2023 年 08 月 07 日

ラプラス変換の積分と収束点と単射性

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

工学部の教科書では、ラプラス逆変換の存在、すなわちラプラス変換の単射性については証明を省いていることが多い。私も授業では単射であることは紹介するが証明はしなかった。しかし、全く理由を説明しないと不安に思う学生もいるかもしれないし、簡単な場合に限定してもよいから、なんらかの説明を紹介できれば、と思った。

ラプラス変換の単射に関して調べてみると、ネットで 1 件 ([2])、大学図書館で 1 冊 ([3])、証明を載せているものを見つけられたが、他の本は証明は省略しているか、フーリエ変換の知識と複素関数論の知識を利用してラプラス逆変換をブロムウィッチ積分で表すというやり方をしている (例えば [4])。しかしこの後者はかなり準備が必要で厄介である。本稿では、単射性を [2], [3] の方向で示したものを、少し解説や補足を混じえながら紹介する。

また、工学の本ではそもそもラプラス変換を、区分的連続な関数で「指数型」と呼ばれるものを対象として話を進めることが多いが、積分の意味を再考して対象となる関数を広げることについても考察する。

そして、これも工学の本ではあまり証明していないが、ラプラス変換の「収束点」についても紹介したいと思う。なお、[2], [3], [4] には、この収束点についてもちゃんと証明が書かれている ([4] では「収束座標」と書かれている)。

2 対象とする関数や積分の種類

ラプラス変換は、簡単に言えば、$x\geq 0$ で定義された関数 $f(x)$ に対し、

$$F(s)=\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx \tag{1}$$

によって定義される s の関数で、これを $F(s)=\mathcal{L}[f](s)$ と書く。変数 s を複素変数と見てラプラス変換を複素関数と考えることもできるが、本稿では、多くの工学の本と同様に s は実数変数として考える。

この $f(x)$ の満たすべき性質、および (1) の積分の意味については、いくつかの考え方がある。工学の本では、区分的に連続な関数を対象とすることが多いようである。

定義 1 (区分的連続性)

> $f(x)$ が $[0,\infty)$ 上 **区分的に連続** であるとは、$f(x)$ が高々可算個の点 $a_0<a_1<a_2<\cdots$ を除いて連続で、
>
> 1. $\{a_n\}_n$ は集積点を持たない
> 2. $f(x)$ は各 a_n で左右の極限値 $f(a_n-0)$, $f(a_n+0)$ ($a_0=0$ の場合は $f(a_0+0)$ のみ) を持つ
>
> を満たすこと。
>
> $[0,\infty)$ 上区分的に連続な関数全体の集合を PC と書くことにする。

1. の集積点を持たない、というのは有限な極限を持つ部分列を持たない、という意味であるが、本によっては、有限区間との共通部分は常に有限列になる、と書いていて、それでも同じ意味になる。

PC の関数に対しては、(1) の積分は通常「広義リーマン積分」の範疇で考えるわけであるが、そう考えるなら、実は PC の条件をさらに緩くすることもできる。または最初から「ルベーグ積分」と考え、その方向で広い関数の範囲で考察することもできる。

これらの関係を簡単に説明する。

定義 2 (リーマン可積分)

> 有限区間 $[a,b]$ 上の有界な関数 $f(x)$ が **リーマン可積分** であるとは、$[a,b]$ 上でリーマン和の細分によらない極限として定義されるリーマン積分 (通常の定積分) が存在することを言う。

このリーマン可積分性は次と同値であることが知られている。

定理 1 (リーマン可積分条件)

> 有限区間 $[a,b]$ 上の有界な関数 $f(x)$ がリーマン可積分であるための必要十分条件は、$f(x)$ の不連続点のルベーグ測度が 0 になること。言いかえれば、$f(x)$ がほとんどすべての点で連続となること、となる。

なお、ここでいう「ほとんどすべての点」とは「ルベーグ測度が 0 となる集合を除いて」ということを意味するルベーグ積分論特有の表現であり、「ルベーグ測度が 0」の意味は本稿では詳しくは説明できないが、「合計の長さが 0」のようなイメージで、可算無限集合もルベーグ測度は 0 であり、それより多くの点を持つ集合の可能性もある。

次は広義リーマン積分。

定義 3 (広義リーマン積分)

1. 関数 $f(x)$ が $I=[a,\infty)$ で有界で、I の有限な部分区間では常にリーマン可積分であるとき、I 上の積分を
$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)dx$$
と定める。

2. $I=(a,b]$ 上の関数 $f(x)$ が、$a<t<b$ なる任意の t に対し $[t,b]$ 上有界でリーマン可積分であるとき、I 上の積分を
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx$$
と定める。

3. $I=[a,b)$ 上の関数 $f(x)$ が、$a<t<b$ なる任意の t に対し $[a,t]$ 上有界でリーマン可積分であるとき、I 上の積分を
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)dx$$
と定める。

4. これらの積分を **広義リーマン積分** と呼び、その積分が有限値に収束する場合、$f(x)$ は I 上 **広義リーマン可積分** であるという。また、PC の関数で、$[0,\infty)$ で広義リーマン可積分な関数全体の集合を IPC と書くことにする。

