2023 年 05 月 12 日

二項定理の証明と因数分解の公式

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

講義では、教科書にある 2 乗、3 乗の展開の公式のほかに、教科書には載っていない一般の n 乗の展開公式である二項定理

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_ka^{n-k}b^k={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_nb^n \qquad (1)$$

を紹介したが、本稿でその証明を紹介する。また、因数分解の公式として、教科書には

$$\begin{cases} a^2-b^2 &= (a-b)(a+b) \\ a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2) \end{cases} \qquad (2)$$

があがっていたが、その一般化として、a^n-b^n, a^n+b^n の因数分解についても考える。

2 特殊化

(1), (2) の公式は、いずれも a, b に関して「斉次」すなわちすべての項が a, b に関して同じ次数なので、片方を 1 にした形に帰着できる。まず本節ではその変形を行う。

(1) の両辺を b^n で割り、$a/b=x$ とすると、

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{(a+b)^n}{b^n} = \left(\frac{a+b}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}+1\right)^n = (x+1)^n, \\
\text{右辺} &= \sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\frac{a^{n-k}b^k}{b^n} = \sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} \\
&= {}_nC_0\left(\frac{a}{b}\right)^n+{}_nC_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\cdots+{}_nC_n \\
&= {}_nC_0x^n+{}_nC_1x^{n-1}+\cdots+{}_nC_n
\end{aligned}$$

となるので、(1) は

$$(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_kx^{n-k}={}_nC_0x^n+{}_nC_1x^{n-1}++\cdots+{}_nC_n \qquad (3)$$

となり、これは (1) で $a = x, b = 1$ とした式に等しい。

逆に、(3) で $x = a/b$ として、両辺を b^n 倍すれば (1) が再現されることになるので、(1) と (3) とは実質的に同値になる。

これは、(2) でも事情は同じで、b^2, b^3, b^3 でそれぞれの両辺を割って $a/b = x$ とすれば、$a = x, b = 1$ としたのと同じ式

$$\begin{cases} x^2 - 1 & = (x-1)(x+1) \\ x^3 - 1 & = (x-1)(x^2+x+1) \\ x^3 + 1 & = (x+1)(x^2-x+1) \end{cases} \tag{4}$$

が得られるが、ここで $x = a/b$ として両辺をそれぞれ b^2, b^3, b^3 倍すれば元の (2) が再現できるので (2) と (4) は同値となる。

よって以後は、(1), (2) の代わりに (3), (4) の方で考える。

3 二項定理の証明

本節で二項定理 (3) の証明を紹介する。

二項定理の証明方法はいくつかあるが、まずは数学的帰納法によるものを紹介する。そのために、一つ良く知られている補題を紹介する。

補題 1

$n \geq 1$ に対して、

$$ {}_nC_k + {}_nC_{k+1} = {}_{n+1}C_{k+1} \tag{5}$$

が成り立つ。ただし、$k < 0$ または $k > n$ では ${}_nC_k = 0$ とする。

証明

まず、${}_nC_k$ の定義は、$n \geq 1, 0 \leq k \leq n$ に対しては

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{6}$$

である。ただし $0! = 1$ とする。$1 \leq k \leq n$ に対しては、

$$ {}_nC_k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \tag{7}$$

とも表される。(6) より、${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$ であること、および ${}_nC_0 = {}_nC_n = 1$ となることは容易にわかる。

$k < -1,\, k \geq n+1$ に対しては、(5) の項はすべて 0 となるので成立する。

$k = -1,\, k = n$ のときは、(5) は両辺とも 1 となって成立する。

よってあとは $0 \leq k \leq n-1$ のときに示せばよい。このとき、

$$\begin{aligned} {}_nC_k + {}_nC_{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!\{(k+1)+(n-k)\}}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = {}_{n+1}C_{k+1} \end{aligned}$$

