

2021年07月16日

平行四辺形とベクトルに関する補足

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

授業のベクトルの問題で苦勞している解答をいくつか見たので、それに関して補足しておく。

四角形 ABCD に対して、

それが平行四辺形となる (1)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad (3)$$

の3つは同値になる。(1)と(2)が同値であること、および(1)と(3)が同値であることは図を考えれば自明であろう。

演習問題では、(1)と「(2)かつ(3)」が同値、としている解答もあったが、それは、命題として間違っていないが、過剰である。つまり、「(2)かつ(3)」は「(2)だけ」と同値であり、「(3)だけ」とも同値となる。

なお、「(2)ならば(3)」、あるいは「(3)ならば(2)」は、以下のように代数的に直接得ることもできる。

(2)が成立すると、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ より、

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$$

となる。

「(3)ならば(2)」も同様である。

さらに、(1)と、

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC} \text{ かつ } \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC} \quad (4)$$

が同値であるとして、それで解こうとしている答案もあった。(4)は、ほぼ平行四辺形の定義なので当然(1)とは同値だが、(4)を使うために数式にすると、(2)よりも面倒になり(パラメータが増える)、(2)を用いる方が易しい。

なお、「(2) と (4) が同値」であることは、以下のようにして直接示すこともできる。まず、「(2) ならば (4)」の方は、「(2) ならば (3)」が得られているので、(2) と (3) の両方が成立することになり、当然 (4) が成立することになる。

次は「(4) ならば (2)」の方を考える。ABCD は四角形なので、

$$\overrightarrow{AB} \neq \vec{0} \text{ かつ } \overrightarrow{AD} \neq \vec{0} \text{ かつ } \overrightarrow{AB} \text{ と } \overrightarrow{AD} \text{ は平行でない} \quad (5)$$

と仮定してよい。

(4) より、

$$\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BC} = m\overrightarrow{AD} \quad (6)$$

となるスカラー k, m が存在する。よって、

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AD}$$

となるから、

$$k\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AD}$$

よって、

$$(k-1)\overrightarrow{AB} = (m-1)\overrightarrow{AD} \quad (7)$$

となる。もし、 $k \neq 1$ なら、ここから

$$\overrightarrow{AB} = \frac{m-1}{k-1}\overrightarrow{AD}$$

となって、 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AD}$ ということになり、(5) に反する。よって $k=1$ となる。ついでに言えば、 $k=1$ と (7) より $(m-1)\overrightarrow{AD} = \vec{0}$ となるので、(5) より $m=1$ も得られる。

よって、(6) より $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ (および $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$) となり、(2) (および (3)) が得られることになる。