なお、PC に属する関数に対しては、1. のリーマン広義積分だけを考えることになる。

一方、有界ではない関数に対しても、2., 3. の広義リーマン積分を考えれば、ラプラス変換を考える関数の範囲をもっと広げることができる。そのために、「区分的局所リーマン可積分」な関数という概念を導入する。

定義 4 (区分的局所リーマン可積分)

$f(x)$ が $[0,\infty)$ 上 **区分的局所リーマン可積分** であるとは、有限個の点

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_N,\ a_{N+1} = \infty \tag{2}$$

があり、

1. a_n $(0 \leq n \leq N)$ 以外の点で $f(x)$ は定義されている
2. 区間 (a_n, a_{n+1}) $(0 \leq n \leq N)$ 内の任意の有限閉区間 $[p, q]$ 上 $f(x)$ はリーマン可積分

であることと定める。$\{a_n\}_{0\leq n\leq N}$ を $f(x)$ の **除外集合** と呼ぶ。

$[0,\infty)$ 上区分的局所リーマン可積分関数全体の集合を PR と書く。

この「区分的局所リーマン可積分」という用語は、広く使われているものでなく、本稿だけの造語であることに注意 (同じことを指す適当な用語がない)。

この定義では、各 a_n での片側極限の存在は仮定しないし、(a_n, a_{n+1}) での連続性も仮定していない。よって、PC の元は、各不連続点でなんらかの値を定めておけば、$N = 0$ で PR の元となる。

なお、この定義 4 では広義リーマン積分の存在は仮定していないが、その広義リーマン積分の存在を追加したものを「区分的広義リーマン可積分」と呼ぶことにする。

定義 5 (区分的広義リーマン可積分)

1. $f(x) \in PR$、その除外集合 $\{a_n\}_{0\leq n\leq N}$, $a_{N+1} = \infty$ に対し、b_n を

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2} & (0 \leq n \leq N-1) \\ a_N + 1 & (n = N) \end{cases} \tag{3}$$

とするとき、すべての広義リーマン積分

$$\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx, \quad \int_{b_n}^{a_{n+1}} f(x)dx, \quad (0 \leq n \leq N) \tag{4}$$

がすべて有限値に収束するとき、$f(x)$ を**区分的広義リーマン可積分** であると呼ぶ。

2. 任意の $0 \le a < b \le \infty$ に対して、その中に除外集合 $a_j, a_{j+1}, \ldots, a_k$ が含まれる場合、$[a,b]$ 上の積分を

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{a_j} f(x)dx + \sum_{m=j}^{k-1}\left(\int_{a_m}^{b_m} f(x)dx \int_{b_m}^{a_{m+1}} f(x)dx\right) \\ &\quad + \int_{a_k}^b f(x)dx \end{aligned} \tag{5}$$

と考えることにし、この広義リーマン積分の和を、単に「$f(x)$ の $[a,b]$ 上の広義リーマン積分」と呼ぶ。

3. PR の元で、$[0,\infty)$ 上区分的広義リーマン可積分関数全体の集合を IPR と書く。

なお、このように、内部に無限になるような点を持つ関数を区間に分けて広義リーマン積分の和として扱う本はあまりなく、よって普遍的な適当な用語もないので、「区分的広義リーマン可積分」も本稿の造語である。

例えば、

$$\begin{aligned}f_1(x) &= x^{-p} \quad (x>0,\ p>0) \\ f_2(x) &= \log x \quad (x>0) \\ f_3(x) &= \sum_{n=1}^{N} |x-n|^{-p_n} \quad (x>0,\ p_n>0) \\ f_4(x) &= \sum_{n=1}^{N} \log|x-n| \quad (x>0)\end{aligned}$$

は、いずれも $x>0$ で有界ではなく、よって PC には含まれない。そしていずれも PR には含まれるが、IPR には含まれない。

一方、$f_j(x)e^{-sx}$ $(s>0)$ を考えると、これもいずれも PR には含まれ、そして $f_1(x)$ に対しては $p<1$ なら、$f_3(x)$ に対してはすべての p_n が $p_n<1$ なら $f_j(x)e^{-sx}$ はいずれも IPR に含まれる。すなわち、f_j のラプラス変換 (1) が存在することになる。

通常、区間の内点 (有限な x) で無限大になる関数に対する積分は、広義リーマン積分よりもルベーグ積分で扱うことが多い。次はその「ルベーグ積分」に関する定義から。

定義 6 (ルベーグ可積分)

$[0,\infty)$ 上の関数 $f(x)$ が **ルベーグ可積分** であるとは、$f(x)$ がルベーグ可測関数であり、かつ

$$\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty \tag{6}$$

となること。このとき、有限値のルベーグ積分

$$\int_0^\infty f(x)dx \tag{7}$$

が存在する。また、$[0,\infty)$ 上のルベーグ可測関数全体の集合を LM、ルベーグ可積分関数全体の集合を ILM とする。

「ルベーグ可測関数」の定義を本稿で説明するのは無理だが、ほぼすべての関数がルベーグ可測関数であると考えてよい[1]。

ルベーグ可測関数については、(6) の左辺のルベーグ積分を常に考えることができ (値は無限大の場合もある)、それが有限値であることが、有限値のルベーグ積分 (7) が存在するための条件となる。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数のとき}) \\ 0 & (x \text{ が無理数のとき}) \end{cases}$$

