2020 年前期

ベクトルの資料の証明や余談等

1 定義 1.1 について

定義 1.1 は、幾何学的なベクトルの定義であるが、数学的にそれほど確定したものでないらしく、本によって色々違いがある。例えば、以下のものがある。

- **立場 1**: 有向線分そのものをベクトルとし、定義 1.1 の 3. はベクトルの定義には入れていないもの ([1], [2], [3] など)
- **立場 2**: 定義 1.1 の 1. と 2. をベクトルの定義とし、定義 1.1 の 3. は定義には入れていないもの ([4], [5], [6] など)
- **立場 3**: 本稿の立場、すなわち定義 1.1 の 3. もベクトルの定義に入れるもの ([7], [8] など)

なお、他にも線形代数などの本を見てみたが、幾何学的なベクトルから入らずに数ベクトルから入るものや ([9], [10])、「大きさと方向を持つもの」というあいまいなもので定義するもの ([14], [15], [16], [17])、高校や大学で習っていること (あるいはシリーズの前の本に書いてあること) を仮定してかベクトルの定義をそもそも書いてないもの ([11], [12], [13]) などもかなり見受けられた。

定義 1.1 の 3. をベクトルの定義に入れない場合、ベクトルの定義とは別に「ベクトルの相等」を定義することになる (通常ほぼ定義の次に書かれるが)。

しかし、定義 1.1 の 2. はやや定義としてはあいまいで、「位置を考えずに」とか「方向と大きさだけを考える」とはどういうことかが明確ではない。

むしろ、それを数学的に意味づけするのが定義 1.1 の 3. の「ベクトルの相等」であり、それによって 2. の内容が明確になる。つまりこの 3. は、ベクトルの定義とは不可分なもの、特に 2. とは分離できないものなのではないかと思う。

また、「有向線分」という言葉も、このベクトルの定義に少しだけ顔を出し、あとは一切出てこない本がほとんどであり、「有向線分」と「ベクトル」という言葉の立場はそれほど明確になっているわけではない。その辺を掘り下げて考えると、多分以下のような感じではないかと想像できる。

- 立場 1 の場合:
  「有向線分 = ベクトル」であるが、有向線分は単なる「向きのついた線分」であり、「ベクトル」にはその後相等、和、差などの演算を定義していく。つまり

「ベクトル」の実体は有向線分だが、それに計算が可能な構造を考えたものがベクトル。

よって、別な場所にある 2 つのベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ (等しい) というのは、あくまでベクトルとして等しいと定める、ということであり、別の場所にある有向線分 AB と有向線分 CD は、有向線分として等しいわけではない、といった感じ。

この場合、有向線分とベクトルの集合は同じだが、有向線分としての「相等」の概念とベクトルとしての「相等」の概念は異なることになる。

- 立場 2 の場合:
  「有向線分 = ベクトル」ではなく、有向線分の位置という概念を取り除いたものがベクトル。

  この場合、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は、見た目は「有向線分 AB」に一致するが、その方向と大きさを保ったまま場所を変えても同じベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を表す、ということになる。

  つまり、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ という記号は、「A から B への有向線分」を意味するのではなく、「A から B への有向線分」に等しい長さと向きを持ったベクトル、というものを意味することになり、ベクトルの見かけとしての有向線分は一つのベクトルに対してたくさんある、といった感じ。

  この場合、有向線分の集合自身がベクトルの集合とは異なることになる。

この立場 2 の説明から、定義 1.1 の 2. 自身にベクトルの相等の概念 3. が含まれていることがわかるだろう。つまり、立場 2 で 3. の部分 (ベクトルの相等) を別に定義するのは意味がなく、むしろ定義 1.1 のように 2. と 3. は同時に扱うべきものだろうと思う。

ちなみに、より数学的な定義としては、有向線分の集合に、平行移動で重なる有向線分同士の同値関係を定義し、その同値類を「ベクトル」とする方法がある。実はこれを少しわかりやすい言葉で説明したのが、本稿の定義 1.1 に相当する。

なお、物理や工学では、立場 2 や立場 3 でいう有向線分、すなわち位置を考えた有向線分を「束縛ベクトル」(あるいは「固定ベクトル」)、位置を考えないベクトルを「自由ベクトル」と呼んで、位置を無視しないものもベクトルとして使う場合がある (cf. [16], [18])。

例えば、物体を押す力をベクトルで表現する場合、どこを押すかによって力がその物体にどのように作用するかが変わってしまうので、力の場所を自由に移動することはできず、このようなベクトルを位置を固定した束縛ベクトルとしている。

これは、立場 2、立場 3 で呼ぶ「有向線分」と「ベクトル」を、それぞれ「束縛ベクトル」、「自由ベクトル」と言い変えたものと考えるといいだろう。

また、定義 1.1 の 3. は、

「A,B,C,D が同じ平面上にあり、四角形 ABDC が平行四辺形となるとき」

と言い変えることができそうだが、実はこれでは不十分であり、それは $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ でも、ABDC が四角形にならず、A,B,C,D が一直線上に並ぶ場合もあるからである。だから、このように変えようとすると、

> 「または、A,B,C,D が一直線上で、A から B, C から D が同じ向きで、AB=CD のとき」

という文言を追加しないといけなくなるが、それよりは 3. の方が易しいだろう。

2 定義 1.2 について

定義 1.2 はゼロベクトルの定義だが、それについては、簡単に

> 「大きさが 0 のベクトル (例えば $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$) をゼロベクトルという。これは向きは考えない」

くらいしか書いてない本が多い。高校の教科書もそのようである。

しかし、そもそもベクトルの定義 1.1 では、「線分」や「向きを考える」と言っているので、「ゼロベクトル」はその中に許容されていない (ベクトルにはまだ含まれていない)。よって、ゼロベクトルは、それをベクトルの仲間とするためにあらたに定義しなければいけないのではないかと思う。

そして、少なくとも本稿の立場では、ベクトルの相等も同時に定義する必要があるので、それで定義 1.2 は通常よりはやや長い定義となっている。

逆に、通常のゼロベクトルの説明では、ゼロベクトルに向きがないため、ゼロベクトル同士の相等がうまく定義されていることになっておらず、ゼロベクトルがすべて等しいことが確定しているのかが不明な気がする。定義 1.2 ならば、そのあたりも明確になっていると思う。

なお、本節や前節のわずらわしさを避けるために、ベクトルの定義を数ベクトルから入るのも悪くはないと思う。それなら定義のあいまいさはないし、ゼロベクトルも自然にベクトルの一つとなる。

3 p1 の例の変位ベクトル

ベクトルというと、その例に書いた速度ベクトルや力として使われることが多いが、元々ベクトル = vector (ベクター) という言葉は「運ぶ者」という意味で、すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は A から B への物の移動を意味していた。つまり、ベクトルという言葉はむしろ「変位ベクトル」から来ている、といってよい。

4 定理 2.2 の証明

1. $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とすると、ベクトルの和の定義より、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{a}$。

2. 少なくとも一方が $\boldsymbol{0}$ の場合は 1. で示されたので、どちらも $\boldsymbol{0}$ でないとしてよい。

   ベクトルの和の定義より、$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とするとき、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であり、$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とするとき、$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ なので、よって、$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のときに、$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ となることを示せばよい。

   $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ であるから、A,B,D,C は平行四辺形を作るか、または一直線上にある。その 2 つに場合分けして考えてみる。まず、四角形 ABDC が平行四辺形を作る場合、他の 2 辺も平行で長さが等しいので、よって $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ となる。

   次に、平行四辺形にならず一直線上にある場合を考える。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ なので、その点の並びは、

