2020 年前期

ベクトル (基礎数理 I(a) 講義資料)

1 ベクトルの定義

定義 1.1

1. **有向線分**: 平面 (あるいは空間) の 2 点 A,B を結んだ線分 AB に、A から B への「向きをつけた」線分 (図 1)。A を **始点**, B を **終点** と呼ぶ。

2. **ベクトル**: 有向線分 AB の、位置を考えずに、方向と大きさだけを考えたもの。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のように書く。

3. **ベクトルの相等**: 方向と大きさが同じベクトルは位置が違っても等しいと考える。すなわち、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が同じ長さで、平行で、かつ同じ向きのとき、そしてそのときに限り $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ となる (図 2)。

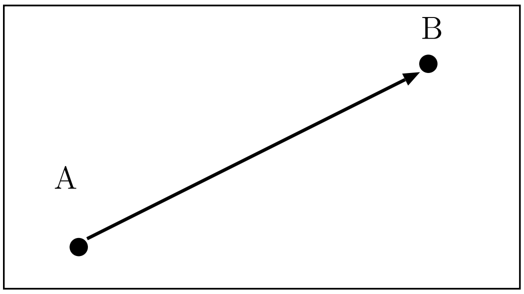


図 1: 有向線分 AB

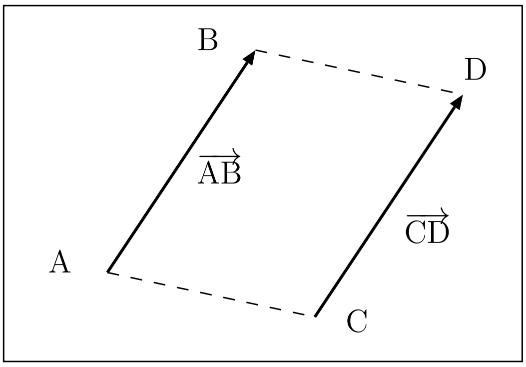


図 2: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$

☆注意

- ◦ ベクトルは位置は考えないので、始点、終点を使わず 1 文字の名前で表して $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ (上に矢印), あるいは、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ (太字で矢印なし) のようにも書く。
- ◦ ベクトルの矢印は、必ず右向きに $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のように書き、$\overleftarrow{\mathrm{BA}}$, $\overleftarrow{a}$ とは書かない。

例:

- ⋄ **変位ベクトル**: $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で、点 A から点 B への物の移動を表す。
- ⋄ **速度ベクトル**: 大きさが速さを意味し、方向が運動の向きを表す。
- ⋄ **力**: 大きさが力の大きさ、方向が力の方向。

問 1 中心 O の正六角形 ABCDEF に対して、次のベクトルに等しいベクトル (O,A,B,C,D,E,F のいずれか 2 点からなるベクトル) をすべて上げよ。
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

□用語、記号等

- **位置ベクトル**: 原点 O に対し、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を点 P の**位置ベクトル** と呼ぶ。
- **スカラー**: ベクトルに対し、方向を持たない量、つまり通常の実数。
- **平面ベクトル**: 2 次元座標系 (xy) 内でのベクトル (2 次元ベクトル)
- **空間ベクトル**: 3 次元座標系 (xyz) 内でのベクトル (3 次元ベクトル)
- **大きさ**: $|\boldsymbol{a}|$ = ベクトルの大きさ (長さ)。
- **単位ベクトル**: 大きさが 1 のベクトル

例:

◇ 力、速度、加速度はベクトル、温度、時刻、長さ、面積はスカラー。

◇ $\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \mathbf{0}$

☆注意

○ ベクトルとスカラーが等しくなることはない。

定義 1.2

任意の点 A に対し、$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ も長さが 0 のベクトルと考え、かつすべて同じものとみなし、これを **ゼロベクトル** と呼び、$\vec{0}$ や $\mathbf{0}$ (太字) で表す。なお、$\mathbf{0}$ の向きは考えない (ない)。

例: $\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \overrightarrow{\mathrm{BB}} = \mathbf{0}, \quad |\mathbf{0}| = 0$

問 2 中心 O、一辺の長さが 2 の正六角形 ABCDEF に対して、次の値を求めよ。 (1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ (2) $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$ (3) $|\overrightarrow{\mathrm{CF}}|$

2 ベクトルの和、差、スカラー倍

定義 2.1 (ベクトルの和)

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とするとき ($\boldsymbol{a}$ の終点と $\boldsymbol{b}$ の始点を合わせる)、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とする (図 3)。