のように、$[0,1]$ 上でルベーグ可積分関数だがリーマン可積分ではない関数があり、一般にはルベーグ積分の方がリーマン積分より扱える関数は多い。

ルベーグ積分とリーマン積分、広義リーマン積分の間の関係は、

- 有限区間の有界な関数 $f(x)$:
  - $f(x)$ がリーマン可積分 $\Rightarrow$ $f(x)$ はルベーグ可積分、
    このときリーマン積分の値とルベーグ積分の値は一致する。
- 無限区間、または有界ではない $f(x)$:
  - $|f(x)|$ が広義リーマン可積分 $\Rightarrow$ $f(x)$ はルベーグ可積分、
    このとき広義リーマン積分の値とルベーグ積分の値は一致する。
  - $f(x)$ は広義リーマン可積分だが、$|f(x)|$ は広義リーマン可積分でない
    $\Rightarrow$ $f(x)$ はルベーグ可積分でない (当然積分は一致しない)

のようになっているので、広義リーマン積分まで含めると、ルベーグ積分の方が常に優位、というわけではない。例として、良く知られているように、

$$I = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{8}$$

[1] 逆にルベーグ可測関数でない関数を作るには、選択公理が必要なことが知られている。

は、広義リーマン積分としては有限値に収束することが知られているが、

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty$$

なので、$\sin x/x$ は $[1,\infty)$ でルベーグ可積分ではない。よって、広義リーマン積分 (8) の値は、ルベーグ積分の値とも一致しない。

同様に、

$$J = \int_0^1 \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \tag{9}$$

は、広義リーマン積分としては、

$$J = \lim_{t\to+0}\int_t^1 \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \lim_{t\to+0}\int_1^{1/t} y\sin y\,\frac{dy}{y^2} = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{\sin y}{y}\,dy = I$$

となって収束するが、やはり

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| dx = \int_1^\infty \left|\frac{\sin y}{y}\right| dy = \infty$$

となるので、ルベーグ可積分ではなく、よって広義リーマン積分の値とルベーグ積分の値は一致しない。

つまり、$PC \subset PR \subset LM$ であるが、$IPC \subset IPR \not\subset ILM$ となる。

3　ラプラス変換の存在性と収束点

前節の PC, RP, LM のそれぞれに対してラプラス変換の存在、特に収束点の存在について考察する。

s_0 が $f(x)$ のラプラス変換の **収束点** であるとは、

- $s > s_0$ のすべての s に対して $f(x)$ のラプラス変換が存在 (収束)
- $s < s_0$ のすべての s に対して $f(x)$ のラプラス変換が存在しない

を満たすこと。そのような収束点が存在することを示すために、次の命題を考える。

命題 A

「$\mathcal{L}[f(t)](s_1)$ が収束 $\Rightarrow s > s_1$ のすべての s に対し $\mathcal{L}[f(t)](s)$ は収束」

この命題 A が成り立てば、収束点が存在することは容易にわかる。

前節の IPC, IPR, ILM の 3 つの範疇でそれぞれ命題 A が成り立つかどうかを考える。実は ILM の範疇での命題 A が一番易しい。

定理 2 (ILM での収束点の存在)

$f(x) \in LM$ が $s = s_1$ に対して $f(x)e^{-s_1 x} \in ILM$
$\Rightarrow s > s_1$ に対して $f(x)e^{-sx} \in ILM$

証明

仮定、および (6) より、

$$\int_0^\infty \left| f(x)e^{-s_1 x} \right| dx < \infty$$

であるが、

$$\left| f(x)e^{-sx} \right| = \left| f(x)e^{-s_1 x} e^{-(s-s_1)x} \right| \leq \left| f(x)e^{-s_1 x} \right|$$

より

$$\int_0^\infty \left| f(x)e^{-sx} \right| dx \leq \int_0^\infty \left| f(x)e^{-s_1 x} \right| dx < \infty$$

となる。■

次は IPC の範疇で考える。

$f(x) \in PC$ とし、$f(x)e^{-s_1 x} \in IPC$ であるとする。この場合、広義リーマン積分になるのは ∞ のみである。今、

$$g(x) = \int_0^x f(t)e^{-s_1 t} dt \tag{10}$$

とすると、$g(x)$ は連続で、また仮定より

$$g(\infty) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-s_1 t}dt \tag{11}$$

は収束し、よって $g(x)$ は $[0,\infty)$ で有界となる。このとき、$s > s_1$, $M > 0$ に対し $p = s - s_1 > 0$ とすると、

$$\begin{aligned}\int_0^M g(x)e^{-px}dx \ &= \ \int_0^M e^{-px}dx\int_0^x f(t)e^{-s_1 t}dt \ = \ \int_0^M f(t)e^{-s_1 t}dt\int_t^M e^{-px}dx\\ &= \ \frac{1}{p}\int_0^M f(t)e^{-s_1 t}(e^{-pt}-e^{-pM})dt \ = \ \frac{1}{p}\int_0^M f(t)e^{-st}dt - \frac{1}{p}e^{-pM}g(M)\end{aligned}$$