   (a) A,B,C,D の順になる場合
   (b) A,C,B,D の順になる場合
   (c) C,A,D,B の順になる場合
   (d) C,D,A,B の順になる場合
   (e) 4 点のうちいずれか 2 点が一致している場合 (A, B=C, D の場合、A=C, B=D の場合、C, D=A, B の場合)

   のいずれかになる。A=C, B=D の場合は、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ は共にゼロベクトルとなり、それ以外の場合は、いずれも $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ は同じ向きで長さが同じであることが容易に確認できる。よって、$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ となる。

3. $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}, \boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とすると、

   $$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}) + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

   一方、

   $$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + (\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

   となるので一致する。

4. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときは、$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{b}|, |\boldsymbol{a}| = 0$ より成り立つ (等号になる)。$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のときも同様なので、あとは $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ の場合を考えればよい。$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とすると、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ なので、$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| \leq |\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}|$、すなわち 3 点 A,B,C に対して

   $$\mathrm{AC} \leq \mathrm{AB} + \mathrm{BC}$$

   となることを示せばよい (A,C は一致する可能性もある)。

3 点 A,B,C が三角形を作る場合は、三角不等式より、$\mathrm{AC} < \mathrm{AB} + \mathrm{BC}$ となるので上は成り立つ。

3 点 A,B,C が三角形を作らない、すなわち一直線上にある場合は、以下のようになる。

- A, B, C の順に並ぶ場合は、$\mathrm{AC} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC}$ なので成立する。
- A, C, B の順に並ぶ場合は、$\mathrm{AC} = \mathrm{AB} - \mathrm{BC} < \mathrm{AB} + \mathrm{BC}$ なので成立する。
- B, A, C の順に並ぶ場合は、$\mathrm{AC} = \mathrm{BC} - \mathrm{AB} < \mathrm{BC} + \mathrm{AB}$ なので成立する。
- A=C で B が別であれば、$\mathrm{AC} = 0 < \mathrm{AB} + \mathrm{BC}$ なので成立する。

なお、この証明より、この不等式の等号が成り立つのは、3 点 A,B,C が三角形を作らず、$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が同じ向きの場合か、または少なくとも一方がゼロベクトルのときであることもわかる。

5 定義 2.3 の逆ベクトルについて

逆ベクトルは、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ の場合は、$-\boldsymbol{0} = -\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \overrightarrow{\mathrm{AA}} = \boldsymbol{0}$ となる。

6 定理 2.4 の証明

1. $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とすると、$-\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ より、

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{AA}} = \boldsymbol{0}$$

2. $$\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + (-\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

3. $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ ならば、定理 2.2、およびこの定理の 1. より、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})) = \boldsymbol{b} + ((-\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a}) \\ &= (\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{b})) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \end{aligned}$$

となり、逆に、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ ならば、定理 2.2、とこの定理の 1. より、

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}) + (-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{b})) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{c}$$

となる。

7 定理 2.6 の証明

1. $1\boldsymbol{a}$ は、長さも向きも変わらないので、$\boldsymbol{a}$ に等しい。$(-1)\boldsymbol{a}$ は、長さは変わらず、向きが逆なので、$-\boldsymbol{a}$ に等しい。

2. $k=0$、または $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ の場合は、両辺とも 0 になる。$k\neq 0$ かつ $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ の場合は、$k\boldsymbol{a}$ の長さは、$k>0$, $k<0$ いずれの場合も定義より $\boldsymbol{a}$ の長さを $|k|$ 倍したものなので、$|k\boldsymbol{a}|=|k|\cdot|\boldsymbol{a}|$ となる。

3. $k=0$、または $\ell=0$ の場合は、定理 2.2 の 1. より成立し、$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ の場合も、両辺が $\boldsymbol{0}$ となるので成立する。あとは、$k\neq 0$ かつ $\ell\neq 0$ かつ $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ の場合を考えればよい。$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $k\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\ell\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とすると、$k\boldsymbol{a}+\ell\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ となるので、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(k+\ell)\boldsymbol{a}$ となることを示せばよい。なお、ベクトルはすべて平行なので、A,B,C,D は一直線上にあり、$\mathrm{AC}=|k||\boldsymbol{a}|$, $\mathrm{CD}=|\ell||\boldsymbol{a}|$ となる。

   - $k>0$, $\ell>0$ の場合:
     $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は同じ向きなので、A, C, D の順に並び、$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とも同じ向きになる。よって $\mathrm{AD}=(k+\ell)|\boldsymbol{a}|$ より、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(k+\ell)\boldsymbol{a}$ となる。
   - $k<0$, $\ell<0$ の場合:
     $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は $\boldsymbol{a}$ の逆向きで A, C, D の順に並ぶ。よって、$\mathrm{AD}=(|k|+|\ell|)|\boldsymbol{a}|=(-k-\ell)|\boldsymbol{a}|$ より、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-(-k-\ell)\boldsymbol{a}=(k+\ell)\boldsymbol{a}$ となる。
   - $k<0<\ell$ の場合:
     $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は $\boldsymbol{a}$ の逆向き、$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ向きで、$|k|>|\ell|$ なら A, D, C の順に並び、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は $\boldsymbol{a}$ の逆向きで、長さは $\mathrm{AD}=(|k|-|\ell|)|\boldsymbol{a}|=(-k-\ell)|\boldsymbol{a}|$ となるから、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-(-k-\ell)\boldsymbol{a}=(k+\ell)\boldsymbol{a}$ となる。

     $|k|<|\ell|$ なら D, A, C の順に並び、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ向きになり、長さは $\mathrm{AD}=(|\ell|-|k|)|\boldsymbol{a}|=(k+\ell)|\boldsymbol{a}|$ となるから、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(k+\ell)\boldsymbol{a}$ となる。

     $|k|=|\ell|$ なら A=D なので $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{0}$ となる。この場合、$-k=\ell$ なので、$(k+\ell)\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ となり、よって $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(k+\ell)\boldsymbol{a}$ となる。
   - $k>0>\ell$ の場合:
     $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ向き、$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は $\boldsymbol{a}$ の逆向きで、$|k|>|\ell|$ なら A, D, C の順に並び、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ向きで、$\mathrm{AD}=(|k|-|\ell|)|\boldsymbol{a}|=(k+\ell)|\boldsymbol{a}|$ より、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(k+\ell)\boldsymbol{a}$ となる。

     $|k|<|\ell|$ なら D, A, C の順に並び、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は $\boldsymbol{a}$ の逆向きで、$\mathrm{AD}=(|\ell|-|k|)|\boldsymbol{a}|=(-\ell-k)|\boldsymbol{a}|$ より、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-(-k-\ell)\boldsymbol{a}=(k+\ell)\boldsymbol{a}$ となる。

     $|k|=|\ell|$ なら A=D なので $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{0}$、この場合、$k=-\ell$ なので、$(k+\ell)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ となり、よって $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(k+\ell)\boldsymbol{a}$ となる。

   これで、すべての場合で $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(k+\ell)\boldsymbol{a}$ となることが示された。

4. $k=0$、または $\ell=0$、または $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ ならば、両辺とも $\boldsymbol{0}$ となるので、等号は成立する。あとは、$k\neq 0$ かつ $\ell\neq 0$ かつ $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ の場合を考えればよい。

まず両辺のベクトルの長さを考えると、2. により、$|k(\ell\boldsymbol{a})| = |k||\ell\boldsymbol{a}| = |k||\ell||\boldsymbol{a}|$、$|(k\ell)\boldsymbol{a}| = |k\ell||\boldsymbol{a}| = |k||\ell||\boldsymbol{a}|$ となり、両者の長さは等しい。また、両辺とも $\boldsymbol{a}$ に平行なベクトルであるから、あとは両辺の向きが一致すればよい。