となるので、(5) が成り立つ。■

(3) に戻る。数学的帰納法で証明するが、数学的帰納法とは、命題 $P(n)$ がすべての自然数 n に対して成り立つことを示すための証明方法で、

- [1] $P(1)$ が成り立つことを示す。
- [2] $P(m)$ $(m \geq 1)$ が成り立つことを利用して、$P(m+1)$ が成り立つことを証明する

を示す、というものである。

この 2 つが示されれば、[1] と $m = 1$ の [2] から $P(2)$ が成り立つことになり、そして $P(2)$ と $m = 2$ の [2] から $P(3)$ が成り立ち、$P(3)$ と $m = 3$ の [2] から $P(4)$ が成り立つ、といった具合ですべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つことになる、という証明方法。

まずは [1] から。(3) は $n = 1$ のときは、

$$x + 1 = {}_1C_0 x + {}_1C_1$$

となるが、${}_1C_0 = {}_1C_1 = 1$ なので、これは確かに成立する。

次は、[2]。(3) が $n = m$ のときに成り立つとすると、

$$(x+1)^m = {}_mC_0 x^m + {}_mC_1 x^{m-1} + {}_mC_2 x^{m-2} + \cdots + {}_mC_{m-1} x + {}_mC_m \tag{8}$$

であり、この両辺に $(x+1)$ をかけると、

$$(x+1)^{m+1} = (1+x)({}_mC_0 x^m + {}_mC_1 x^{m-1} + {}_mC_2 x^{m-2} + \cdots + {}_mC_{m-1} x + {}_mC_m)$$

$$\begin{aligned} &= {}_mC_0x^m + {}_mC_1x^{m-1} + {}_mC_2x^{m-2} + \cdots + {}_mC_{m-1}x + {}_mC_m \\ &\quad + {}_mC_0x^{m+1} + {}_mC_1x^m + {}_mC_2x^{m-1} + \cdots + {}_mC_{m-1}x^2 + {}_mC_mx \\ &= {}_mC_0x^{m+1} + ({}_mC_0 + {}_mC_1)x^m + ({}_mC_1 + {}_mC_2)x^{m-1} + \cdots \\ &\quad + ({}_mC_{m-1} + {}_mC_m)x + {}_mC_m \end{aligned} \tag{9}$$

となるが、(9) の右辺の係数は、補題 1 より、

$$\begin{aligned} {}_mC_0 &= 1 = {}_{m+1}C_0, \\ {}_mC_0 + {}_mC_1 &= {}_{m+1}C_1, \\ {}_mC_1 + {}_mC_2 &= {}_{m+1}C_2, \\ &\cdots \\ {}_mC_{m-1} + {}_mC_m &= {}_{m+1}C_m, \\ {}_mC_m &= 1 = {}_{m+1}C_{m+1} \end{aligned}$$

となるので、結局 (9) は、

$$\begin{aligned} (x+1)^{m+1} &= {}_{m+1}C_0x^{m+1} + {}_{m+1}C_1x^m + {}_{m+1}C_2x^{m-1} + \cdots + {}_{m+1}C_{m+1} \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} {}_{m+1}C_kx^{m+1-k} \end{aligned}$$

となり、これは (3) の $n = m+1$ の式に等しいので、[2] が言えたことになる。

これで [1],[2] により、(3) がすべての自然数 n に対して成立することが証明された。

なお、(9) の展開では、シグマ記号から離れて展開を計算したが、シグマ記号のままで計算すると、

$$(x+1)^{m+1} = (1+x)\sum_{k=0}^{m} {}_mC_kx^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} {}_mC_kx^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} {}_mC_kx^{m-k+1}$$

となるが、右辺の前者では $k = j$, 後者では $k-1 = j$ と書き換えると、

$$\begin{aligned} (x+1)^{m+1} &= \sum_{j=0}^{m} {}_mC_jx^{m-j} + \sum_{j=-1}^{m-1} {}_mC_{j+1}x^{m-j} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} {}_mC_jx^{m-j} + {}_mC_m + {}_mC_0x^{m+1} + \sum_{j=0}^{m-1} {}_mC_{j+1}x^{m-j} \\ &= {}_mC_0x^{m+1} + \sum_{j=0}^{m-1} ({}_mC_j + {}_mC_{j+1})x^{m-j} + {}_mC_m \end{aligned}$$