より、

$$\int_0^M f(t)e^{-st}dt = e^{-pM}g(M) + p\int_0^M g(x)e^{-px}dx \tag{12}$$

となる。$g(x)$ は連続で有界なので、$M\to\infty$ とすると、

$$e^{-pM}g(M)\to 0, \quad \int_0^M g(x)e^{-px}dx \to \int_0^p g(x)e^{-px}dx = \mathcal{L}[g(x)](p)$$

となるから、

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

も収束する。これで次が言えた。

定理 3 (IPC での収束点の存在)

$f(x)\in PC$ が $s = s_1$ に対して $f(x)e^{-s_1 x}\in IPC$
$\Rightarrow s > s_1$ に対して $f(x)e^{-sx}\in IPC$

最後は IPR の範疇での収束点の存在。$f(x)\in PR$, $g(x) = f(x)e^{-s_1 x}\in IPR$ とする。$f(x)$ の除外集合を $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_N$ とし、$a_{N+1} = \infty$, および (3) の b_n を取る。仮定より、広義リーマン積分

$$\int_{a_n}^{b_n} g(x)dx = \int_{a_n}^{b_n} f(x)e^{-s_1 x}dx, \quad \int_{b_n}^{a_{n+1}} g(x)dx = \int_{b_n}^{a_{n+1}} f(x)e^{-s_1 x}dx$$

は $0 \leq n \leq N$ に対しすべて収束する。今、

$$h_n(x) = \int_{b_n}^{x} g(t)dt = \int_{b_n}^{x} f(t)e^{-s_1 t}dt \quad (a_n < x < a_{n+1},\ 0 \leq n \leq N) \tag{13}$$

とすると、$h_n(x)$ は連続で、$h_n(a_n+0)$, $h_n(a_{n+1}-0)$ が存在することになり、よって有界である。

ちなみに、この $h_n(x)$ を全部つないで作った関数

$$h(x) = h_n(x) \quad (a_n < x < a_{n+1})$$

は $h(x) \in PC$ となる。

$a_n < y < a_{n+1}$, $p = s - s_1 > 0$ に対し、

$$\begin{aligned}
\int_{b_n}^{y} h_n(x)e^{-px}dx \ &= \ \int_{b_n}^{y} e^{-px}dx \int_{b_n}^{x} g(t)dt \ = \ \int_{b_n}^{y} g(t)dt \int_{t}^{y} e^{-px}dx \\
&= \ \frac{1}{p}\int_{b_n}^{y} g(t)(e^{-pt} - e^{-py})dt \ = \ \frac{1}{p}\int_{b_n}^{y} g(t)e^{-pt}dt - \frac{1}{p}e^{-py}h_n(y)
\end{aligned}$$

より、

$$\int_{b_n}^{y} g(t)e^{-pt}dt = e^{-py}h_n(y) + p\int_{b_n}^{y} h_n(x)e^{-px}dx \tag{14}$$

となる。よって、仮定より $y \to a_n + 0$, $y \to a_{n+1} - 0$ に対してこれは収束し、よって、

$$\int_{a_n}^{b_n} g(t)e^{-pt}dt = \int_{a_n}^{b_n} f(t)e^{-st}dt, \quad \int_{b_n}^{a_{n+1}} g(t)e^{-pt}dt = \int_{b_n}^{a_{n+1}} f(t)e^{-st}dt$$

が $0 \leq n \leq N$ に対しすべて収束することになる。

定理 4 (IPR での収束点の存在)

$f(x) \in PR$ が $s = s_1$ に対して $f(x)e^{-s_1 x} \in IPR$
$\Rightarrow s > s_1$ に対して $f(x)e^{-sx} \in IPR$

よって、3 種類の積分の範疇いずれでも命題 A が成立することがわかり、収束点が存在することが示された。

さらに、今の証明の (14) の y に関する極限を式にすれば、$g(x) \in IPR, p > 0$ に対し、

$$\int_{a_n}^{b_n} g(t)e^{-pt}dt = e^{-pa_n}\int_{a_n}^{b_n} g(t)dt + p\int_{a_n}^{b_n} e^{-px}dx\int_{b_n}^{x} g(t)dt, \tag{15}$$

$$\int_{b_n}^{a_{n+1}} g(t)e^{-pt}dt = e^{-pa_{n+1}}\int_{b_n}^{a_{n+1}} g(t)dt + p\int_{b_n}^{a_{n+1}} e^{-px}dx\int_{b_n}^{x} g(t)dt \tag{16}$$

が成り立つことになるが、これはまたのちほど利用する。

もちろん、$f(x) = e^{x^2}$ のように、どんな s に対してもラプラス変換が存在しないような PC の関数もある。上に示したことは、一点でも収束すれば、ということなので、こういうことが起こらない、ということを示したわけではないことに注意が必要である。なお、この場合は収束点は ∞ と考える。

また、逆に $f(x) = e^{-x^2}$ のようにすべての s に対してラプラス変換が存在する場合もある。この場合は収束点は $-\infty$ と考える。