向きは、k, ℓ が同符号であれば、両辺とも $\boldsymbol{a}$ と同じ向きで、k, ℓ が異符号であれば、両辺とも $\boldsymbol{a}$ と逆向きになることが容易にわかる。よって、等号が成立する。

5. $k = 0$ ならば両辺ともゼロベクトルになるので等号は成立する。また、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ならば、両辺は $k\boldsymbol{b}$ となって一致し、$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ならば、両辺は $k\boldsymbol{a}$ となり等号は成立する。よって以後は、$k \neq 0$ かつ $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ として考える。

   まず、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行な場合は、

$$\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|} = m\ (> 0)$$

   とすると、$\boldsymbol{b}$ と $m\boldsymbol{a}$ は同じ長さで平行なベクトルなので、$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ が同じ向きなら $\ell = m$、逆向きなら $\ell = -m$ とすれば、$\boldsymbol{b} = \ell\boldsymbol{a}$ と表されることになる。このとき、この定理の 1., 3., 4. を使えば、

$$\begin{aligned} k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= k(\boldsymbol{a}+\ell\boldsymbol{a}) = k((1+\ell)\boldsymbol{a}) = (k(1+\ell))\boldsymbol{a} = (k+k\ell)\boldsymbol{a} \\ &= k\boldsymbol{a} + (k\ell)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + k(\ell\boldsymbol{a}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

   となって成立することがわかる。

   よって、あとは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行でない場合を考えればよい。$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$、$k\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $k\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{DE}}$ とする。なお、A,B,D は一直線上にあるが、A,C,E は一直線上にあるという保証はまだないことに注意する。

   - $k > 0$ の場合:
     この場合、B,D は A に関して同じ側にある。△ABC と △ADE を考える (図 1)。

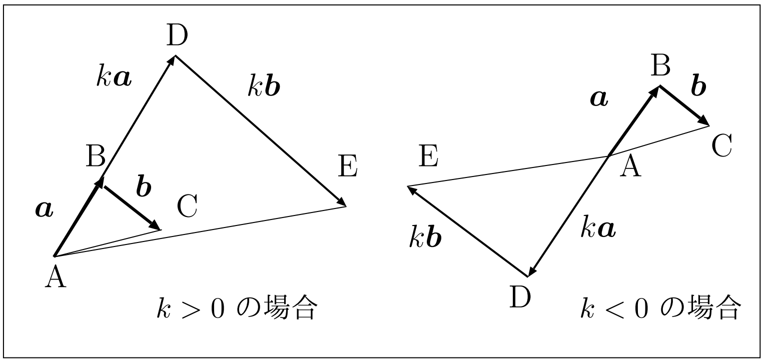

図 1: △ABC と △ADE

     $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \boldsymbol{b}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = k\boldsymbol{b}$ は平行なので、同位角により ∠ABC=∠ADE となる。また、AB : AD = 1 : k, BC : DE = 1 : k なので、△ABC と △ADE は相似

比が $1:k$ の相似な三角形になる。よって、∠BAC=∠DAE となり、A,C,E が一直線上にあり、かつ $\mathrm{AC}:\mathrm{AE}=1:k$ となることがわかる。

よって、$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となるので、

$$k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

となる。

- $k<0$ の場合:
  この場合、B,D は A に関して反対側側にある。$m=-k$ とすると、$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ は平行なので、錯角により ∠ABC=∠ADE となる。また、$\mathrm{AB}:\mathrm{AD}=1:m$, $\mathrm{BC}:\mathrm{DE}=1:m$ なので、△ABC と △ADE は相似比が $1:m$ の相似な三角形になる。よって、∠BAC=∠DAE となるので、C,A,E が一直線上にあり、かつ $\mathrm{CA}:\mathrm{AE}=1:m$ となることがわかる。

  よって、

  $$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=m\overrightarrow{\mathrm{CA}}=m(-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=m((-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}})=(-m)\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

  となるので、

  $$k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

  となる。

8 p6 のスカラー倍の応用について

- ひとつ目は、定理 2.6 の 5. の証明の中で示した。

- 2 つ目は、定理 2.6 より、

  $$\left|\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right|=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=1$$

  となるので、$1/|\boldsymbol{a}|>0$ より $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ方向の単位ベクトルとなる。

  $\boldsymbol{c}=\pm\boldsymbol{b}$ は、逆向きも含めて、$\boldsymbol{a}$ に平行な単位ベクトルとなる。

- 3 つ目は、$\boldsymbol{0}$ でない $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が平行でないとき、同じ平面上のベクトル $\boldsymbol{x}$ を $s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ の形に表せるかを考えてみる。

  まず、$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ならば $s=t=0$ として表すことができる。また、$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}$ に平行ならば、$t=0$ の形で表せるし、また、$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{b}$ に平行ならば、$s=0$ の形で表せる。よって、あとは、$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{0}$ ではなく、$\boldsymbol{a}$ にも $\boldsymbol{b}$ にも平行でない場合を考えればよい。

  $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ として、A を通って $\boldsymbol{a}$ に平行な直線 ℓ_1 と $\boldsymbol{b}$ に平行な直線 ℓ_2、および B を通って $\boldsymbol{a}$ に平行な直線 ℓ_3 と $\boldsymbol{b}$ に平行な直線 ℓ_4 の 4 本の直線を引くと、AB は ℓ_j に平行ではないので、この ℓ_j は平行四辺形を作る。すなわち、ℓ_1 と ℓ_4 の交点を C, ℓ_2 と ℓ_3 の交点を D とすれば、ACBD は平行四辺形となり、AB はそ

の対角線となる。AC は $\boldsymbol{a}$ に平行で、$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = s\boldsymbol{a}$ の形に書け、CB は $\boldsymbol{b}$ に平行で、$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = t\boldsymbol{b}$ の形に書けるから、よって $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ と書けることになる。

- 4 つ目は、$\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一つの平面上にないときに、任意の空間ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} + u\boldsymbol{c}$ の形に表せるかを考えてみる。

  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一つの平面上にないということは、どの 2 つを取っても平行にはならないことに注意する。それは、もし $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行ならば、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ が含まれる平面に $\boldsymbol{b}$ も含まれてしまい、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一つの平面に含まれてしまうからである。

  まず、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が含まれる平面を α とする。$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は平行ではないので、この平面は、平行なものを除いて一つに決まる。そして仮定により、$\boldsymbol{c}$ は α には含まれない。

  $\boldsymbol{x}$ が α に含まれるベクトルであれば、上の 3 つ目の性質により $u = 0$ の形で表されることになるから、あとは、$\boldsymbol{x}$ は $\mathbf{0}$ でなく、かつ α に含まれないベクトルの場合を考えればよい。α 上に $\boldsymbol{x}$ の始点を置いてそれを A とし、$\boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とすると、B は α 上にはない点となる。この B を通って、$\boldsymbol{c}$ に平行な直線 ℓ を引くと、$\boldsymbol{c}$ は α には平行ではないから必ず α と 1 点で交わる。それを C とする。

  $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は α 上のベクトルであるから 3 つ目の性質により、$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ の形に書ける。$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ は、$\boldsymbol{c}$ に平行なので、$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = u\boldsymbol{c}$ の形に書ける。よって、$\boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} + u\boldsymbol{c}$ と書けることになる。

9 p7 の注意

3 次元基本ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ と書く場合の、「$\boldsymbol{i}$」は、実は虚数単位の i に由来している。3 次元ベクトルは、歴史的には複素数を拡張した「4 元数」と呼ばれる数の便利な部分を取り出したものとして作られていて、それで四元数の虚数単位である i, j, k がその名残りとして現在でも 3 次元ベクトルに使われている (が、本稿では使用しない)。

