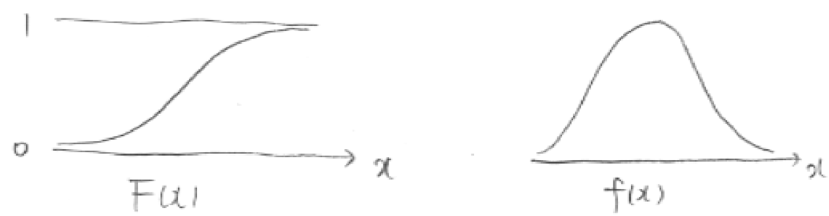
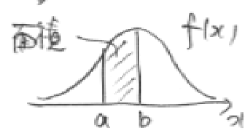
◎ 連続分布

$$\begin{cases} X = \text{連続的な値をとる確率変数} \\ F(x) = P(X \le x) \text{ — ①} \quad (x\text{以下の確率}) \quad \underline{X\text{の分布関数}} \\ f(x) = F'(x) \text{ — ②} \qquad X\text{の}\ \underline{\text{密度関数}} \end{cases}$$



◦ $P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) \underset{①}{=} F(b) - F(a)$

$$\underset{②}{=} \int_a^b f(x)dx \text{ — ③}$$



$f(x)$：その下の面積がその範囲の確率(割合)を表す

（＝ヒストグラムの理想化）

(A) Fの性質

$$\begin{cases} \cdot\ F(x)\text{は減少しない連続関数} \\ \cdot\ F(-\infty)\ (=\lim_{x\to-\infty}F(x)) = 0 \\ \cdot\ F(\infty)\ (=\lim_{x\to\infty}F(x)) = 1 \end{cases}$$

(B) fの性質

$$\begin{cases} \circ\ f(x) \ge 0 \\ \circ\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

（全体の面積＝全部の確率）

・連続変数 $\underset{(\Sigma,\ P)}{X} \longrightarrow \underset{(A)}{F(x)} \longrightarrow \underset{(B)}{f(x)}$ と定まるが、

逆に

・(A)を満たす $F(x) \longrightarrow f(x)$

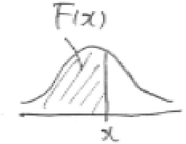
③により Xの確率 が決定し、

・(B)を満たす $f(x) \longrightarrow$ ④により $F(x)$ が決まる。

③により Xの確率

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy \text{ — ④}$$

$$(= P(X \le x))$$



よって X を定めることは $F(x)$ か $f(x)$ のいずれかを定めることと同じ。

◦ 連続分布の平均

度数分布

⇒ 平均＝Σ(階級値)×(相対度数)

（X の値）（割合）

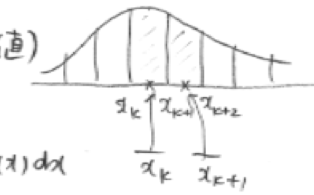
階級	階級値	相対度数
140–160	150	0.2
160–180	170	0.5
⋮	⋮	⋮

平均 $= 150\times0.2 + 170\times0.5 + \cdots$

よって

$$E(X) \doteqdot \sum_k \bar{x}_k P(x_k \le X \le x_{k+1})$$

$\bar{x}_k = x_k$ と x_{k+1} の中間（階級値）



$$= \sum_k \bar{x}_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \bar{x}_k f(x)dx$$

$\bar{x}_k \doteqdot x$ ←（階級幅が狭ければ）

$$\doteqdot \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

幅を細かくしていくと ≒ が ＝ になる（誤差 → 0）

$$\therefore E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

同様に $E(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x)dx$ となる。

◦ $V(X) = E((X-m)^2) \quad \left(= \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)dx\right)$

$= E(X^2) - E(X)^2$ ← (P66)

(P70)

◦ $E(aX+b) = aE(X) + b,\quad V(aX+b) = a^2V(X)$

は連続分布でも成り立つ。