4 ルジャンドル多項式系の完全性

次はラプラス変換の単射性、すなわち

$$\mathcal{L}[f(x)](s) = \mathcal{L}[g(x)](s) \Rightarrow f(x) = g(x)$$

について考えるが、本節ではこの単射性を示すのに鍵となる定理を一つ紹介する。

定理 5

$a < b$ を有限の実数値とする。

1. $f(x)$ が $[a, b]$ 上の連続関数で、

$$\int_a^b f(x)x^n dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{17}$$

が成り立つならば、$[a, b]$ 上 $f(x) = 0$。

2. $f(x)$ が $[a, b]$ 上のルベーグ可測関数で 2 乗可積分、すなわち

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \tag{18}$$

であり、かつ (17) を満たすとき、

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0 \tag{19}$$

すなわち、ほとんどすべての x に対して $f(x) = 0$。

単射性の証明に使うのは、実は定理 5 の 1. の方だが、定理 5 の 1. は 2. に含まれる。つまり 1. は 2. の系として示される。

それは、$[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ は (18) を満たすので、それが (17) を満たせば、2. により (19) が成り立つことになり、$f(x)$ は連続なので (19) より $f(x) = 0$ となるからである。これで定理 5 の 2. から 1. が言えることがわかる。

よってあとは定理 5 の 2. を証明すればよいことになるが、その証明は通常は「ワイヤストラスの多項式近似定理」とルベーグ積分に関する定理などを組み合わせて行う。実際にに単射性に使用する定理 5 の 1. を単独で証明する場合も、通常「ワイヤストラスの多項式近似定理」を用いる。しかし、本稿ではそれらとは違い、フーリエ解析分野の「一般ルジャンドル多項式系の完全性」という定理を使って定理 5 の 2. の説明を行うことにする。

この「一般ルジャンドル多項式系の完全性」も、実はワイヤストラスの多項式近似定理を使って導かれるものであるが、フーリエ解析はラプラス変換に近い理論であるし、むし工学者に取っては「一般ルジャンドル多項式系の完全性」はなじみやすいものだろうし、そしてこれを使うことで一見ワイヤストラスの多項式近似定理を見えないようにできるので、本稿ではこの方法を選択する。

まずは一般フーリエ級数について説明する。$L^2(a, b)$ を、(a, b) 上のルベーグ可測関数 $f(x)$ (実数値) で自乗可積分、すなわち (18) を満たす関数全体の集合とし、この上の内積 (f, g)、ノルム $\|f\|$ を

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad \|f\| = (f, f)^{1/2} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

と定める。$\{\phi_n(x)\}_{n=1,2,\ldots} \subset L^2(a, b)$ が、

$$(\phi_n, \phi_m) = \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m), \\ 1 & (n = m) \end{cases}$$

を満たすとき、$\{\phi_n(x)\}_n$ を正規直交系と呼ぶ。この正規直交系 $\{\phi_n(x)\}_n$ による

$f(x) \in L^2(a,b)$ の一般化フーリエ級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f,\phi_n)\phi_n(x) \tag{20}$$

と定義されるが、これが任意の $f(x) \in L^2(a,b)$ に対して $L^2(a,b)$ の意味で $f(x)$ に収束、すなわち

$$\lim_{N\to\infty}\left\|f-\sum_{n=1}^{N}(f,\phi_n)\phi_n\right\|=0 \tag{21}$$

となるとき、正規直交系 $\{\phi_n(x)\}_n$ は完全である、と呼ばれる。

この完全正規直交系として知られるものの一つが、(a,b) 上

$$1, x, x^2, x^3, \ldots$$

からグラム=シュミットの直交化法で作られる一般化ルジャンドル多項式系 $\{\tilde{P}_n(x)\}_n$ である ($\tilde{P}_n(x)$ は n 次式)。なお、その完全性の証明には、前にも述べたようにワイヤストラスの多項式近似定理が用いられる。

なお、この $\{\tilde{P}_n(x)\}_n$ は、通常のルジャンドル多項式 $\{P_n(x)\}_n$ をスケール変換したものであり、通常のルジャンドル多項式は、$[-1,1]$ 上の直交系で、$\{\sqrt{(2n+1)/2}\,P_n(x)\}_n$ が $L^2(-1,1)$ 上の完全正規直交系となる。

この $\{\tilde{P}_n(x)\}_n$ の完全性を利用して、定理 5 の 2. を示そう。もし $f(x) \in L^2(a,b)$ が (17) を満たせば、$f(x)$ と任意の多項式との積の積分は 0 となり、よって

$$(f,\tilde{P}_n)=\int_a^b f(x)\tilde{P}_n(x)dx=0 \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

なので、f の一般化ルジャンドル多項式系による一般フーリエ級数 (20) は 0 となり、よって (21) により $\|f\|=0$ となるので、(19) が成り立つことになる。

5 原始関数のラプラス変換

もう一つ、ラプラス変換の単射性を示すために利用する、原始関数のラプラス変換の公式

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right](s)=\frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)\quad(s>0) \tag{22}$$

を本節で示しておく。なお、$f(x)$ は IPC、IPR, ILM のいずれかであるとし、よって $\mathcal{L}[f]$ は、3 節の結果により $s>0$ で存在する。

まずは、$f(x)\in IPC$ の場合を考える。この場合は、通常の証明と同じだが、一応示す。以後、本節を通して

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt \tag{23}$$

とする。$f(x)\in IPC$ より、$F(x)$ は連続、$F(0)=0$ で、$F(\infty)$ も存在し、よって $F(x)$ は有界で、$s>0$ に対し、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[F(x)](s) &= \int_0^\infty F(x)e^{-sx}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-sx}dx\int_0^x f(t)dt\\ &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M f(t)dt\int_t^M e^{-sx}dx = \frac{1}{s}\lim_{M\to\infty}\int_0^M f(t)(e^{-st}-e^{-sM})dt\\ &= \frac{1}{s}\lim_{M\to\infty}\left\{\int_0^M f(t)e^{-st}dt-e^{-sM}F(M)\right\}\end{aligned} \tag{24}$$

