2008 年 03 月 26 日

有理関数のラプラス逆変換

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

多項式、三角関数、指数関数などの基本的な関数の和や積のラプラス変換は、多項式の商である有理関数になる。逆に、そのような有理関数のラプラス逆変換、すなわちラプラス変換がそのような有理関数になるような関数は、多項式、三角関数、指数関数の和や積で表わされる。

応用数理 A の講義で使用している教科書 [1] には、具体的なラプラス逆変換の計算はいくつか紹介してあるが、その計算の基本方針や原理などは書かれておらず、説明が十分ではないので、本稿では有理関数のラプラス逆変換の計算の基本的な方針について説明し、計算量の少ない計算方法についても考察を行いたい。

2 ラプラス変換の基本公式

最初に、本稿で必要となるラプラス変換の基本公式を上げておく。まず、本稿では $f(t)$ のラプラス変換を以下のように書くことにする。

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{1}$$

以下に上げる公式は基本的なものであり、ラプラス変換に関する教科書 (例えば [1]) であればたいてい載っている。

$$\text{線形性} \quad \mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] \tag{2}$$

$$e^{at} \text{ 倍} \quad \mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s - a) \tag{3}$$

$$t \text{ 倍} \quad \mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s) \tag{4}$$

$$\text{微分} \quad \mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0) \tag{5}$$

$$\text{スケール変換} \quad \mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0) \tag{6}$$

この最後のもの以外は [2] でもおおまかな説明をしているので、最後のもののみ示しておく。これは、$at = x$ による置換積分で、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(at)](s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(at)dt = \int_0^\infty e^{-sx/a} f(x)\frac{dx}{a} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-(s/a)x} f(x)dx \\ &= \frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right)\end{aligned}$$

により得られる。

具体的な関数のラプラス変換については、以下のものを証明なしにあげておく。詳細は、教科書等 (例えば [1]) を参照のこと。

f	1	t^k	$\sin t$	$\cos t$
$\mathcal{L}[f]$	$\frac{1}{s}$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s^2+1}$	$\frac{s}{s^2+1}$

ラプラス変換は、次の意味で一対一であることが保証されている。

定理 1

$f(t)$, $g(t)$ が $t > 0$ で連続で、$\mathcal{L}[f](s)$ と $\mathcal{L}[g](s)$ が同じ関数であれば、$f(t)$ と $g(t)$ も等しい。

これにより、変換後の関数から変換前の関数への対応も考えることができ、それがラプラス逆変換である:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = f(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$$

この $F(s)$ のラプラス逆変換を求めるには、例えば以下のような方法がある。

- ラプラス逆変換を表わす積分 (ブロムウィッチ積分と呼ばれる):

  $$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st}F(s)ds$$

  を計算する

- $F(s)$ を標準的な形に変形することで、ラプラス変換がそうなるような $f(t)$ を求める
- 留数計算を利用

最初のものは、逆変換を陽に表わす積分公式なのであるが、その計算は易しくはないためあまり用いられず、通常の計算、多くの工学向けの教科書では 2 つ目のものがよく用いられるようである。

その方法とは例えば、

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2}$$

のラプラス逆変換を考えると、(2), (3) より

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s+2}{(s+1)^2+1} = \frac{(s+1)}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1} \\ &= \left[\frac{S}{S^2+1} + \frac{1}{S^2+1}\right]_{S=s+1} = \mathcal{L}[\cos t](s+1) + \mathcal{L}[\sin t](s+1) \\ &= \mathcal{L}[e^{-t}\cos t](s) + \mathcal{L}[e^{-t}\sin t](s) = \mathcal{L}[e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t](s) \end{aligned}$$

と変形できるので、

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t$$

となる、といった具合である。

本稿では、分子の次数が分母の次数よりも小さい有理関数

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \quad (\deg A(s) < \deg B(s))$$

(A, B は s の多項式、$\deg A$ は A の次数) のラプラス逆変換を求めることを目標とする。多項式、三角関数 (sin, cos)、指数関数の和や積のラプラス変換は必ずこの形になり、また逆にこの形の関数 $F(s)$ のラプラス逆変換は、多項式、三角関数、指数関数の和と積で表される。本稿ではその事実、および計算方法について解説していく。

