⑨ 順列, 組み合わせ

◦ $n! = n$の階乗 $= 1\times 2\times\cdots\times n$, ただし $0! = 1$とする。

$=$ 異なるn個の並べ方の総数

例 ・$3! = 1\times 2\times 3 = 6$.

・a, b, c の並べかえの総数 $= 3! = 6$ (abc, acb, bac, bca, cab, cba)

(□□□ a, b, c 3通り / ひとつとると残りの2通り / 残りの1通り $= 3\times 2\times 1 = 6$)

◦ 順列 = 1列に並べる (順番が違うものは区別する)

組み合わせ = 単なる集まり (〃 〃 は区別しない)

例 ・a, b, c から 2つとった順列は 6通り

(ab, ac, ba, bc, ca, cc) ← bc, cb を区別する

・ 〃 〃 組み合わせは 3通り

({a, b}, {a, c}, {b, c}) ← bc, cb を区別しない

◦ ${}_nP_k$ = 異なるn個からk個とって並べる順列の総数
(permutation)

$$= \overbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)}^{k個} \quad —①$$

$$= \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)\times(n-k)\times\cdots\times 2\times 1}{(n-k)\times\cdots\times 2\times 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} \quad —②$$ (通常は①で計算)

例 服が7着, 月〜金にそれぞれ異なる服を着る場合その選び方は?

7着から5つ選んで月〜金に割り当てる順列

$\therefore$ ${}_7P_5 = 7\times 6\times 5\times 4\times 3 = 2520$ 通り
(210 30 840)

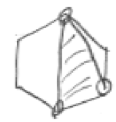
◦ ${}_nC_k$ = 異なるn個からk個をとる組み合わせの総数
(combination)

$$= \frac{{}_nP_k}{k!}$$ ((k個の選び方) × (そのk個の並べ方) = 順列
${}_nC_k$ $k!$ ${}_nP_k$)

$$= \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}^{k個}}{\underbrace{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}_{k個}} \quad —③$$ ← 普通はこれで計算

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad —④$$ $\binom{n}{k}$ と書く本もある.

例 正六角形の6つの頂点から3角形は何通り作れるか?



6つから3つの点を選べば1つの3角形ができるので

$${}_6C_3 = \frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1} = 20通り$$

• ${}_nP_0 \underset{②}{=} \frac{n!}{n!} = 1$, ${}_nC_0 \underset{④}{=} \frac{n!}{0!\,n!} = 1$ (とする)

• ${}_nC_{n-k} = {}_nC_k$

• $(x+y)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}y + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \cdots + {}_nC_ny^n$
(2項定理)

• パスカルの三角形

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1 ← ${}_4C_0, {}_4C_1, {}_4C_2, {}_4C_3, {}_4C_4$