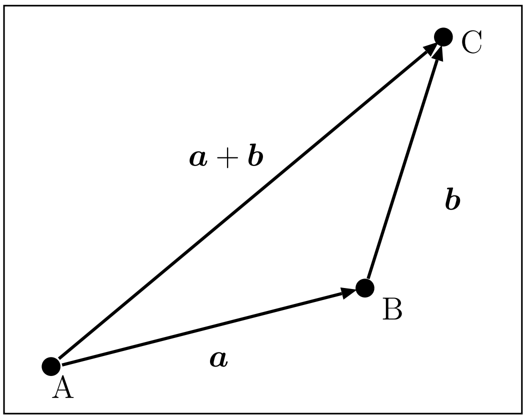


図 3: ベクトルの和の定義

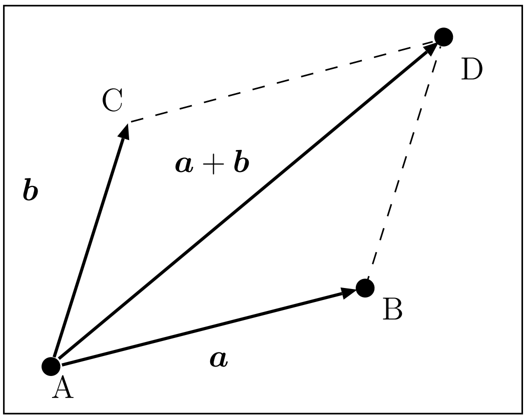


図 4: ベクトルの和 2.

☆注意

- ベクトルの和は以下のように考えてもよい。$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とし ($\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の始点を合わせる)、ABDC が平行四辺形になるように D を取るとき、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を対角線のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とする (図 4)。

  図 3 は変位ベクトル的な考え方、図 4 は力の合成のような考え方。

- ベクトルとスカラーの和はない (考えない)。

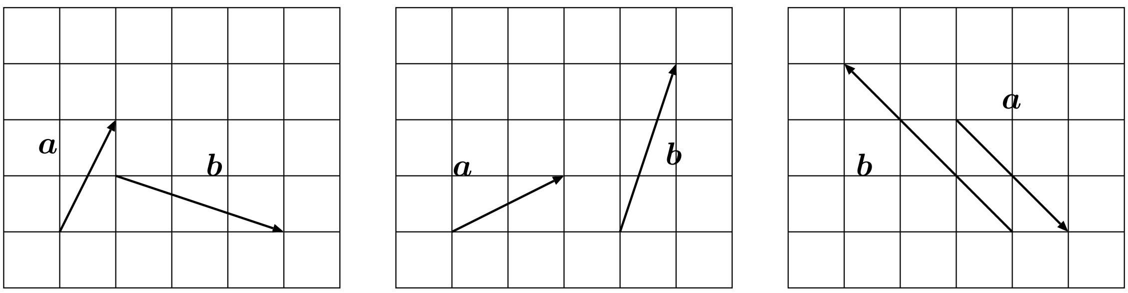
定理 2.2 (ベクトルの和の性質)

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$
2. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
3. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$
4. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

☆注意: $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ となるのは、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が同じ向きの場合、あるいは $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の少なくとも一方がゼロベクトルの場合のみ。

問 3 以下の図に対して、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を図で示せ。

(1) (2) (3)



☆注意

- 図でベクトルを示すときは、矢印 (向き) をはっきり示すこと。
- $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の和を図示する問題で、$\boldsymbol{a}$ に $\boldsymbol{b}$ をつぎたした図だけを書かないこと。$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ の図が必要。
- 他のベクトルや方眼紙の直線と重なるベクトルを書く場合、(特に定規で書くと) 始点がどこか見えにくいので、少しずらすなどするとよい。
- ベクトルの複数の終点 (矢印) が重なる場合も見にくくなることがある。

問 4 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\boldsymbol{0}$ となることを示せ。

問 5 定理 2.2 の 2. が成り立つことを図を用いて説明せよ。

定義 2.3 (ベクトルの差)

1. **逆ベクトル**: $-\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ大きさで向きが逆のベクトル。$-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$。
2. **ベクトルの差**: 差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ は、 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ とする (図 5)。