3 部分分数分解

有理関数のラプラス逆変換の計算では、不定積分の計算と同様、まず有理関数を簡単な有理関数の和に分けるために部分分数分解を行う。

部分分数分解の原理は以下の通り。

定理 2

多項式 $B_1(s),\ B_2(s)$ が互いに素で $B(s) = B_1(s)B_2(s)$ であり、$\deg A < \deg B$ であれば、

- $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A}{B_1 B_2} = \dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A_2}{B_2}$
- $\deg A_1 < \deg B_1,\ \deg A_2 < \deg B_2$

となるような多項式 $A_1,\ A_2$ が存在する (一意に決定する)。

これにより、分母を因数分解すれば、その因数に応じて互いに素な分母の分数に分解できることになる。分子の $A_1,\ A_2$ は未定係数法により求めることができる。そして、分母の因数分解については、実数係数の多項式であれば、次の定理により理論的には高々 2 次の因子にまで実数の範囲で因数分解可能であることがわかる。

定理 3

1. 複素数係数の n 次多項式 $B(s)$ は、複素数の範囲で n 個の零点 (すなわち方程式 $B(s) = 0$ の解) $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ を持ち、

   $$B(s) = a(s - \lambda_1)\cdots(s - \lambda_n)$$

   と 1 次因数の積に因数分解できる (代数学の基本定理)。

2. $B(s)$ の係数が実数の場合、複素数の零点 $\lambda = p + qi$ があれば、その共役複素数 $\bar{\lambda} = p - qi$ も零点となる。

3. $B(s)$ の係数が実数ならば、$B(s)$ は実数係数の 1 次と 2 次の因数の積の形に因数分解できる。

定理 3 の 3. は、

$$(s-\lambda)(s-\bar{\lambda}) = (s-p-qi)(s-p+qi) = (s-p)^2+q^2$$

であるから、2. の共役な零点との因数を組み合わせることで容易に得られる。よって、重複する零点を重複度を含めて書くことにすれば、$B(s)$ は原理的には

$$\begin{aligned} B(s) &= a(s-r_1)^{m_1}\cdots(s-r_L)^{m_L}\times(s^2+\mu_1 s+\xi_1)^{\tau_1}\cdots(s^2+\mu_M s+\xi_M)^{\tau_M} \\ &\quad (m_j\geq 1,\quad \tau_k\geq 1,\quad \mu_k^2-4\xi_k<0) \end{aligned}$$

のような形に因数分解されることになるから、定理 2 を繰り返し用いれば、

$$\begin{aligned} \frac{A(s)}{B(s)} &= \frac{C_1(s)}{(s-r_1)^{m_1}}+\cdots+\frac{C_L(s)}{(s-r_L)^{m_L}} \\ &\quad +\frac{D_1(s)}{(s^2+\mu_1 s+\xi_1)^{\tau_1}}+\cdots+\frac{D_M(s)}{(s^2+\mu_M s+\xi_M)^{\tau_M}} \\ &\quad (\deg C_j<m_j,\quad \deg D_k<2\tau_k) \end{aligned}$$

のように部分分数分解されることになる。よって結局、

$$\frac{C(s)}{(s-r)^m},\quad \frac{D(s)}{(s^2+\mu s+\xi)^\tau}\quad (\deg C<m,\quad \deg D<2\tau,\quad \mu^2-4\xi<0)$$

の形の関数のラプラス逆変換を求められればよいことになる。

4 分母が一次式の巾の場合

まずは、分母が一次式の巾の形

$$F(s)=\frac{C(s)}{(s-r)^m}\quad (\deg C=l<m)$$

の場合を考える。$s-r=S$ とすれば $s=S+r$ より、

$$F(s)=\frac{C(S+r)}{S^m}=\frac{\tilde{C}(S)}{S^m}$$

のように書ける。ここで、$\tilde{C}(S) = C(S+r)$ は $C(s)$ と同じ l 次の多項式である。この $\tilde{C}$ を

$$\tilde{C}(S) = a_0 + a_1 S + \cdots + a_l S^l$$

と書くことにすれば、

$$F(s) = \frac{a_0 + a_1 S + \cdots + a_l S^l}{S^m} = \frac{a_0}{S^m} + \frac{a_1}{S^{m-1}} + \cdots + \frac{a_l}{S^{m-l}}$$