となる。ここで、補題 1 により、

$$(x+1)^{m+1} = {}_{m+1}C_0x^{m+1} + \sum_{j=0}^{m-1} {}_{m+1}C_{j+1}x^{m-j} + {}_{m+1}C_{m+1}$$

となるが、$j+1=k$ と戻すと、

$$(x+1)^{m+1} = {}_{m+1}C_0 x^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} {}_{m+1}C_k x^{m+1-k} + {}_{m+1}C_{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} {}_{m+1}C_k x^{m+1-k}$$

となって (3) の $n=m+1$ の式が得られる。

なお、高校では現在、二項定理は数学 II (式と証明)、数学的帰納法は数学 B (数列) で取り扱われているため、二項定理の証明、説明は帰納法では行われてはおらず、展開と組み合わせの考え方で示すことが多い。

二項定理を展開と組み合わせで説明すると、

$$(x+1)^n = (x+1)(x+1)\cdots(x+1)$$

の展開で出てくる項は、この n 個の積のうち x か 1 かのいずれかを選んでかけたもので、その組み合わせの数だけの項が出てくることになる。よって、x^k $(0\leq k\leq n)$ の項は、n 個の積のうち k 個は x の方、$(n-k)$ 個は 1 の方を選んでかけたものなので、その総数は n 個から k 個を選びだす組み合わせの総数 ${}_nC_k$ に等しく、よって x^k の項は

$${}_nC_k x^k$$

となって (3) が成立することになる。

他にも、(3) は $(1+x)^n$ のマクローリン展開と見ることもできるので、微分を利用したマクローリン展開やテイラー展開による証明もありそうだが、そのためには $(x+1)^n$ や x^n の導関数が必要であり、しかし x^n の導関数の公式は通常は二項定理を用いて導かれるので、それでは証明にならない恐れがある (循環論法)。

また、$x\geq 0$ に限れば、確率を利用する証明もある。1 回引くと当たりの確率が p $(0\leq p\leq 1)$ であるくじを独立に n 回繰り返して引いたときに、そのうちの k 個 $(0\leq k\leq n)$ が当たる確率は

$${}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$$

となるので、それらのすべての合計は

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} = 1 \tag{10}$$

となる。これは $0\leq p\leq 1$ の p に対して常に成り立つので、$x\geq 0$ に対して、$p=1/(1+x)$ とすれば $0<p\leq 1$ で、$1-p=x/(1+x)$ より (10) は、

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{1+x}\right)^k \left(\frac{x}{1+x}\right)^{n-k} = 1$$

となるので、両辺を $(1+x)^n$ 倍すれば (3) が得られる ($x\geq 0$ の場合)。

4 因数分解公式

次は、因数分解公式 (4) の一般化を行う。

$f_n(x) = x^n - 1$ とすると、$f_n(1) = 0$ なので、因数定理より $f_n(x)$ は $x - 1$ で割り切れる。その商は、

$$\frac{f_n(x)}{x-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 \tag{11}$$

となる。なお、この式は、等比数列の和の公式としても知られている。よって、

$$f_n(x) = x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) \tag{12}$$

となり、これが (4) の $x^2 - 1$, $x^3 - 1$ の因数分解の一般化である。

さらに、$n = 3$ の場合は $g_n(x) = x^n + 1$ も因数分解できたが、これも一般化できる。n が奇数の場合は、

$$g_n(-1) = (-1)^n + 1 = -1 + 1 = 0$$

となるので、$g_n(x)$ は $x + 1$ で割り切れる。その商は、

$$\frac{g_n(x)}{x+1} = \frac{x^n + 1}{x + 1} = x^{n-1} - x^{n-2} + \cdots - x + 1 \tag{13}$$

