac{1}{a^{xy'}} = a^{-xy'} = a^{xy} \tag{10}$$

となり成立する。最後に (ウ) の場合は、(3)、および自然数乗に対する [L5],[L3] より、

$$(a^x)^y = (a^{-x'})^{-y'} = \left(\frac{1}{a^{x'}}\right)^{-y'} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{a^{x'}}\right)^{y'}} = \frac{1}{\dfrac{1^{y'}}{(a^{x'})^{y'}}} = \frac{a^{x'y'}}{1} = a^{xy} \tag{11}$$

となって成立する。これで [L3] が示されたことになる。

次は [L4]。$x \leq 0$ に対して示せばよいが、$x=0$ のときは、(3) より両辺ともに 1 となって成立する。$x<0$ の場合は、(3)、および自然数乗に対する [L4] より、

$$a^x b^x = a^{-x'} b^{-x'} = \frac{1}{a^{x'}} \frac{1}{b^{x'}} = \frac{1}{a^{x'} b^{x'}} = \frac{1}{(ab)^{x'}} = (ab)^{-x'} = (ab)^x \tag{12}$$

となって成立する。

[L5] は、2 節の (2) の論法により [L4] から得られる。

これで、一般の整数乗の指数法則 [L1]〜[L5] がすべて成立することが示された。

4 有理数乗の定義

次は有理数乗の指数法則を考えるが、まずは有理数乗の定義から。そのために、累乗根をまず考える。

0 以上の実数 $a \geq 0$、および任意の自然数 n に対して、$x^n = a$ となる 0 以上の実数 x を a の n 乗根といい、$x = \sqrt[n]{a}$ と書く。

このような x が常に、そしてただ一つ存在することは、関数 x^n の単調性、連続性、および $0^n = 0,\ \lim_{x\to\infty} x^n = \infty$ であることから示される。

なお、通常「1 乗根」「2 乗根」なる言葉はあまり使わないが、それらも n 乗根の中に含めることにする。

n 乗根がただ一つ常に存在することから、次のことが言える。

- [R1] 正の実数 a、自然数 n に対し $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$
- [R2] 正の実数 a, b、自然数 n に対し、$a^n = b$ ならば $a = \sqrt[n]{b}$

さて、正の実数 $a > 0$、自然数 m, n に対し、有理数乗 $a^{\frac{m}{n}}$ は

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{13}$$

と定義される。ただし、これが正しく「有理数乗の定義」となるためには、2 つ示さなければいけないことがある。

- [D1] $\frac{m}{n}$ が自然数 k に等しいとき、$\sqrt[n]{a^m}$ は a^k に等しいこと。
- [D2] $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ のとき、$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$ となること。

この [D1] は、有理数には自然数が含まれるために、自然数乗と有理数乗のどちらと見るかで異なる値にならないために必要であり、また [D2] は、有理数の分数表現が一意でないために、そのどれを採用するかで異なる値にならないために必要である。

なお、前の自然数乗から整数乗への拡張の場合は、0 や負の整数は自然数と重なることはなかったため、定義自体に関して考える必要はなかった。

まず、[D1] から考えてみる。$\frac{m}{n} = k$ の場合は $m = nk$ より、[R1] と自然数乗に対する [L3] により、

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{nk}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k$$

となるので、確かに [D1] が成立する。

[D2] は、$\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ のときは $mq=pn$ なので、$z=\sqrt[n]{a^m}$ とすると、[R1] と自然数乗に対する [L3] により、

$$z^{nq}=\{(\sqrt[n]{a^m})^n\}^q=(a^m)^q=a^{mq}=a^{pn}$$

となり、[R1] と自然数乗に対する [L3] により、

$$\sqrt[n]{z^{nq}}=\sqrt[n]{(z^q)^n}=z^q=\sqrt[n]{a^{pn}}=\sqrt[n]{(a^p)^n}=a^p$$

となるので、[R2] により $z=\sqrt[q]{a^p}$ となり、よって [D2] が成立する。

自然数 m,n、実数 $a>0$ に対する負の有理数乗 $a^{-\frac{m}{n}}$ は、

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \tag{14}$$

と定義する。これも、正の有理数乗の場合の [D1],[D2] と同様の性質を満たす必要はあるが、(14) の分母の $a^{\frac{m}{n}}$ が既に [D1]、[D2] を満たし正しく定義されることが保証されたので、$-\frac{m}{n}$ も同様の性質を持ち、正しく定義されることになる。

これで、(13), (14) により正の実数の有理数乗が矛盾なく定義できることがわかった。

なお、整数乗の場合、底 a は 0 以外の実数でよかったが、有理数乗では正の実数の有理数乗のみを考える。実は、累乗根自体は、$a<0$ に対しても、n が奇数の場合は

$$\sqrt[n]{a}=-\sqrt[n]{|a|} \tag{15}$$

と考えることがある。これは、右辺の n 乗が確かに $-|a|=a$ になるからであるが、これを有理数乗に持ちこもうとすると [D2] が満たされない。例えば、(15) の元では、

$$\sqrt[3]{-1}=-\sqrt[3]{1}=-1$$

となるが、

$$\sqrt[6]{(-1)^2}=\sqrt[6]{1}=1$$

となるので、「$(-1)^{\frac{1}{3}}$」と「「$(-1)^{\frac{2}{6}}$」が一致しないことになってしまう。よって、$a<0$ に対しては、累乗根を考えることはあるが有理数乗は考えない。

5 有理数乗の指数法則

本節で、いよいよ有理数乗の指数法則 [L1]〜[L5] を証明する。a,b,x,y には次の条件 Q を課す:

条件 Q: a,b は正の任意の実数、x,y は任意の有理数

まずは、[L1],[L2] から。

まずは $x=\frac{m}{n}>0$, $y=\frac{p}{q}>0$ (m,n,p,q: 自然数) の場合に [L1],[L2] が成り立つことを示す。この場合、[L1] は、

$$a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \tag{16}$$

を示すことになるが、この左辺を z とすると、自然数乗に対する [L4],[L3],[L1]、および [R1] により、

$$\begin{aligned} z^{nq} &= \left(a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{p}{q}}\right)^{nq}=(a^{\frac{m}{n}})^{nq}(a^{\frac{p}{q}})^{nq}=\{(\sqrt[n]{a^m})^n\}^q\{(\sqrt[q]{a^p})^q\}^n=(a^m)^q(a^p)^n \\ &= a^{mq}a^{pn}=a^{mq+pn} \end{aligned}$$

となるので、[R2] により

$$z=\sqrt[nq]{a^{mq+pn}}=a^{\frac{mq+pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

となって、(16) が成り立つことがわかる。

また、$x>0$, $y>0$ に対する [L2] については、$x>y$ のときは (16) により、(1) の方法で、

$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

がわかり、$x=y$ ならば明かに [L2] は成立し、$x<y$ のときは (16) により、

$$\frac{a^y}{a^x}=a^{y-x}$$

となるので、その逆数を考えれば

$$\frac{a^x}{a^y}=\frac{1}{a^{y-x}}=a^{-(y-x)}=a^{x-y}$$

となって [L2] が成立する。

これで、$x>0$, $y>0$ のときには [L1],[L2] が成立することがわかった。あとは $x\leq 0$, $y\leq 0$ の場合であるが、これは整数乗の場合と証明は実質的に同じである。

$x=0$ または $y=0$ の場合は、[L1] は明らかに成立し、あとは前と同じ (ア)(イ)(ウ) に場合分けすればいいのであるが、いずれも $x>0$, $y>0$ で成立する [L1],[L2]、および (14) により、(ア) の場合は (5)、(イ) の場合は (6)、(ウ) の場合は (7) と同じ式変形により成立することがわかる。

[L2] は、(1) の方法で [L1] から得られる。

次は [L3] の前に [L4],[L5] の方を考える。まずは、$x=\frac{m}{n}>0$ (m,n: 自然数) の場合の [L4] から。これは、

$$a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}=(ab)^{\frac{m}{n}} \tag{17}$$

を示すことになるが、この左辺を z とすると、自然数乗に対する [L4]、および [R1] により

$$z^n = \left(a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}\right)^n = (a^{\frac{m}{n}})^n(b^{\frac{m}{n}})^n = (\sqrt[n]{a^m})^n(\sqrt[n]{b^m})^n = a^m b^m = (ab)^m$$

となるので、[R2] により

$$z = \sqrt[n]{(ab)^m} = (ab)^{\frac{m}{n}}$$

となり (17) が示されたことになる。

$x = 0$ の場合は [L4] は明らかに成り立ち、$x < 0$ の場合は、整数乗の場合と同じ計算 (12) により、$x > 0$ に対する [L4] と (14) から成り立つことがわかる。これで [L4] が示された。

[L5] は、(2) の方法で [L4] から示される。

最後は [L3]。これもまずは $x = \frac{m}{n} > 0,\ y = \frac{p}{q} > 0$ の場合から考える。この場合は、

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\frac{p}{q}} \tag{18}$$

を示すことになるが、この左辺を z とすると、[R1], 自然数乗の [L3] より、

$$z^{nq} = \left\{\left(\sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p}\right)^q\right\}^n = \left\{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p\right\}^n = \{(\sqrt[n]{a^m})^n\}^p = (a^m)^p = a^{mp}$$

となるので、[R2] より

$$z = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\frac{p}{q}}$$

となり、これで (18)、すなわち $x > 0, y > 0$ の場合の [L3] が示されたことになる。

$x = 0$ または $y = 0$ の場合は、整数乗の場合の (8) と同じ計算で成立することがわかり、$x < 0$ かまたは $y < 0$ の場合も整数乗の場合と同様の計算を行えばよい。具体的には、(ア) の場合は (9)、(イ) の場合は (10)、(ウ) の場合は (11) と同じ計算をすればよいが、そこには正の有理数乗に対する [L5] と [L3]、および (14) を使用する (そのために [L3] より先に [L5] を証明した)。

これで [L3] も成り立つことが示され、すべての指数法則が証明されたことになる。

6 最後に

指数法則は、実は実数にまで拡張されている。よって本当は実数乗の話まですると良いのだろうが、それには極限を必要とし、また一段面倒な話が追加されるので、本稿では省略した。ただ、実数乗がちゃんと極限で定義され、その指数関数が連続である

ことが示されれば、実数乗に対して指数法則が成り立つことを示すのは、むしろ容易であり、今回のような計算はほぼ必要ない。

1 節で述べたように、指数法則が有理数乗でも成立することのちゃんとした証明は、普通の解析の本ではあまり見ることはないが、それは、本稿で見たように、とにかく地道にやっていくだけの面白くない議論、あるいは似たような議論の繰り返しの話がだらだらと続くだけだからである。

逆に本稿は、それらを一通り紹介しているというところに (のみ) 意味がある。有理数乗で本当に指数法則が成り立つかが気になる、という人には (そういう人はほとんどいないとは思うが)、少しは役に立つかもしれない。