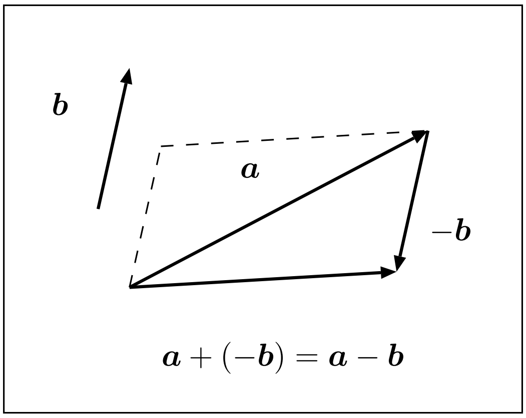


図 5: ベクトルの差

定理 2.4

1. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$
2. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$
3. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

☆注意

定理 2.4 の 1. よりベクトルの差は、2 つのベクトルの始点を合わせて終点をつなぐベクトル、と見ることもできる (が、そう考えると向きを間違いやすい)。

問 6 問 3 の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ を図で示せ。

定義 2.5 (ベクトルのスカラー倍)

実数 k に対し、ベクトル $\boldsymbol{a}$ のスカラー倍 $k\boldsymbol{a}$ を次のように定義する (図 6)。

- $k > 0$ で $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のときは、$k\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と向きが同じで、大きさが $|\boldsymbol{a}|$ の k 倍のベクトル。
- $k < 0$ で $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のときは、$k\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と向きが逆で、大きさが $|\boldsymbol{a}|$ の $|k|$ 倍のベクトル。
- $k = 0$、または $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときは、$k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$。

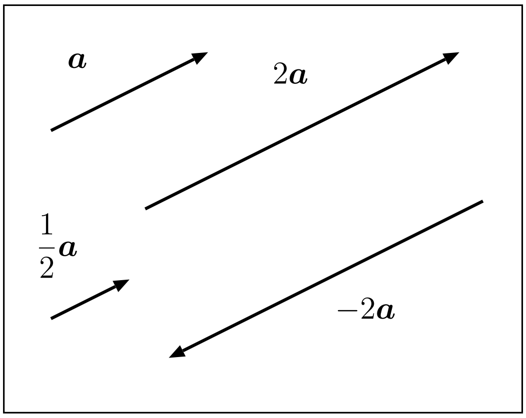


図 6: ベクトルのスカラー倍

定理 2.6 (ベクトルのスカラー倍の性質) k, ℓ を実数とするとき、以下が成り立つ。

1. $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}, \quad (-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$
2. $|k\boldsymbol{a}| = |k| \cdot |\boldsymbol{a}|$
3. $(k + \ell)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + \ell\boldsymbol{a}$
4. $k(\ell\boldsymbol{a}) = (k\ell)\boldsymbol{a}$
5. $k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$

問 7 次の式を展開せよ。 $3(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) - 4(\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{a})$

問 8　問 3 の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a} - \dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$ を図で示せ。

□スカラー倍の応用

- $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき、「$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b}$」と「$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ となる実数 k がある」は同じこと。
- $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき、$\boldsymbol{a}$ と同じ方向の単位ベクトル $\boldsymbol{b}$ は、$\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$、
  $\boldsymbol{a}$ と平行な単位ベクトル $\boldsymbol{c}$ は、$\boldsymbol{c} = \pm\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$。
- $\boldsymbol{0}$ でなく、平行でない 2 つの平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を使えば、その平面のベクトルはすべて $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ の形に表される $(s, t$ はスカラー$)$。
- $\boldsymbol{0}$ でなく、1 つの平面上にない 3 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を使えば、空間ベクトルはすべて $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} + u\boldsymbol{c}$ の形に表される $(s, t, u$ はスカラー$)$。

問 9　中心 O の正六角形 ABCDEF に対して、$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ とするとき、次のベクトルを $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ $(s, t$ はスカラー$)$ の形に表せ。
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

3　ベクトルの成分

□用語、記号 (基本ベクトル)

- **基本ベクトル**: 軸方向の単位ベクトルを **基本ベクトル** と呼ぶ。
- 2 次元の基本ベクトルは $\boldsymbol{e_1}$ (x 軸方向), $\boldsymbol{e_2}$ (y 軸方向) (図 7)
- 3 次元の基本ベクトルは $\boldsymbol{e_1}$ (x 軸方向), $\boldsymbol{e_2}$ (y 軸方向), $\boldsymbol{e_3}$ (z 軸方向) (図 8)

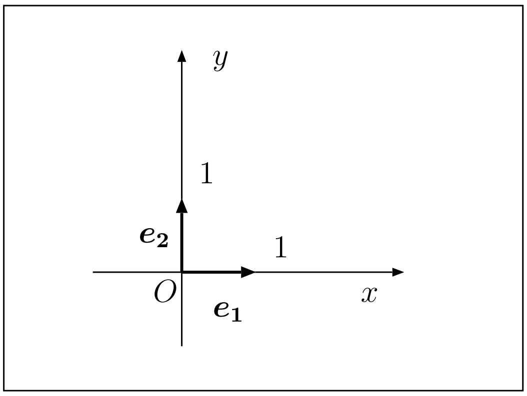


図 7: 基本ベクトル (平面ベクトル)