10 定理 3.1 の証明

1. 図 7, 8 より明らか。

2. 平面ベクトルの方は、図 10 より明らか。空間ベクトルも同様 (下図 2)。

11 定理 3.2 の証明

(a) 平面ベクトルの場合、$a_1 = b_1$ かつ $a_2 = b_2$ ならば当然 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ となる。逆に、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ ならば、両者の始点を原点に合わせれば、終点は一致するので、

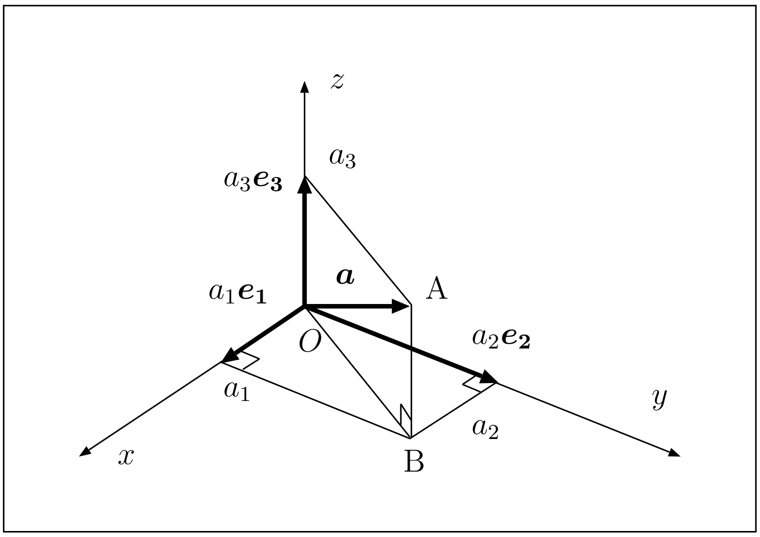

図 2: 基本ベクトル表現

(a_1, a_2) と (b_1, b_2) が一致し、よって $a_1 = b_1$ かつ $a_2 = b_2$ となる。空間ベクトルの場合も同様。

(b) 平面ベクトルの場合は、$|\boldsymbol{a}|$ は原点から (a_1, a_2) までの距離なので、$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ となる。

空間ベクトルも同様で、図 2 で言えば、$|\boldsymbol{a}| = \mathrm{OA}$ で、三平方の定理より、

$$\mathrm{OA} = \sqrt{\mathrm{OB}^2 + \mathrm{OC}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad \left(\mathrm{OB} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right)$$

となる。

(c) $a_1 = a_2 = 0$ ならば $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OO}} = \boldsymbol{0}$ となる。逆に、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ならば、$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OO}}$ なので、成分である終点の座標は O の座標となり、よって $a_1 = a_2 = 0$ となる。空間ベクトルの場合も同様。

(d) 和は、定理 3.1 の 3. より、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2}) + (b_1\boldsymbol{e_1} + b_2\boldsymbol{e_2}) = (a_1 + b_1)\boldsymbol{e_1} + (a_2 + b_2)\boldsymbol{e_2} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。差も、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2}) - (b_1\boldsymbol{e_1} + b_2\boldsymbol{e_2}) = (a_1 - b_1)\boldsymbol{e_1} + (a_2 - b_2)\boldsymbol{e_2} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。スカラー倍は、

$$k\boldsymbol{a} = k(a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2}) = ka_1\boldsymbol{e_1} + ka_2\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

となる。空間ベクトルも同様。

(e) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ であり、$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の成分はそれぞれ A, B の座標なので、

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

となる。または、$\overrightarrow{AB}$ は、右に $b_1 - a_1$、上に $b_2 - a_2$ 進んだベクトル、と考えてもよい。空間ベクトルの場合も同様。

12 定義 4.1 について

内積の定義 4.1 は、まずこちらを定義とする本は多い (例えば高校の教科書など) が、定理 4.2 の成分による式を定義とする方がむしろ積らしいし、内積の性質 (定理 4.3) を導きやすいという長所がある。

ただし、物理的な応用などに向けて、定義 4.1 の形も重要である。

13 定理 4.2 の証明

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ならば、両辺とも明らかに 0 となるので成立する。よって、あとは $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ として示せばよい。

- $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行な場合:
  $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ と書ける ($k \neq 0$)。$k > 0$ の場合は、同じ向きなので $\theta = 0°$ だから、

  $$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta = |\boldsymbol{a}|k|\boldsymbol{a}| \cos 0° = k|\boldsymbol{a}|^2 = k(a_1^2 + a_2^2)$$

  となる。一方、

  $$a_1b_1 + a_2b_2 = a_1(ka_1) + a_2(ka_2) = k(a_1^2 + a_2^2)$$

  となるので、両者は一致する。

  $k < 0$ の場合は、逆向きなので $\theta = 180°$ となり、

  $$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta = |\boldsymbol{a}||k||\boldsymbol{a}| \cos 180° = (-k)|\boldsymbol{a}|^2(-1) = k(a_1^2 + a_2^2)$$

  となる。右辺は $k < 0$ の場合も変わらないので、やはり一致する。ここまでは、空間ベクトルの場合もほぼ同様示される。

- $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行でない場合:
$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とすると、A,B,C は三角形を作る。$\angle$A が $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ なので、この $\triangle$ABC に余弦定理を用いると、

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \cos\theta$$

となるが、

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \cos\theta$$

なので、よって

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2)$$

となる。なお、ここまでの議論は平面ベクトルと空間ベクトルで違いはない。

平面ベクトルの場合、

$$\mathrm{AB}^2 = |\boldsymbol{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2, \quad \mathrm{AC}^2 = |\boldsymbol{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2,$$

で、$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ より、

$$\mathrm{BC}^2 = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|^2 = \left| \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \right|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

なので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2) \\ &= \frac{1}{2}\{-(-2b_1a_1 - 2b_2a_2)\} = a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

となる。空間ベクトルの場合も同様。

14 定理 4.3 の証明

1. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}$ のなす角は 0° なので、

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}| \cos 0^\circ = |\boldsymbol{a}|^2$$

2. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角と、$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ のなす角は同じ (θ) なので、

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}| \cos\theta = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$$

3. 定理 4.2 より、前者は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1+c_1 \\ b_2+c_2 \end{pmatrix} = a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2) \\ &= a_1b_1+a_2b_2+a_1c_1+a_2c_2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

 となる。空間ベクトルの場合も同様。

 後者は、2. を用いれば、

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

 となる。

4. 前者は、定理 4.2 より、

$$(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = ka_1b_1+ka_2b_2 = k(a_1b_1+a_2b_2) = k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

 空間ベクトルの場合も同様。後者は 2. より、

$$\boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b}) = (k\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = k(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) = k(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})$$

5. $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ のとき、$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ ならば $\theta=90^\circ$ だから、$\cos\theta=0$、よって $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

 逆に、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$ で $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ ならば、$|\boldsymbol{a}|\neq 0, |\boldsymbol{b}|\neq 0$ だから $\cos\theta=0$ となり、$0^\circ\leq\theta 180^\circ$ だから $\theta=90^\circ$ となる。よって $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$。

15 p10 の内積の応用について

- ひとつ目は、内積の定義と成分計算式から明らか。ただし、$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ のとき。

- 2 つ目の正射影であるが、$\boldsymbol{b}$ に対する $\boldsymbol{a}$ の正射影とは、$\boldsymbol{b}$ に平行な直線 ℓ の真上から $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に光を当てたときにできる影 CD の長さを指す。ただし、なす角が 90° より小さければ正 (CD)、90° より大きければ負 (-CD) とする (図 3)。

 $0^\circ\leq\theta<90^\circ$ ならば、正射影 CD は、

$$\mathrm{CD} = \mathrm{AB}\cos\theta = |\boldsymbol{a}|\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$$