と変形できるので、$\mathcal{L}[t^{k-1}/(k-1)!] = 1/s^k$、および (3) より

$$\begin{aligned} F(s) &= a_0 \mathcal{L}\left[\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\right](S) + \cdots + a_l \mathcal{L}\left[\frac{t^{m-l-1}}{(m-l-1)!}\right](S) \\ &= \mathcal{L}\left[a_0 \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \cdots + a_l \frac{t^{m-l-1}}{(m-l-1)!}\right](s-r) \\ &= \mathcal{L}\left[e^{rt}\left\{\frac{a_0 t^{m-1}}{(m-1)!} + \cdots + \frac{a_l t^{m-l-1}}{(m-l-1)!}\right\}\right](s) \end{aligned}$$

となるので、

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^{rt}\left\{\frac{a_0 t^{m-1}}{(m-1)!} + \cdots + \frac{a_l t^{m-l-1}}{(m-l-1)!}\right\}$$

が得られる。

例えば、

$$F(s) = \frac{3s^2 - 2s + 4}{(s+2)^4}$$

の場合を考えると、$S = s + 2$ とすれば、

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{3(S-2)^2 - 2(S-2) + 4}{S^4} = \frac{3S^2 - 14S + 20}{S^4} = \frac{3}{S^2} - \frac{14}{S^3} + \frac{20}{S^4} \\ &= 3\mathcal{L}\left[\frac{t^1}{1!}\right](S) - 14\mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2!}\right](S) + 20\mathcal{L}\left[\frac{t^3}{3!}\right](S) \\ &= \mathcal{L}[3t](S) - \mathcal{L}[7t^2](S) + \mathcal{L}\left[\frac{10}{3}t^3\right](S) = \mathcal{L}\left[3t - 7t^2 + \frac{10}{3}t^3\right](s+2) \\ &= \mathcal{L}\left[e^{-2t}\left(3t - 7t^2 + \frac{10}{3}t^3\right)\right](s) \end{aligned}$$

となるので、

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = e^{-2t}\left(3t - 7t^2 + \frac{10}{3}t^3\right)$$

となるわけである。

5 分母が二次式の巾の場合の標準変形

次は、分母が二次式の巾の場合

$$F(s) = \frac{D(s)}{(s^2 + \mu s + \xi)^\tau} \quad (\deg D < 2\tau,\ \mu^2 - 4\xi < 0)$$

の形のものを考える。この場合、$s^2 + \mu s + \xi$ を変形すれば、

$$s^2 + \mu s + \xi = (s - p)^2 + q^2 \quad \left(p = -\frac{\mu}{2},\ q = \sqrt{\xi - \frac{\mu^2}{4}} > 0\right)$$

と書き換えることができ、

$$F(s) = \frac{D(s)}{\{(s - p)^2 + q^2\}^\tau}$$

となる。この式で $s = p + qS$ とすれば、

$$F(s) = \frac{D(p + qS)}{(q^2S^2 + q^2)^\tau} = \frac{1}{q^{2\tau}}\frac{D(p + qS)}{(S^2 + 1)^\tau} = \frac{\tilde{D}(S)}{(S^2 + 1)^\tau}$$

となる。ここで、$\tilde{D}(S) = D(p + qS)/q^{2\tau}$ は $D(s)$ と同じ次数の多項式である。

この最後の S に関する式のラプラス逆変換 $g(t)$ が

$$\frac{\tilde{D}(S)}{(S^2 + 1)^\tau} = \mathcal{L}[g(t)](S)$$

と求まれば、$S=(s-p)/q$ より、$(3),\,(6)$ を用いて変形すれば、

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[g(t)]\left(\frac{s-p}{q}\right) = q\,\frac{1}{q}\mathcal{L}[g(t)]\left(\frac{s-p}{q}\right) \\ &= q\mathcal{L}[g(qt)](s-p) = \mathcal{L}[qg(qt)](s-p) = \mathcal{L}[qe^{pt}g(qt)](s) \end{aligned}$$

と変形でき、よって $\mathcal{L}^{-1}[F]=qe^{pt}g(qt)$ となる。つまり $g(t)$、すなわち

$$\tilde{F}(s)=\frac{\tilde{D}(s)}{(s^2+1)^{\tau}} \quad (\deg\tilde{D}<2\tau) \tag{7}$$