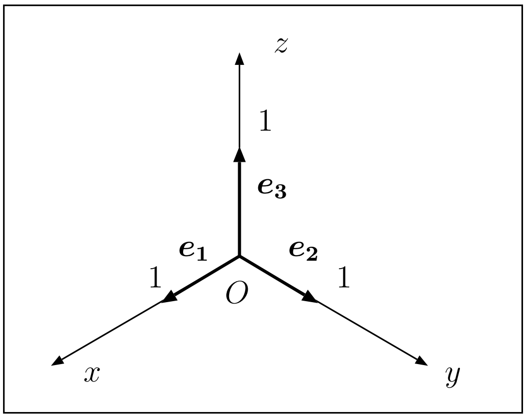


図 8: 基本ベクトル (空間ベクトル)

☆注意

3 次元基本ベクトルは、物理や工学では $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ と書くことも多い。

□用語、記号 (成分)

- ベクトル $\boldsymbol{a}$ の**成分**：「$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A の座標」を $\boldsymbol{a}$ の **成分** と呼ぶ (図 9)。
- 平面ベクトルの場合: $\mathrm{A}(a_1, a_2)$ のとき、$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と書く。
- 空間ベクトルの場合: $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ のとき、$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と書く。
- a_1 を x **成分**、a_2 を y **成分** (3 次元の場合 a_3 を z **成分**) と呼ぶ。

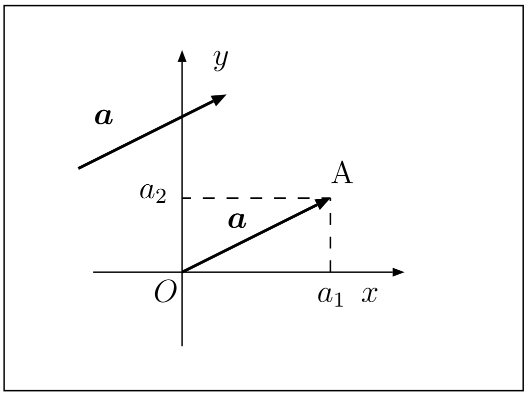


図 9: ベクトルと成分

☆注意

○ (a_1, a_2), $(a_1, a_2\, a_3)$ のように成分を横型に書く本もある。

○ 成分が $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ というベクトルは、右 (x 方向) に a_1, 上 (y 方向) に a_2 進むベクトル、と見ることもできる (空間ベクトルの成分も同様)。

問 10 次の成分を持つベクトルを xy 平面上に図示せよ。

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}$ (3) $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4-6 \\ 3+2 \end{pmatrix}$

問 11 問 3 の格子の一マスが 1×1 のサイズであるとき、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ をそれぞれ成分で表せ。

定理 3.1 (基本ベクトルと成分)

1. 平面ベクトルの基本ベクトルの成分は、$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. 空間ベクトルの基本ベクトルの成分は、$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. 成分表示は、以下のような基本ベクトル表現に直すことができる (図 10)。

- 平面ベクトル: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2}$
- 空間ベクトル: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2} + a_3\boldsymbol{e_3}$

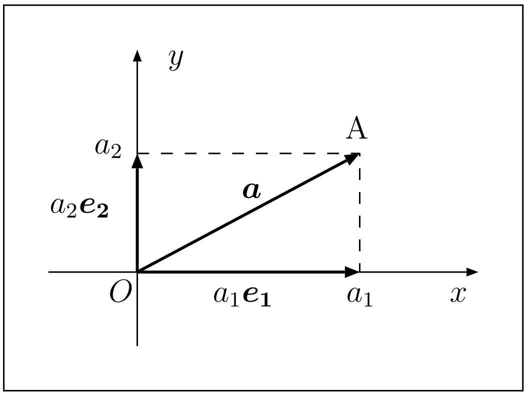


図 10: 基本ベクトル表現

定理 3.2 (成分による計算)

1. 平面ベクトルの場合: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, スカラー k に対して、

   (a) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = b_1$ かつ $a_2 = b_2$

   (b) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

   (c) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = a_2 = 0$

   (d) $\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}, \quad k\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$

   (e) $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$ のとき、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