 となり、$90^\circ\leq\theta<90^\circ$ ならば、$-\mathrm{CD}$ は、

$$-\mathrm{CD} = -\mathrm{AB}\cos(180^\circ-\theta) = |\boldsymbol{a}|\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$$

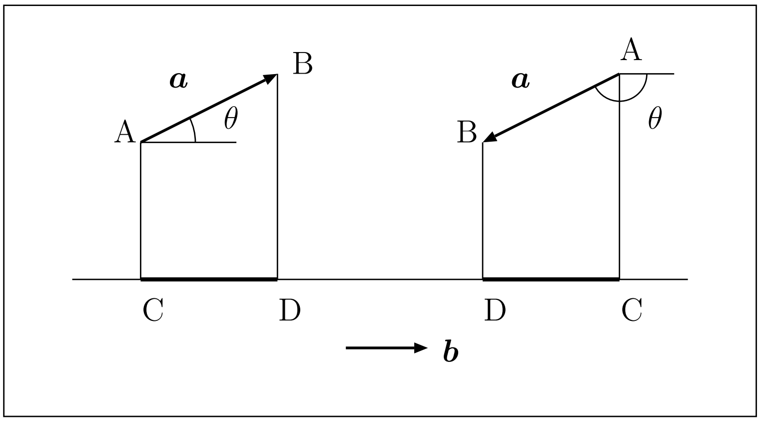

図 3: 正射影 (左は正、右は負)

となるので、どちらも同じ式で書ける。ちなみに、この図のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のことを $\vec{b}$ の**正射影ベクトル** と呼ぶことがある。正射影ベクトルは、正射影に、$\boldsymbol{b}$ 方向の単位ベクトル ($\boldsymbol{b}/|\boldsymbol{b}|$) をかけたものになるので、正射影ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}$$

となる。

- 3 つ目の内積の符号は、$0^\circ \leq \theta 180^\circ$ では、$\cos\theta$ の符号は $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ならば正、$\cos\theta$ の符号は $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ならば負で、それが内積の符号になる。

- 4 つ目の展開は、定理 4.3 の 1.,2.,3. により、

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}|^2 \end{aligned}$$

  のようになる。

- 5 つ目は、基本ベクトルは互いに垂直な単位ベクトルなので、定理 4.3 の 1.,5. より成り立つことがわかる。

- 6 つ目は、物体に仕事をした力の大きさと移動距離の積がの仕事量。

  図 4 のように力 $\boldsymbol{F}$ で物体を P から Q へ移動するとする。$\boldsymbol{F}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のなす角を θ とすると、P から Q への移動に仕事をした $\boldsymbol{F}$ の成分は、$|\boldsymbol{F}|\cos\theta$ ($\boldsymbol{F}$ の正射影) なので、仕事量 W は、

$$W = (|\boldsymbol{F}|\cos\theta)|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = |\boldsymbol{F}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos\theta = \boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

  となる。

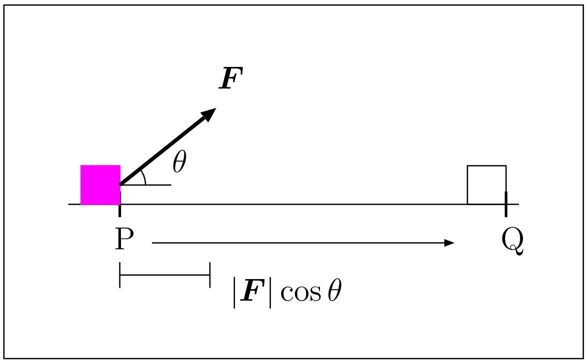

図 4: 仕事量

16 定理 5.1 の証明

1. これは、その前に説明している通り。
2. これは、1. の式からわかる。例えば、$a \neq 0$ ならば、$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直で、$(-d/a, 0, 0)$ を通る直線となる。

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + by + cz = ax + by + cz + d = 0$$

3. x 方向の傾きが a, y 方向の傾きが b で、(x_0, y_0, z_0) を通る平面を α とする。α と xz 平面の交線は、xz 平面上の傾き a の直線となるので、α には、ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ が含まれる (図 5)。また、α と yz 平面の交線は、yz 平面上の傾き

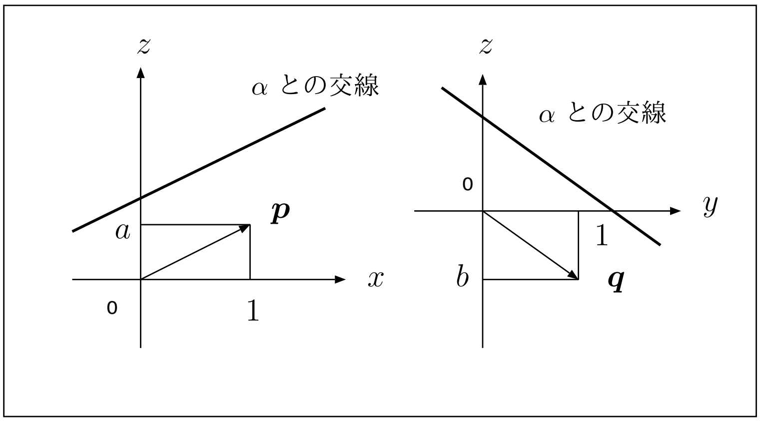

図 5: 交線と $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$

b の直線となるので、α には、ベクトル $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ も含まれる (図 5)。

$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p} = a + 0 - a = 0, \quad \boldsymbol{n}\cdot|Vecbq = 0 + b - b = 0$$

より $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{q}$ だから、$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ は平行でないので $\boldsymbol{n}$ は α に垂直となる。よって、α の方程式は 1. より、$a(x-x_0)+b(y-y_0)-(z-z_0)=0$ となり、よって $z = a(x-x_0)+b(y-y_0)+z_0$ となる。

ちなみに、これは丁度 2 次元の直線の $y = m(x-x_0)+y_0$ の 3 次元版になっている。

4. これは 3. よりわかる。すなわち、$z = ax+by+c$ は、x 方向の傾きが a, y 方向の傾きが b で、$(0,0,c)$ を通る (z 切片が c) の平面の方程式となる ($y = ax+b$ の 3 次元版)。

5. この平面を α とし、この平面に垂直で B を通る直線 ℓ (B から α への垂線) と α との交点を C とすると、$L = \mathrm{BC}$ となる。

α の法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $(\neq \boldsymbol{0})$ に対し、BC は $\boldsymbol{n}$ に平行なので、$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = k\boldsymbol{n}$ と書ける。

C の座標を (x_0, y_0, z_0) とすると、C は α 上にあるので、$ax_0+by_0+cz_0+d=0$ を満たすが、これは、前半部分を内積の形にして $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+d=0$ と書くこともできる。

$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = k\boldsymbol{n}$ より、

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + k\boldsymbol{n}$$

なので、これを代入すると、

$$0 = \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + d = \boldsymbol{n}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + k\boldsymbol{n}) + d = \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + k|\boldsymbol{n}|^2 + d$$

となるので、ここから k は

$$k = -\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + d}{|\boldsymbol{n}|^2}$$

と表されることになる。よって、$L = \mathrm{BC}$ より、

$$\begin{aligned} L &= |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = |k\boldsymbol{n}| = |k||\boldsymbol{n}| = \left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + d}{|\boldsymbol{n}|^2}\right||\boldsymbol{n}| = \frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + d|}{|\boldsymbol{n}|} \\ &= \frac{|ap+bq+cr+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}$$

となる。

17　定義 6.1 について

外積の定義 6.1 は、内積同様、成分の式である定理 6.3 を用いれば楽であり、そこから外積の性質である定理 6.4 を示すことも簡単にできる。

しかし、逆に定理 6.3 を定義とすると、そこから定義 6.1 を導きだすのはそれほど易しくはない (特に (c))。また、外積の図形的な意味 (a),(b),(c) は、物理や工学では重要なので、それを定義として提示することも意味がある。それで多くの本でこちらを定義として採用している。