の形の関数のラプラス逆変換を求めればいいことになる。

例えば、

$$F(s)=\frac{s^4+2s-5}{(s^2+2s+3)^3}$$

の場合を考えると、

$$F(s)=\frac{s^4+2s-5}{\{(s+1)^2+2\}^3}$$

なので、$s+1=\sqrt{2}S$ とすると

$$F(s)=\frac{(\sqrt{2}S-1)^4+2(\sqrt{2}S-1)-5}{(2S^2+2)^3}$$

となり、この分子を展開すれば

$$\begin{aligned} &(\sqrt{2}S-1)^4+2(\sqrt{2}S-1)-5 \\ &\quad = (4S^4-8\sqrt{2}S^3+12S^2-4\sqrt{2}S+1)+(2\sqrt{2}S-2)-5 \\ &\quad = 4S^4-8\sqrt{2}S^3+12S^2-2\sqrt{2}S-6 \end{aligned}$$

なので、

$$F(s)=\frac{2S^4-4\sqrt{2}S^3+6S^2-\sqrt{2}S-3}{4(S^2+1)^3}$$

となる。これが、$\mathcal{L}[g(t)](S)$ となれば、

$$\mathcal{L}[g(t)](S) = \mathcal{L}[g(t)]\left(\frac{s+1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\mathcal{L}[g(\sqrt{2}t)](s+1) = \mathcal{L}[\sqrt{2}e^{-t}g(\sqrt{2}t)](s)$$

となり、よって、

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = \sqrt{2}e^{-t}g(\sqrt{2}t)$$

となるわけである。

(7) をさらに変形して、よりシンプルな形のものに帰着することもできる。(7) の分子の $\tilde{D}(s)$ を偶数次と奇数次の項に分けて、

$$\begin{aligned}\tilde{D}(s) &= (b_0 + b_1 s^2 + \cdots + b_\alpha s^{2\alpha}) + (c_0 s + c_1 s^3 + \cdots + c_\beta s^{2\beta+1}) \\ &= D_1(s^2) + sD_2(s^2) \\ (D_1(X) &= b_0 + b_1 X + \cdots + b_\alpha X^\alpha, \quad D_2(X) = c_0 + c_1 X + \cdots + c_\beta X^\beta)\end{aligned}$$

のようにすれば、$\tilde{F}(s)$ は、$s^2+1 = Y$ とすることによって、

$$\begin{aligned}\tilde{F}(s) &= \frac{D_1(s^2) + sD_2(s^2)}{(s^2+1)^\tau} = \frac{D_1(s^2)}{(s^2+1)^\tau} + \frac{sD_2(s^2)}{(s^2+1)^\tau} \\ &= \frac{D_1(Y-1)}{Y^\tau} + s\,\frac{D_2(Y-1)}{Y^\tau} = \frac{\tilde{D}_1(Y)}{Y^\tau} + s\,\frac{\tilde{D}_2(Y)}{Y^\tau} \\ &= \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 Y + \cdots + \tilde{b}_\alpha Y^\alpha}{Y^\tau} + s\,\frac{\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 Y + \cdots + \tilde{c}_\beta Y^\beta}{Y^\tau} \\ &= \sum_{j=0}^{\alpha} \frac{\tilde{b}_j}{Y^{\tau-j}} + s\sum_{k=0}^{\beta} \frac{\tilde{c}_k}{Y^{\tau-k}} = \sum_{j=0}^{\alpha} \frac{\tilde{b}_j}{(s^2+1)^{\tau-j}} + \sum_{k=0}^{\beta} \frac{\tilde{c}_k s}{(s^2+1)^{\tau-k}}\end{aligned}$$

と変形できるので、このように考えれば、結局

$$F_k(s) = \frac{1}{(s^2+1)^{k+1}}, \quad G_k(s) = \frac{s}{(s^2+1)^{k+1}} \quad (k \geq 0) \tag{8}$$

の形の関数の逆変換を求めればいいことになる。

例えば、前の例で言えば、分子の $2S^4 - 4\sqrt{2}S^3 + 6S^2 - \sqrt{2}S - 3$ を、奇数次、偶数次に分けて

$$(2S^4 + 6S^2 - 3) - S(4\sqrt{2}S^2 + \sqrt{2})$$

とし、さらに $S^2 + 1 = Y$ を代入して

$$\begin{aligned} &\{2(Y-1)^2 + 6(Y-1) - 3\} - S\{4\sqrt{2}(Y-1) + \sqrt{2}\} \\ &= (2Y^2 + 2Y - 7) - \sqrt{2}S(4Y - 3) \end{aligned}$$