となるが、仮定、および定理 3 より

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\mathcal{L}[f](s),\quad F(\infty)$$

は存在するので、(24) の極限も存在し $\mathcal{L}[f](s)/s$ となるので、これで $f(x)\in IPC$ の場合は (22) が示された。

次は $f(x)\in ILM$ の場合を考える。この場合、仮定より、

$$\int_0^\infty |f(x)|dx<\infty$$

であり、また

$$\int_0^\infty |e^{-sx}|dx < \infty$$

であるから、定義関数 $\chi_A(t)$ を

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1 & (t \in A), \\ 0 & (t \notin A) \end{cases} \tag{25}$$

とすると、

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^\infty f(t)\chi_{[0,x]}(t)dt$$

なので、フビニの定理により、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[F(x)](s) &= \int_0^\infty e^{-sx}dx \int_0^x f(t)dt \;=\; \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-sx} f(t)\chi_{[0,x]}(t)dt \\
&= \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-sx} f(t)\chi_{[0,x]}(t)dx \;=\; \int_0^\infty f(t)dt \int_0^\infty e^{-sx}\chi_{[0,x]}(t)dx \\
&= \int_0^\infty f(t)dt \int_t^\infty e^{-sx}dx \;=\; \int_0^\infty f(t)\left(\frac{1}{s}e^{-st} - 0\right)dt \;=\; \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)
\end{aligned}$$

となって (22) が成り立つ。これで $f(x) \in ILM$ の場合も (22) が示された。

最後は $f(x) \in IPR$ の場合。この場合、リーマン広義積分に対し、積分の順序交換が成り立つかを丁寧に吟味する必要がある。$f(x)$ の除外集合を $\{a_n\}_{0\le n\le N}$, $a_{N+1} = \infty$, および (3) の b_n を取る。

補題 6 (リーマン広義積分での順序交換)

$0 \le n \le N$ に対して、

$$\begin{aligned}
\int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-sx}dx \int_{a_n}^x f(t)dt &= \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)dt \int_t^{a_{n+1}} e^{-sx}dx \\
&= \frac{1}{s}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)e^{-st}dt - \frac{1}{s}e^{-sa_{n+1}}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)dt
\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明

(15), (16) を利用する。積分を分けて、

$$\begin{aligned}\int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-sx}dx\int_{a_n}^{x} f(t)dt &= \int_{a_n}^{b_n} dx\int_{a_n}^{x} dt + \int_{b_n}^{a_{n+1}} dx\int_{a_n}^{x} dt\\ &= \int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{a_n}^{b_n} dt + \int_{b_n}^{x} dt\right)dx + \int_{b_n}^{a_{n+1}}\left(\int_{a_n}^{b_n} dt + \int_{b_n}^{x} dt\right)dx\\ &= \int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-sx}dx\int_{a_n}^{b_n} f(t)dt + \int_{a_n}^{b_n} e^{-sx}dx\int_{b_n}^{x} f(t)dt + \int_{b_n}^{a_{n+1}} e^{-sx}dx\int_{b_n}^{x} f(t)dt\\ &= I_1 + I_2 + I_3\end{aligned}$$

とすると、I_1 は

$$I_1 = \frac{1}{s}(e^{-sa_n} - e^{-sa_{n+1}})\int_{a_n}^{b_n} f(t)dt$$

で、I_2, I_3 には $f \in IPR$ より (15), (16) を適用すれば、

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{1}{s}\int_{a_n}^{b_n} f(t)e^{-st}dt - \frac{1}{s}e^{-sa_n}\int_{a_n}^{b_n} f(t)dt,\\ I_3 &= \frac{1}{s}\int_{b_n}^{a_{n+1}} f(t)e^{-st}dt - \frac{1}{s}e^{-sa_{n+1}}\int_{b_n}^{a_{n+1}} f(t)dt\end{aligned}$$

となる。よってこれらを合わせれば、

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{s}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)e^{-st}dt - \frac{1}{s}e^{-sa_{n+1}}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)dt$$

となって、補題 6 の最後の式が得られる。■

この補題を用いて、$f \in IPR$ のときの (22) を示す。

この場合も、(23) の $F(x)$ は連続、$F(+0) = 0$ で、$F(\infty)$ は存在し、よって $F(x)$ は有界となり、$s > 0$ で $F(x)$ のラプラス変換は存在する。

$$\mathcal{L}[F(x)](s) = \int_0^{\infty} F(x)e^{-sx}dx = \sum_{n=0}^{N}\int_{a_n}^{a_{n+1}} F(x)e^{-sx}dx$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{N}\int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-sx}dx\int_0^x f(t)dt \ = \ \sum_{n=0}^{N}\int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-sx}dx\left(\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}+\int_{a_n}^{x}\right)f(t)dt\\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-sx}dx\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt+\sum_{n=0}^{N}\int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-sx}dx\int_{a_n}^{x} f(t)dt
\end{aligned}$$