2. 空間ベクトルの場合: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, スカラー k に対して、

(a) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \iff a_1 = b_1$ かつ $a_2 = b_2$ かつ $a_3 = b_3$

(b) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

(c) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \iff a_1 = a_2 = a_3 = 0$

(d) $\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}, \quad k\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$

(e) $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2, b_3)$ のとき、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

問 12 2 点 $\mathrm{A}(-1, 3)$, $\mathrm{B}(2, 5)$ に対して、次のものを求めよ (スカラーか成分で表す)。 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (2) $3\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ (3) $|-5\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$

問 13 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ に対して、次のものを求めよ。
(1) $4\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$ (2) $3(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) - (2\boldsymbol{b} - 4\boldsymbol{a})$ (3) $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$

問 14 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に対して、次のベクトルを $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ (s, t はスカラー) の形に表せ。 (1) $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

問 15 $\mathrm{A}(4, 3, -2)$, $\mathrm{B}(-5, 2, 3)$, $\mathrm{C}(1, -1, 0)$ で $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のとき、点 D の座標を求めよ。

問 16 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ x \end{pmatrix}$ のとき、 (1) $\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b}$ となるような x の値を求めよ。 (2) $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\boldsymbol{c}$ を求めよ。

4 ベクトルの内積

定義 4.1 (内積)

1. $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積 (または **スカラー積**) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

と定義する (スカラー値)。なお、θ は、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角で、$0 \leq \theta \leq \pi$ (図 11)。

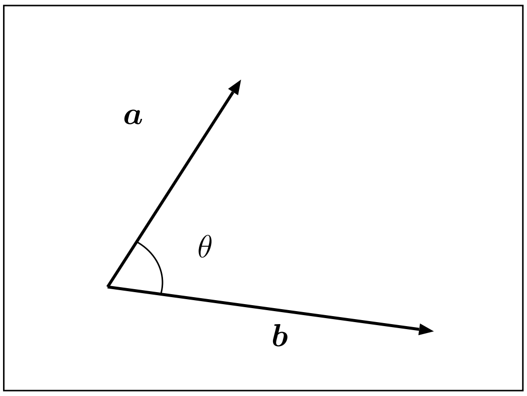


図 11: ベクトルのなす角

2. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のときは θ が決まらないが、この場合は $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ と定義する。

☆注意

内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を、$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ や $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ と書く流儀もある。

問 17 中心 O、一辺の長さが 2 の正六角形 ABCDEF に対して、次の値を求めよ。 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ (3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

定理 4.2 (内積と成分) 内積は、成分で以下のように計算できる。

1. 平面ベクトル: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
2. 空間ベクトル: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

定理 4.3 (内積の性質) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$、スカラー k に対して次が成り立つ。

1. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$
2. $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$
3. $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}, \quad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$
4. $(k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}), \quad \boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$
5. $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき、$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$

問 18　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ に対して、次の値を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$　(2) $\boldsymbol{b} \cdot (-3\boldsymbol{b})$　(3) $(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$

□内積の応用

- なす角: $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$
- 正射影: $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ 方向への正射影 ℓ は、$\ell = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$
- 内積の符号:
  $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} > 0 \iff$ なす角が鋭角、 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} < 0 \iff$ なす角が鈍角
- 展開: $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2$ 等
- 基本ベクトルの内積: $\boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_j} = 0$ ($i \neq j$ のとき)、$\boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_j} = 1$ ($i = j$ のとき)
- ある物を力 $\boldsymbol{F}$ で P から Q まで移動したときの仕事量 W は、$W = \boldsymbol{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

問 19　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ に対して、それらのなす角 θ の $\cos\theta$ の値を求めよ。

問 20　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が、$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$ であるとき、$\boldsymbol{c}$ を求めよ。

問 21　$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{5}, |\boldsymbol{b}| = 3\sqrt{2}, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -3$ のとき、$|\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}|$ の値を求めよ。(ヒント: $|\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b})$ を展開)

問 22　東西方向に伸びるレールの上に乗っている重りを、力 5.0 [N] で北東方向に引いて、レール上を東 15 [m] 移動した。このとき重りにした仕事量 W を求めよ。

5 平面の方程式

□3 次元空間の平面の方程式

3 次元空間内の平面 α は、それに垂直なベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ と、平面上にある一点 $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ で決定する。

この場合、「点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ が平面 α 上にある」ことは、「$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n}$」と同値になり、よって、「$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \boldsymbol{n} = 0$」と同値になるので、よって、平面 α の方程式は　$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ となる。

定理 5.1 (平面の方程式)

1. $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ を通り、$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式は、