となる。これも、初項 1、公比 $(-x)$ の等比数列の和の公式に等しい。よって、n が奇数の場合は、

$$g_n(x) = x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \cdots - x + 1) \tag{14}$$

となる。なお、n が偶数の場合は、$g_n(x) = x^n + 1$ はすべての実数 x に対して $g_n(x) > 0$ となるので、1 次の因数を持つことはない。

(12), (14) を a, b に戻すと、

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}), && (15) \\ a^n + b^n &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) && (16) \end{aligned}$$

となり (15) はすべての自然数 n に対して、(16) は奇数の n に対して成り立つことになる。

5 さらなる因数分解

(11), (13) の商は、係数を実数の範囲に広げればもう少し因数分解できる。本節ではそれを紹介する。

まず、$n=4$ の場合。この場合は、(11) は、

$$\frac{f_4(x)}{x-1} = x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$$

となるので、

$$f_4(x) = x^4-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1) \tag{17}$$

のように因数分解される。ついでに言えば、$g_4(x)=x^4+1$ は 1 次の因数は持たないが、実数の範囲で次のように 2 次式の積に因数分解される。

$$g_4(x) = x^4+1 = (x^2+1)^2-2x^2 = (x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1) \tag{18}$$

次は $n=5$ の場合。

$$\begin{aligned}\frac{f_5(x)}{x-1} &= x^4+x^3+x^2+x+1 = (x^2+1)^2-x^2+(x^3+x)\\ &= (x^2+1)^2+x(x^2+1)-x^2\end{aligned} \tag{19}$$

となるので、$p+q=1,\ pq=-1$ となる $p,\ q$ を取れば、

$$\begin{aligned}(x^2+1)^2+x(x^2+1)-x^2 &= (x^2+1)^2+(p+q)x(x^2+1)+pqx^2\\ &= (x^2+1+px)(x^2+1+qx)\end{aligned} \tag{20}$$

と因数分解される。この p,q は $t^2-t-1=0$ の 2 つの解

$$t = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

なので、結局 $f_5(x)$ は

$$f_5(x) = x^5-1 = (x-1)\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right) \tag{21}$$

と分解される。$g_5(x)=x^5+1$ は $g_5(x)=-f_5(-x)$ なので、

$$g_5(x) = x^5+1 = (x+1)\left(x^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right) \tag{22}$$

となる。

一般に $f_n(x)=x^n-1$ も $g_n(x)=x^n+1$ も、実数の範囲で 1 次式、または 2 次式の積の形に因数分解できることが知られていて、結果のみ示せば以下のようになる。n が偶数の場合、$n=2m$ とすると

$$f_{2m}(x) = x^{2m}-1 = (x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k}{m}\pi+1\right), \tag{23}$$

$$g_{2m}(x) = x^{2m}+1 = \prod_{k=1}^{m}\left(x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2m}\pi+1\right) \tag{24}$$

n が奇数の場合、$n = 2m + 1$ とすると

$$
\begin{aligned}
f_{2m+1}(x) &= x^{2m+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{m}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k}{2m+1}\pi + 1\right), \qquad (25)\\
g_{2m+1}(x) &= x^{2m+1} + 1 = (x+1)\prod_{k=1}^{m}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k-1}{2m+1}\pi + 1\right) \qquad (26)
\end{aligned}
$$

となる。さらに、$g_{2m+1}(x) = -f_{2m+1}(-x)$ であるから、$n = 5$ のときと同じように $g_{2m+1}(x)$ の因数分解は以下のようにも書ける。

$$
g_{2m+1}(x) = x^{2m+1} + 1 = (x+1)\prod_{k=1}^{m}\left(x^2 + 2x\cos\frac{2k}{2m+1}\pi + 1\right) \qquad (27)
$$

なお、これは、

$$
\cos\frac{2k-1}{2m+1}\pi = -\cos\left(\pi - \frac{2k-1}{2m+1}\pi\right) = -\cos\frac{2(m-k+1)}{2m+1}\pi
$$

より (27) から直接得ることもできる。