と分け、

$$\begin{aligned}
I_{n,k} &= \int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-sx}dx\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt \quad (1\leq N,\ 0\leq k<n),\\
J_n &= \int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-sx}dx\int_{a_n}^{x} f(t)dt \quad (0\leq n\leq N)
\end{aligned}$$

とすると、

$$I_{n,k}=\int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-sx}(F(a_{k+1})-F(a_k))dx=\frac{1}{s}(e^{-sa_n}-e^{-sa_{n+1}})(F(a_{k+1})-F(a_k))$$

であり、よってその和は、$F(a_0)=F(0)=0$ より、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1} I_{n,k} &= \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{N}(e^{-sa_n}-e^{-sa_{n+1}})\sum_{k=0}^{n-1}(F(a_{k+1})-F(a_k))\\
&= \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{N}(e^{-sa_n}-e^{-sa_{n+1}})F(a_n) \ = \ \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{N}(e^{-sa_n}F(a_n)-e^{-sa_{n+1}}F(a_n))
\end{aligned}$$

となる。一方、J_n は補題 6 より積分の順序交換ができて、

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)dt\int_t^{a_{n+1}} e^{-sx}dx\\
&= \frac{1}{s}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)e^{-st}dt-\frac{1}{s}e^{-sa_{n+1}}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)dt\\
&= \frac{1}{s}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)e^{-st}dt-\frac{1}{s}e^{-sa_{n+1}}(F(a_{n+1})-F(a_n))
\end{aligned}$$

となるので、その和は

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} J_n &= \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{N}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)e^{-st}dt-\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{N}e^{-sa_{n+1}}(F(a_{n+1})-F(a_n))\\
&= \frac{1}{s}\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt-\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{N}(e^{-sa_{n+1}}F(a_{n+1})-e^{-sa_{n+1}}F(a_n))\\
&= \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)-\frac{1}{s}\left\{\sum_{n=1}^{N+1}e^{-sa_n}F(a_n)-\sum_{n=0}^{N}e^{-sa_{n+1}}F(a_n)\right\}
\end{aligned}$$

となる。よって、合計すると、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[F(x)](s) &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1} I_{n,k} + \sum_{n=0}^{N} J_n \\
&= \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{N}(e^{-sa_n}F(a_n) - e^{-sa_{n+1}}F(a_n)) + \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s) \\
&\quad -\frac{1}{s}\left\{\sum_{n=1}^{N+1} e^{-sa_n}F(a_n) - \sum_{n=0}^{N} e^{-sa_{n+1}}F(a_n)\right\} \\
&= \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s) - \frac{1}{s}e^{-sa_{N+1}}F(a_{N+1}) + \frac{1}{s}e^{-sa_1}F(a_0)
\end{aligned}
$$

となるが、$a_{N+1}=\infty$, $a_0=0$ より $e^{-sa_{N+1}}=0$, $F(a_0)=0$ となるので、これで IPR の場合も (22) が成り立つことがわかった。

定理 7 (原始関数のラプラス変換)

> f が IPC, IPR, ILM のいずれかの元であれば、$s>0$ に対し (22) が成り立つ。

6 ラプラス変換の単射性

次は、いよいよラプラス変換の単射性を考える。

単射性の定理はほぼ次の形となる。

命題 B

> 「$f_1(x)$, $f_2(x)$ が $[0,\infty)$ 上の関数で、$\mathcal{L}[f_j(t)](s)$ が $s>\sigma_j$ で存在し、かつ $s>s_0=\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$ で $\mathcal{L}[f_1(t)](s)=\mathcal{L}[f_2(t)](s)$ となる
> $\Rightarrow$ ほとんどすべての x (≥ 0) で $f_1(x)=f_2(x)$ となる。」

ここで、$f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ とすれば、命題 B は

「$\mathcal{L}[f(x)](s)=0 \quad (s>s_0) \Rightarrow$ ほとんどすべての x に対して $f(x)=0$」

となるので、この形で考えればよい。

4 節の定理 5 の 1. を使えば、実はある場合には容易に単射性を示すことができる。

定理 8 (連続な場合の単射性)

> $f(x)$ が $[0,\infty)$ 上の連続関数で、極限 $\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-s_1x}$ が存在するような s_1 が取れ、かつ $\mathcal{L}[f(x)](s)=0\ (s>s_0)$ となる s_0 が存在すれば、$f(x)=0$ となる。

証明

$s_2=\max\{s_0,s_1\}$ とし $g(x)=f(x)e^{-s_2x}$ とすると、仮定より極限

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-s_1x}e^{-(s_2-s_1)x}$$

は存在し、$p>0,\ s=s_2+p>s_2$ に対して、仮定より

$$0=\mathcal{L}[f(x)](s)=\int_0^\infty f(x)e^{-(s_2+p)x}dx=\int_0^\infty g(x)e^{-px}dx$$

となる。ここで $e^{-x}=t,\ g(x)=g(-\log t)=h(t)$ と置換すると、

$$0=\int_0^\infty g(x)e^{-px}dx=\int_0^1 h(t)t^p\frac{dt}{t}=\int_0^1 h(t)t^{p-1}dt \tag{26}$$