なお、$\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ で、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行でない場合は、その両方に垂直な直線の方向は一つに決定するが、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行であると、両方に垂直な直線の方向は無数にあり一つには決定しない。その場合に丁度外積が $\mathbf{0}$ になっていることにも注意せよ。

18　p14 の上の注意について

平面ベクトルでは通常は外積は考えないが、平面ベクトルでも「外積らしきもの」はある。

例えば、$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対して、$x = a_1b_2 - a_2b_1$ は、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積 (符号付き面積) となり、これを「外積らしきもの」と考えることがあるが、これは 3 次元のベクトルの外積とは違い、スカラー値になる。

よって通常「外積」という言葉は、3 次元ベクトルにのみ使用する。

19　定理 6.2 の証明

異なる基本ベクトル同士の場合、それらが作る平行四辺形は、1 辺が 1 の正方形なので、面積は 1 となる。よって、$\boldsymbol{e_i} \times \boldsymbol{e_j}$ は、大きさが 1 の単位ベクトルとなる。

$\boldsymbol{e_1} \times \boldsymbol{e_2}$、$\boldsymbol{e_2} \times \boldsymbol{e_1}$ は、x 軸、y 軸に垂直であることになり、その大きさが 1 だから、それらは $\boldsymbol{e_3}$ か $-\boldsymbol{e_3}$ のいずれかとなる。

$\boldsymbol{e_1}$ から $\boldsymbol{e_2}$ に右ねじを回して進む向きは z 軸方向なので、よって $\boldsymbol{e_1} \times \boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{e_3}$ となり、$\boldsymbol{e_2}$ から $\boldsymbol{e_1}$ に右ねじを回して進む向きはその逆方向なので、$\boldsymbol{e_2} \times \boldsymbol{e_1} = -\boldsymbol{e_3}$ となる。

その他もほぼ同様。

20 定理 6.3 の証明

定理 6.3 と 6.4 は、定理 6.3 が先に示されれば、そこから定理 6.4 を示すことは難しくないし、逆に定理 6.4 が示されれば、それと 定理 6.2 を組み合わせて定理 6.3 を示すことは難しくない。

だから、定理 6.3 と 6.4 は、どちらを先に証明してもよいが、定理 6.3 を先に示そうとすると、定義 6.1 を満たすベクトルを調べて最終的にその成分が定理 6.3 となる、という道筋はかなり難しく、むしろ定理 6.3 のベクトルが定義 6.1 の性質を満たしていて、しかもそのようなベクトルはひとつしかないから、定理 6.3 のベクトルが外積である、という形で示すのが楽である。ただし、定理 6.3 のベクトルは、定義 6.1 の (a),(b) を満たすことは簡単に示せるのだが、問題は (c) で、それを示すことが難しい。

よって、本稿では定理番号とは逆になるが、定理 6.4 の方を定義 6.1 から示すことにして、定理 6.3 は、定理 6.4 を用いて示すことにする。

本節では、その定理 6.4 を用いた定理 6.3 の証明を紹介する。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_1\boldsymbol{e_1}+a_2\boldsymbol{e_2}+a_3\boldsymbol{e_3})\times(b_1\boldsymbol{e_1}+b_2\boldsymbol{e_2}+b_3\boldsymbol{e_3})$$

となるが、ここに定理 6.4 の 3., 4. を用いると、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= a_1b_1\boldsymbol{e_1}\times\boldsymbol{e_1}+a_1b_2\boldsymbol{e_1}\times\boldsymbol{e_2}+a_1b_3\boldsymbol{e_1}\times\boldsymbol{e_3}\\ &\quad +a_2b_1\boldsymbol{e_2}\times\boldsymbol{e_1}+a_2b_2\boldsymbol{e_2}\times\boldsymbol{e_2}+a_2b_3\boldsymbol{e_2}\times\boldsymbol{e_3}\\ &\quad +a_3b_1\boldsymbol{e_3}\times\boldsymbol{e_1}+a_3b_2\boldsymbol{e_3}\times\boldsymbol{e_2}+a_3b_3\boldsymbol{e_3}\times\boldsymbol{e_3}\end{aligned}$$

と展開できることがわかる。ここに、定理 6.4 の 1., 2. を用いると、

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e_1}\times\boldsymbol{e_2}+(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e_2}\times\boldsymbol{e_3}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e_3}\times\boldsymbol{e_1}$$

となるが、定理 6.2 より、

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e_3}+(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e_1}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

となる。

21 定理 6.4 の証明

定理 6.3 の証明に定理 6.4 を使ったので、当然定理 6.4 の証明には定理 6.3 を用いることはできない。

定理 6.4 の証明は、3. が一番厄介で、あとはそれほどでもない。よって、3. 以外のものを先に証明する。

1. これは定義 6.1 の 3. より明らか。

2. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ か $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ か $\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$ の場合は、どちらも $\boldsymbol{0}$ となり成立するので、定義 6.1 の 2. の場合を考える。

   この場合は (a), (b) までは $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ も $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ も同じで、(c) が丁度逆になるので、よって向きが逆で $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ となる。

4. まずは前者を示す。

   定義 6.1 の 3. の場合、$k\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ もその状態になるので、両辺とも $\boldsymbol{0}$ となり一致する。また、$k = 0$ の場合も左辺はこの状態になり、右辺は $\boldsymbol{0}$ となるから一致する。あとは、定義 6.1 の 2. の場合で $k \neq 0$ の場合を考えればよい。

   $k > 0$ の場合、$k\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ向きで長さが k 倍なので、$k\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積は、その一辺が k 倍されているので、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積の k 倍となる。

   $k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に垂直な方向は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に垂直な方向と同じで、(c) の向きも変わらない。よって、$(k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ となる。

   $k < 0$ の場合は、$-k = m$ とすると、$k\boldsymbol{a} = -m\boldsymbol{a}$ は、$m\boldsymbol{a}$ の逆向きで、$-m\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形は、$m\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形と同じなので面積は一致する。

   $-m\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に垂直な直線の方向は、$m\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に垂直な方向に等しく、(c) の向きは丁度逆になる。よって、$(-m\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = -(m\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b}$ となり、よって $k > 0$ の証明により、

   $$(k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = (-m\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = -(m\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = -m(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

   となることがわかる。これで k の正負によらずに前者が示された。

   後者は、2. と前者を用いれば、

   $$\boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b}) = -((k\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a}) = -(k(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})) = -k(-(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})) = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

   となって得られる。

5. $\Rightarrow$ の方は定義 6.1 の 3. そのもの。

   $\Leftarrow$ の方は、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ で、かつ定義 6.1 の 3. の状態でない (2. の状態) とすると、(a) により、$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta = 0$ となるので、$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ より、$\sin\theta = 0$ となる。$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ だから、$\theta = 0^\circ$ か $\theta = 180^\circ$ のいずれかとなる。よって、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は全く同じ向きか、全く逆向きのいずれかとなるが、それは結局 $\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$ を意味するので、定義 6.1 の 3. の状態でないとしたことに矛盾する。

   よって、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ならば定義 6.1 の 3. の状態となる。

次は 3. を示すが、3 の前者が示されれば、後者はそれを用いて示されることを先に見ておく。もし前者が示されていれば、2. により、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} &= -(\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}) = -(-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\\ &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

となって後者が成立することになる。よってあとは 3. の前者を示せばよい。

また、$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ の場合は、両辺が $\boldsymbol{0}$ になって成立するから、$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ の場合を考えればよい。