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

2. 逆に、x, y, z の 1 次式 $ax + by + cz + d = 0$ は、$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直な平面を表す。

3. $z = a(x - x_0) + b(y - y_0) + z_0$ は、z に対する x 方向の傾きが a、z に対する y 方向の傾きが b で、点 (x_0, y_0, z_0) を通る平面の方程式。

4. $z = ax + by + c$ は、z に対する x 方向の傾きが a、z に対する y 方向の傾きが b の平面を表す。

5. **点と平面の距離**:　平面 $ax + by + cz + d = 0$ と点 $\mathrm{B}(p, q, r)$ との距離 L は、

$$L = \frac{|ap + bq + cr + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

問 23　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ に垂直で、点 $\mathrm{B}(1, 0, 4)$ を通る平面の方程式を求めよ。

問 24　$\mathrm{A}(1, 1, 6)$, $\mathrm{B}(0, 1, 3)$, $\mathrm{C}(1, 3, 2)$ を通る平面の方程式を求めよ。

問 25　問 23 の平面と原点との距離を求めよ。

6 ベクトルの外積

定義 6.1 (外積)

1. **右手系**: 3 次元座標軸が右手系であるとは、x 軸、y 軸、z 軸の向きが、右手の親指、人差し指、中指で無理なく表せるもの。x 軸の方向から y 軸の方向に右ねじを回すと、そのねじの進む方向が z 軸の方向と同じになる、と言い変えてもよい。(図 12, 13)

2. **外積**: 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し、$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ で、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行でないとき、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積** (または **ベクトル積**) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は、次のような「ベクトル」とする (図 14)。

   (a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の大きさ ($|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$) $=$ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積 S

   (b) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の方向 $=$ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方に垂直

   (c) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向き $=$ $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ右ねじを回して進む向き ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ が右手系)

3. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b}$ のいずれかであるときは、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方に垂直な方向が決まらないが、その場合は $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ とする。

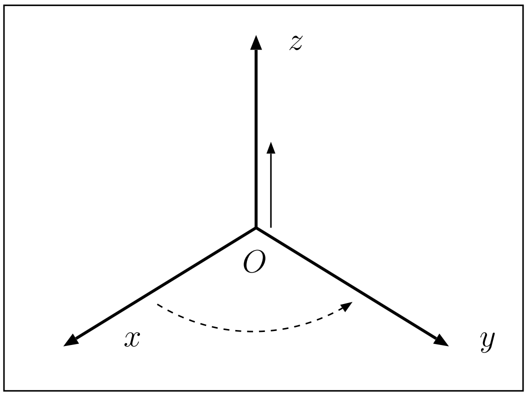


図 12: 右手系

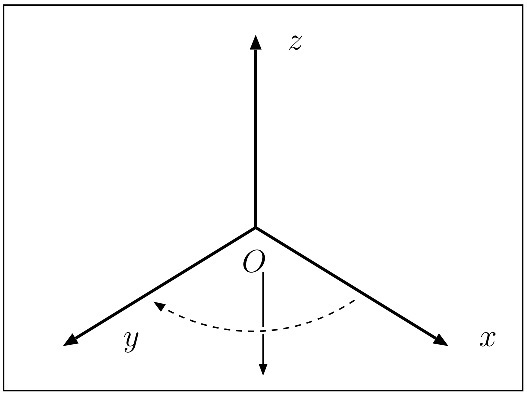


図 13: 左手系

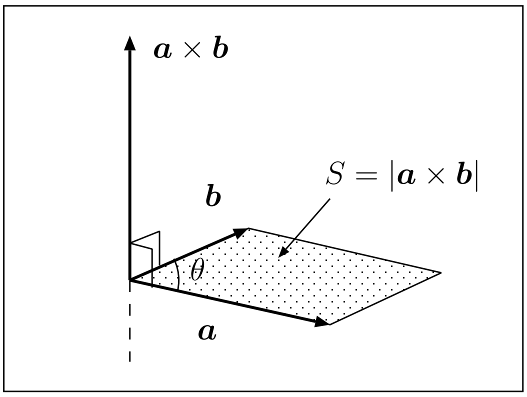


図 14: ベクトルの外積

☆注意

- 外積は 3 次元空間ベクトルのみ考え、平面ベクトルの外積は考えない。
- 実数 (スカラー) では $a \cdot b$ と $a \times b$ はどちらも単なる積 (ab) と同じ意味だが、ベクトルでは、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ (内積) と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ (外積) は意味が異なるので、正しく書き分けること。