となる。ここで、$h(t)$ は仮定より $0<t<1$ では連続で、

$$\lim_{t\to+0} h(t)=g(\infty),\quad \lim_{t\to1-0} h(t)=g(0)$$

の両方の極限も仮定により存在するので、$h(0)=g(\infty),\ h(1)=g(0)$ と定めれば $h(t)$ は $[0,1]$ 上連続となる。(26) は $p>0$ で成立するので、$p=1,2,3,\ldots$ とすれば定理 5 の (17) を満たすことになり、よって定理 5 の 1. より $h(t)=0$ となる。よって $g(x)=0$ となり、$f(x)=0$ となる。■

これで、$f(x)$ が連続で、いわゆる指数型

$$|f(x)|\le Me^{\sigma x}\quad (x>x_0)$$

のような関数の集合の上ではラプラス変換が単射であることがわかった。

次は、PC, PR, LM のようなより一般の関数のクラスではどうなるかを考える。$f(x)$ がこれらいずれかの関数で、s_2 を $f(x)$ の収束点とし、

$$\mathcal{L}[f(x)](s) = 0 \quad (s > s_2) \tag{27}$$

とする。$s_3 > s_2$ を一つ取ると 3 節で説明したように $f(x)e^{-s_3 x}$ は IPC か IPR か ILM に入るので、

$$g(x) = \int_0^x f(t)e^{-s_3 t}dt \tag{28}$$

とすると、$g(x)$ は連続関数で、

$$g(\infty) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \int_0^\infty f(x)e^{-s_3 x}dx = \mathcal{L}[f(x)](s_3)$$

が存在し、よって $[0,\infty)$ で有界なので、$s > 0$ に対して $g(x)$ のラプラス変換が存在する。そして、定理 7 により、$p > 0$ に対し

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g(x)](p) &= \mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)e^{-s_3 t}dt\right](p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}[f(x)e^{-s_3 x}](p) \\ &= \frac{1}{p}\mathcal{L}[f(x)](s_3 + p)\end{aligned} \tag{29}$$

となる。よって、仮定 (27) より、$p > 0$ で $\mathcal{L}[g(x)](p) = 0$ となる。

$g(x)$ は連続で、$g(\infty)$ が存在するので、これで定理 8 が $s_1 = 0$ について適用でき、よって $x \geq 0$ に対して $g(x) = 0$ となる。あとは $g(x) = 0$ から $f(x) = 0$ が導けるかを考えればよい。

まず、$f(x)e^{-s_3 x} \in ILM$ の場合は、$g(x)$ は絶対連続であり、ほとんどすべての x で微分可能で、

$$g'(x) = f(x)e^{-s_3 x} \tag{30}$$

となることが知られている。よって $g(x) = 0$ より、ほとんどすべての x で $f(x) = 0$ となることがわかる。

$f(x)e^{-s_3 x} \in IPR$ の場合も、除外集合以外の x ではその近傍ではルベーグ可積分なので同じ議論を用いることができ、よってほとんどすべての x で $f(x) = 0$ となる。

$f(x)e^{-s_3 x} \in IPC$ の場合は、不連続点以外では $g(x)$ は微分可能で (30) となるので、その集積しない $\{a_n\}_n$ 以外では $f(x) = 0$ となる。

結局次がわかったことになる。

定理 9 (ラプラス変換の単射性)

> $f(x)$ が PC, PR, LM のいずれかに属し、収束点 s_0 が $s_0 < \infty$ であり、ある s_1 $(> s_0)$ に対して $[s_1, \infty)$ 上 $\mathcal{L}[f](s) = 0$ となるとき、$[0, \infty)$ のほとんどすべての x で (PC の場合は集積しない高々可算個の不連続点を除いて) $f(x) = 0$ となる。

7 最後に

本稿では、ラプラス変換できる関数の拡張、やラプラス変換の収束点の存在の証明、ラプラス変換の単射性の証明について考察した。

変換できる関数の拡張については、工学の本では通常 IPC の範疇でしか書いてないものを IPR や ILM に広げて考えたが、その拡張によって、普通に成立するような公式が、条件をつけないと成立しなくなるものもあるだろうから、必ずしも広げればよいというわけでもない。

また、ILM に含まれない IPR の元を扱う必要は多分ほとんどないような気もするので、普通は IPC か ILM で足りるだろうと思う。しかし工学者に取っては「ルベーグ積分」はしきいが高いので、むしろ ILM より IPR の方がなじみ易いかもしれない。

収束点や単射性については、前述のようにその証明はそれほどポピュラーではないようなので、その保証を与える意味では本稿も多少は意味があるかもしれないが、IPR のような煩雑な証明は話をわかりにくくしてしまったかもしれない。なんなら IPR の話はとばして、IPC と ILM のものだけ見てもらうだけでもよいと思う。

なお、ラプラス変換に関する授業では、特に単射の方はやはり証明を紹介する時間はなさそうに感じる。

参考文献

[1] 日本数学会編、「岩波 数学辞典 第 3 版」岩波書店 (1985)

[2] 中西朗、「ラプラス変換とその微分方程式への応用」兵庫教育大学大学院 学位論文 (1993)

[3] 阪井章、「応用解析 複素解析/フーリエ解析」共立出版 (1992)

[4] 江沢洋「理工学者が書いた数学の本 6 フーリエ解析」講談社 (1987)