以後、$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ を仮定して 3. の前者を考えることにするが、そのための補助定理を 3 つ紹介する。

補題 21.1

$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ に対し、任意の空間ベクトル $\boldsymbol{x}$ は、

$$\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{x}',\quad \bar{\boldsymbol{x}}\,/\!/\,\boldsymbol{a} \text{ または } \bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{x}'\perp\boldsymbol{a} \text{ または } \boldsymbol{x}'=\boldsymbol{0}$$

の形に常に、そして一意的に分解できる。

なお、「補題」とは「補助定理」のような意味。

分解できることは、具体的にその形を示せばよいが、実は $\bar{\boldsymbol{x}}$ の方は、$\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルとなる。

$$\bar{\boldsymbol{x}}=\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}$$

こうすると、当然 $\bar{\boldsymbol{x}}$ は、$\boldsymbol{a}$ のスカラー倍なので、$\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$ か ($\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=0$ のとき)、そうでなければ $\bar{\boldsymbol{x}}\,/\!/\,\boldsymbol{a}$ となる。

一方、$\boldsymbol{x}'$ の方は、

$$\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}-\bar{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}-\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=0$$

となるので、$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{0}$ か ($\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}$ のとき)、そうでなければ $\boldsymbol{x}'\perp\boldsymbol{a}$ となる。

次は一意性の方であるが、もし補題 21.1 を満たす $\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}'$ の組が 2 つあったとして、それを $\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}, \boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{1}}$ と $\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}}, \boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{2}}$ とすると、$\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}=\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}}$ かつ $\boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{1}}=\boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{2}}$ となることを示せばよい。なお、この場合は、

$$\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}+\boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{1}}=\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{2}}$$

なので、$\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}=\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}}$ であれば、$\boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{1}}=\boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{2}}$ はそこから導かれるので、$\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}=\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}}$ の方だけ示せばよい。

$\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}}$ $(j=1,2)$ は $\boldsymbol{a}$ に平行、または $\boldsymbol{0}$ なので、$\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}}=k_j\boldsymbol{a}$ となるスカラー k_j が取れる $(j=1,2)$。これに対し、

$$\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}+\boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{1}}=\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{2}}$$

より

$$\boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{1}}-\boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{2}}=\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}}-\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}=(k_2-k_1)\boldsymbol{a}$$

となり、$\boldsymbol{x}'_j$ は $\boldsymbol{a}$ に垂直、または $\mathbf{0}$ なので $\boldsymbol{a}$ との内積は 0 になるから、

$$0 = \boldsymbol{x}'_{\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}'_{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{x}'_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{x}'_{\mathbf{2}}) \cdot \boldsymbol{a} = (k_2 - k_1)\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = (k_2 - k_1)|\boldsymbol{a}|^2$$

となるが、$\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ なので $k_2 - k_1 = 0$ となる。よって、

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}} = k_1\boldsymbol{a} = k_2\boldsymbol{a} = \bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{2}}$$

となり、分解の一意性が証明できたことになる。

なお、$\bar{\boldsymbol{x}}$ は、$\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルだったので、$\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ 方向成分、$\boldsymbol{x}'$ は、$\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ の垂直成分、と見ることができる。そしてこれらを $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ の含まれる平面で見ると、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ は、$\boldsymbol{a}$ に関して同じ側を向くことに注意せよ (図 6)。また、$\bar{\boldsymbol{x}}$ は、$\boldsymbol{a}$ に平行な

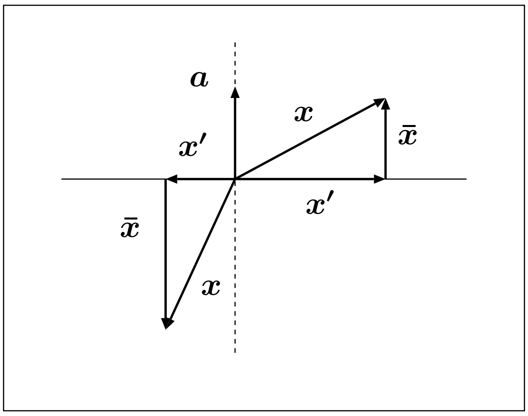

図 6: 正射影ベクトルの位置関係

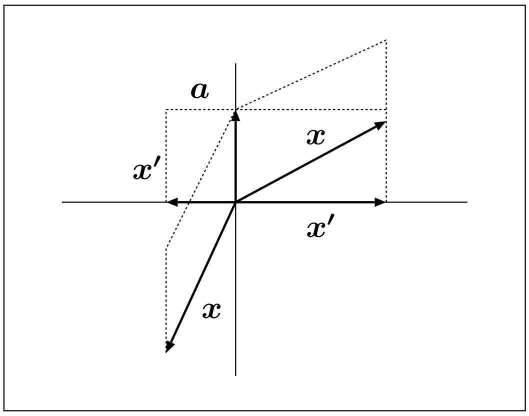

図 7: 平行四辺形

ので、$\bar{\boldsymbol{x}}$ は、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}$ の乗る平面上にあり、$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}$ も同じ平面上に乗ることなる。

補題 21.2

補題 21.1 の $\vec{a}, \vec{x}, \vec{x'}$ に対して、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}'$ となる。

まず、$\boldsymbol{x}$ が $\mathbf{0}$ であれば、補題 21.1 より $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}' = \mathbf{0}$ となるので、補題 21.2 は成立する。

また、$\boldsymbol{x} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{a}$ であれば、$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}' = \mathbf{0}$ となる (分解の一意性より明らか) ので、やはり補題 21.2 の両辺は $\mathbf{0}$ となり成立する。

あとは、$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ で $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}$ と平行でない場合 ($\boldsymbol{x}' \neq \mathbf{0}$) を考えればよい。

この場合、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}$ が作る平行四辺形は、底辺が $|\boldsymbol{a}|$、高さが $|\boldsymbol{x}'|$ となるので、その面積は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}'$ が作る長方形の面積に等しい (図 7)。

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ は同じ平面上にあるので、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}$ に垂直なベクトルは、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}'$ にも垂直となる。

また、$\boldsymbol{a}$ から見て $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ は同じ側を向いているので、$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{x}$ に右ねじを回して進む向きは、$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{x}'$ に右ねじを回して進む向きに等しい。

よって、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}'$ となり、補題 21.2 が示されたことになる。

補題 21.3

補題 21.1 の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ に対して、$\boldsymbol{a}$ に垂直な平面 α を、$\boldsymbol{a}$ の終点の方向から見ると ($\boldsymbol{a}$ の逆)、$\boldsymbol{x}'$ はこの α 上にあるが、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}'$ もこの α 上にあり、$\boldsymbol{x}'\neq\boldsymbol{0}$ ならば$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}'$ は $\boldsymbol{x}'$ を反時計回りに 90° 回転して $|\boldsymbol{a}|$ 倍したベクトルになる (図 8)。

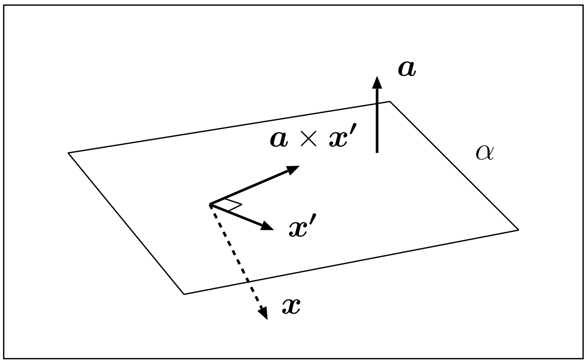

図 8: $\boldsymbol{x}'$ と $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}'$

これは、図 8 より方向などは明らかで、大きさも、$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{x}'$ より、$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}'| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{x}'|$ となるので、明らかに成り立つ。