定理 6.2 (基本ベクトルの外積)

$$\boldsymbol{e_1} \times \boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{e_3},\quad \boldsymbol{e_2} \times \boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{e_1},\quad \boldsymbol{e_3} \times \boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{e_2},$$
$$\boldsymbol{e_2} \times \boldsymbol{e_1} = -\boldsymbol{e_3},\quad \boldsymbol{e_3} \times \boldsymbol{e_2} = -\boldsymbol{e_1},\quad \boldsymbol{e_1} \times \boldsymbol{e_3} = -\boldsymbol{e_2}$$

問 26 外積の定義より、次の外積を求めよ。 (1) $2\boldsymbol{e_1} \times \boldsymbol{e_2}$ (2) $(\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}) \times \boldsymbol{e_1}$

定理 6.3 (外積と成分)

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ のとき、} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

□外積の成分計算

外積の成分計算は、以下の図 15, 16 のように計算するとよい。

(図 16 は $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ の場合の $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}$ の計算例)

(1) $\boldsymbol{a}$ の成分を 2 回書き並べ、
(2) $\boldsymbol{b}$ の成分をその右に 2 回書き並べ、
(3) 両端 (上端、下端) を削り、
(4) 斜めにかけて引き算をすればそれが外積の各成分。

☆注意

外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は、定義により $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に垂直なので、$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 0$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = 0$ となる。これは、外積の成分計算結果の検算に利用できる。

例えば、図 16 の例の場合、$51 + 4 - 55 = 0$, $34 - 1 - 33 = 0$ となる。

問 27 次の外積を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

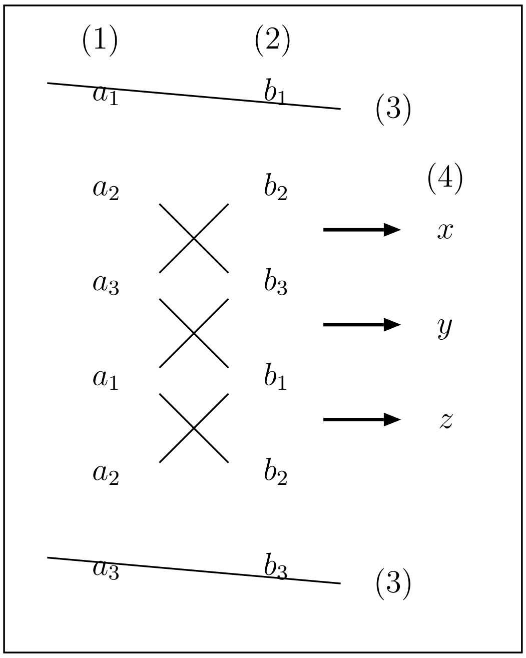


図 15: 外積の成分計算

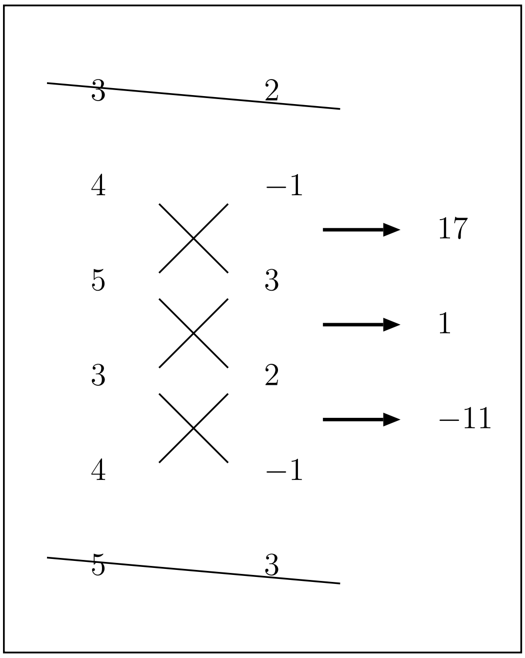


図 16: 成分計算の例

定理 6.4 (外積の性質)　3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$、スカラー k に対して次が成り立つ。

1. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$
2. $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$
3. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}, \quad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$
4. $(k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}), \quad \boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$
5. $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき、$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

☆注意

外積では結合法則は成り立たない。すなわち、$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ は等しくない。 **例**:　$(\boldsymbol{e_1} \times \boldsymbol{e_2}) \times \boldsymbol{e_2} = -\boldsymbol{e_1}, \quad \boldsymbol{e_1} \times (\boldsymbol{e_2} \times \boldsymbol{e_2}) = \boldsymbol{0}$

□外積の応用

- 展開 (内積の展開とはだいぶ違う):
  $(p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b}) \times (r\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}) = pr(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) + ps(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + qr(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) + qs(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b})$
  $= (ps - qr)(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$
- 大きさ = 平行四辺形の面積:　$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$
- $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る三角形の面積 $= \dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$
- $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の三重積 $=$ ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の体積)$\times(\pm 1)$

- フレミングの法則: 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の磁界の中で流れる電流 I の流れる方向が $\boldsymbol{n}$ (= 単位ベクトル) であるとき、その長さ ℓ の導線に働く力は $\boldsymbol{F} = ((I\boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{B})\ell$

問 28 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ に対し、次のものを求めよ。
(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積 S (2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}$

問 29 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ のとき、次のものを求めよ。
(1) $(2\boldsymbol{a}) \times (3\boldsymbol{b})$ (2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ (3) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ と $(2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ が作る三角形の面積

問 30 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し、
(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ。 (2) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ を求めよ。 (3) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ と $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a}$ が等しいことを示せ。

問 31 問 20 を、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算することで解け (ヒント: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ は平行)。

□内積と外積の比較

項目	内積	外積
記号	$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$
値	スカラー値	ベクトル値
交換法則	$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$
分配法則	成立	成立
同じものの積	$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \lvert\boldsymbol{a}\rvert^2$	$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$
ゼロになるとき	$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$
次元	2 次元、3 次元	3 次元のみ

問の略解

1 節

問 1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ($\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 自身も $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に等しい)
(2) $\overrightarrow{\mathrm{FO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ($\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 自身も $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に等しい)

問 2 (1) 2, (2) $2\sqrt{3}$, (3) 4

2 節

問 3 (1) 図は略 (右に 4、上に 1 上がったベクトル),
(2) 図は略 (右に 3、上に 4 上がったベクトル),
(3) 図は略 (左に 1、上に 1 上がったベクトル)

問 4 左辺 $= (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}) + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{AA}} = \mathbf{0}$

問 5 (1) 図は略 (左に 2、上に 3 上がったベクトル),
(2) 図は略 (右に 1、下に 2 下がったベクトル),
(3) 図は略 (右に 5、下に 5 下がったベクトル)

問 6 略

問 7 $15\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$

問 8 (1) 図は略 (左に 1/2、上に 4/3 上がったベクトル),
(2) 図は略 (右に 2/3、下に 1/2 下がったベクトル),
(3) 図は略 (右に 2、下に 2 下がったベクトル)

問 9 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (3) $\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$

3 節

問 10 略

問 11 (1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, (2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
(3) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

問 12 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, (2) $3\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$, (3) $|-5\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 5\sqrt{13}$

問 13 (1) 与式 $= \begin{pmatrix} -6 \\ -14 \\ 24 \end{pmatrix}$, (2) 与式 $= 7\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 21 \\ 22 \\ -39 \end{pmatrix}$,
(3) 与式 $= 2\sqrt{15}$

問 14 (1) $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (2) $\boldsymbol{d} = \dfrac{12}{7}\boldsymbol{a} + \dfrac{4}{7}\boldsymbol{b}$

問 15 $\mathrm{D}(-8, -2, 5)$

問 16 (1) $x = -9/2$, (2) $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$

4 節

問 17 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 4$, (2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AF}} = -2$, (2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6$

問 18 (1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -15$, (2) $\boldsymbol{b} \cdot (-3\boldsymbol{b}) = -63$, (3) 与式 $= -19$

問 19 $\cos\theta = \dfrac{14}{\sqrt{231}}$

問 20 $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

問 21 $|\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}| = \sqrt{89}$

問 22 $W = \dfrac{75}{2}\sqrt{2}[\mathrm{Nm}] = 53\ [\mathrm{Nm}]$

5 節

問 23 $3x + y - 2z + 5 = 0$

問 24 $3x - 2y - z + 5 = 0$

問 25 $\dfrac{5}{\sqrt{14}}$

6 節

問 26 (1) $2\boldsymbol{e_3}$, (2) $-\boldsymbol{e_3}$

問 27 (1) $\begin{pmatrix} 11 \\ -13 \\ 7 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

問 28 (1) $S = \sqrt{110}$, (2) $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \pm 3/\sqrt{110} \\ \pm 10/\sqrt{110} \\ \pm 1/\sqrt{110} \end{pmatrix}$

問 29 (1) $\begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ -24 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$, (3) $\dfrac{3}{2}\sqrt{26}$

問 30　(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$,　(2) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$,　(3) 略 (15)

問 31　略