さて、定理 6.4 の 3. の前者の証明に話を戻す。

$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に 補題 21.1 の分解をほどこして、その α 方向成分 $\boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ を考えると、これは α に乗り、補題 21.3 により $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}', \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}'$ は、$\boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ を $|\boldsymbol{a}|$ 倍して 90° 回転したものになっている。$\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{c}'$ も同じ平面 α に乗るベクトルであり、$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{c}')$ は、$\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{c}'$ を $|\boldsymbol{a}|$ 倍して同じ方向に回転したベクトルなので、ベクトルの和の位置関係や大きさの関係は保持したまま拡大、回転されることになる。このことから、

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{c}') = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}' + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}'$$

となることがわかる。

よって、もし $\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{c}' = (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})'$ であることが言えれば、補題 21.2 より、

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times((\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})') = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{c}') = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$$

となって、3. の前者が示されることになる。ということで、あとは $\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{c}'=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})'$ を示せばよい。しかしこれは、

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{b}=\bar{\boldsymbol{b}}+\boldsymbol{b}',\quad \bar{\boldsymbol{b}}\,/\!/\,\boldsymbol{a}\ (\text{または } \bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{0}),\quad \boldsymbol{b}'\perp\boldsymbol{a}\ (\text{または } \boldsymbol{b}'=\boldsymbol{0}),\\
&\boldsymbol{c}=\bar{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{c}',\quad \bar{\boldsymbol{c}}\,/\!/\,\boldsymbol{a}\ (\text{または } \bar{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{0}),\quad \boldsymbol{c}'\perp\boldsymbol{a}\ (\text{または } \boldsymbol{c}'=\boldsymbol{0})
\end{aligned}$$

なので、$\bar{\boldsymbol{b}}+\bar{\boldsymbol{c}}$ は $\boldsymbol{a}$ と平行かまたは $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{c}'$ は $\boldsymbol{a}$ と垂直かまたは $\boldsymbol{0}$、となるので、分解の一意性により、$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ の α 方向成分 $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})'$ は $\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{c}'$ となる。

これで 3. の証明が終わったことになる。

22 p15 の注意について

結合法則の話で書いている $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は、**ベクトル三重積** と呼ばれることがある。そして、これは

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

のように、外積を全く使わない形に書けることが知られている (成分計算で証明できるが、かなり煩雑である)。

そしてこれを用いると、もう一つの方は、

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-\{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}\}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

と書けるので、$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ とは後半部分が違っていて、一般には一致しないこともわかる。

23 p15 の外積の応用について

- ひとつ目は、定理 6.4 を使って展開するとそうなる (追加説明は不要だろう)。
- 2 つ目も外積の定義 6.1 の 2. (a) そのままで、3 つ目もその式を半分にしただけなのだが、これにより空間上の平行四辺形や三角形の面積は、その座標さえわかれば、外積を利用して比較的簡単に計算できることになる。

  もし外積を用いずにその計算をしようとすると、辺の長さとその間の角のコサインの値を内積から計算し、そこからサインの値を求めて、という順で計算することになり、相当大変である。

- 4 つ目は平行六面体の体積で、スカラー三重積、または単に三重積と呼ばれ、ベクトル解析の本などでは、$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ などと書かれることがある。 これを簡単に説明してみる。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積 $= S$ とすると (図 9)、$S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ となる。$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は S に垂直で、この方向への $\boldsymbol{c}$ の正射影は、

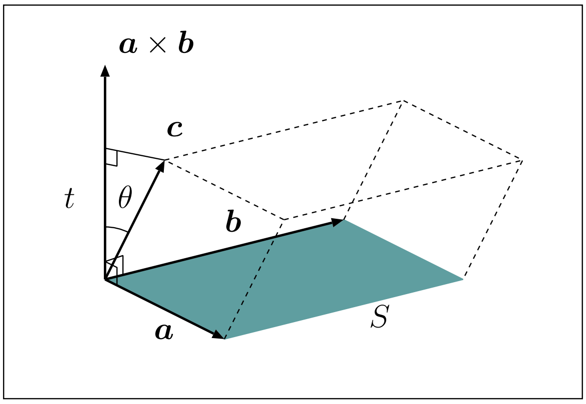

図 9: 平行六面体

$$t = |\boldsymbol{c}|\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}$$

となる。よって、平行六面体の体積 V は、

$$V = St = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|\frac{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

となる。なお、図 9 のように、$\theta < 90^\circ$ の場合は正射影が正となるが、$\boldsymbol{c}$ が S に関して $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と反対側にある場合は、$\theta > 90^\circ$ となるので、正射影 t は負になる。よって、その場合は、

$$V = S(-t) = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

となるから、逆に、$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \pm V$ と書くことができる。

この三重積の値が正になるのは、この図 9 のように $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が右手系の場合で、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が左手系の場合は負になる。

また、この図形は、$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$ の三重積、$\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の三重積、と言い換えても全く同じものになるし、右手系、左手系の関係も変わらないので、

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$$

が成り立つこともわかる (成分計算でも証明できるがかなり大変)。

- 5 つ目は、よく知られた物理法則であり、高校の物理の教科書などにも登場するが、高校の教科書では、$\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{n}$ (電流の方向) と $\boldsymbol{B}$ に垂直で、$\boldsymbol{n}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{F}$ が右手系になり、$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角を θ とすると、

$$|\boldsymbol{F}| = \ell I |\boldsymbol{B}| \sin\theta$$

  となる、という形で書かれている。これを外積の形に書くと丁度 $\boldsymbol{F} = ((I\boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{B})\ell$ となる。他にも、ローレンツ力やビオ・サバールの公式、角速度ベクトル、モーメントなど、物理量で外積で表現できるもは色々ある。

参考文献

[1] 内田伏一、高木斉、剣持勝衛、浦川肇、「線形代数入門」(裳華房)、1994.

[2] クライツィグ (堀素夫訳)、「技術者のための高等数学 2 線形代数とベクトル解析 (原著第 5 版)」(培風館)、1995.

[3] 石原茂、浅野重初、「理工系の基礎 線形代数」(裳華房)、2006.

[4] 中野友裕、「大学新入生のためのリメディアル数学 第 2 版」(森北出版)、2017.

[5] 橋口秀子、星野慶介、山田宏文、「数学入門」(学術図書出版社)、2017.

[6] 俣野博、河野俊丈編、「数学 B (高等学校教科書)」(東京書籍)、2014.

[7] 石村園子、「大学新入生のための数学入門 増補版」(共立出版)、2005.

[8] 井川信子編著、「大学生のための基礎から学ぶ教養数学」(サイエンス社)、2016.

[9] 溝畑潔、多久和英樹、浦部治一郎、渡部拓也、「線形代数学」(学術図書出版社)、2019.

[10] 塚本達也、「段階的に学ぶ線形代数」(学術図書出版社)、2020.

[11] 桑村雅隆、「リメディアル線形代数」(裳華房)、2009.

[12] 橋口秀子、星野慶介、山田宏文、「線形代数入門」(学術図書出版社)、2015.

[13] 佐藤正次、永井治、「基礎課程 線形代数学 新版」(学術図書出版社)、1979.

[14] 北原直人、中上川友樹、西宮信夫、松田秀樹、水町龍一、「これだけはおさえたい理工系の基礎数学」(実教出版)、2009.

[15] 末益博志、金原勲、鈴木浩治、「工業力学」(実教出版)、2006.

[16] 大塚勝編著、片山亮輔、新地勝美著、「新基礎数学 改訂版」(ムイスリ出版)、2014.

[17] 奈佐原顕郎、「ライブ講義 大学 1 年生のための数学入門」(講談社)、2019.

[18] 石原繁、「ベクトル解析」(裳華房)、2002.