と変形できるので、

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2Y^2 + 2Y - 7}{4Y^3} - \frac{\sqrt{2}S(4Y-3)}{4Y^3} \\ &= \frac{1}{2Y} + \frac{1}{2Y^2} - \frac{7}{4Y^3} - \frac{\sqrt{2}S}{Y^2} + \frac{3\sqrt{2}S}{4Y^3} \\ &= \frac{1}{2(S^2+1)} + \frac{1}{2(S^2+1)^2} - \frac{7}{4(S^2+1)^3} - \frac{\sqrt{2}S}{(S^2+1)^2} + \frac{3\sqrt{2}S}{4(S^2+1)^3} \end{aligned}$$

という形になる、といった具合である。

よって、以後この $F_k(s)$, $G_k(s)$、あるいは (7) の形のものの逆変換を考えていくことにする。

6 複素数の範囲での部分分数分解

$s^2 + 1$ は実数の範囲では因数分解できないが、複素数の範囲では $(s - i)(s + i)$ と因数分解できるから、それによってさらに 1 次式の巾の分母の形に部分分数分解できることになる。なお、この場合は、F_k, G_k の形に分けてからではなく、(7) の形で行う方が効率的であるし、F_k, G_k に分けても易しくなるわけではない。

例えば、

$$F(s) = \frac{s^3 - 2s^2 + 4}{(s^2+1)^2}$$

の場合を考える。定理 2 により、

$$F(s) = \frac{s^3 - 2s^2 + 4}{(s+i)^2(s-i)^2} = \frac{as+b}{(s+i)^2} + \frac{cs+d}{(s-i)^2} \tag{9}$$

とおくことができる。ただし、この場合定数 a, b, c, d は複素数であることに注意する。(9) の右辺を通分すると、その分子は、

$$\begin{aligned}
&(as+b)(s-i)^2 + (cs+d)(s+i)^2 \\
&= (as+b)(s^2 - 2si - 1) + (cs+d)(s^2 + 2si - 1) \\
&= as^3 + (-2ai + b)s^2 + (-a - 2bi)s - b \\
&\quad + cs^3 + (2ci + d)s^2 + (-c + 2di)s - d
\end{aligned}$$

と展開されるので、元の式の分子と係数比較すれば、

$$\begin{cases}
a + c & = 1 \\
-2ai + b + 2ci + d & = -2 \\
-a - 2bi - c + 2di & = 0 \\
-b - d & = 4
\end{cases} \tag{10}$$

という連立方程式を得る。これを解いて a, b, c, d を求めればよいが、2 本目、3 本目の式を

$$-2i(a-c) + (b+d) = -2, \quad -(a+c) - 2i(b-d) = 0$$

と変形すれば、1 本目、4 本目の式より

$$-2i(a-c) = 2, \quad -2i(b-d) = 1$$

となるので、

$$a - c = i, \quad b - d = \frac{i}{2}$$

となる。これと 1 本目、4 本目の式を組み合わせれば、結局

$$a = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \quad b = -2 + \frac{i}{4}, \quad c = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \quad d = -2 - \frac{i}{4}$$

が得られる。

なお、この結果を見ると $c = \bar{a},\ d = \bar{b}$ であることがわかるが、これは実は (9) から導くこともできる。$F(s)$ は元々実数係数の有理関数なので、(9) の共役を考えれば、共役の性質

$$\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}, \quad \overline{z-w} = \bar{z}-\bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

を用いることにより以下のようになる:

$$\overline{F(s)} = F(s) = \overline{\frac{as+b}{(s+i)^2} + \frac{cs+d}{(s-i)^2}} = \frac{\bar{a}s+\bar{b}}{(s-i)^2} + \frac{\bar{c}s+\bar{d}}{(s+i)^2}$$

これも $F(s)$ の部分分数分解であり、この係数は一意に決まるので、(9) と比較すれば、

$$\bar{a}s+\bar{b} = cs+d, \quad \bar{c}s+\bar{d} = as+b$$

となり、よって $c = \bar{a},\ d = \bar{b}$ がいえる。また、このとき F は、

$$F(s) = \frac{as+b}{(s+i)^2} + \frac{\bar{a}s+\bar{b}}{(s-i)^2} = \frac{as+b}{(s+i)^2} + \overline{\left\{\frac{as+b}{(s+i)^2}\right\}} = 2\Re\frac{as+b}{(s+i)^2}$$

となることになる。最後の分数式は

$$\frac{as+b}{(s+i)^2} = \frac{(as+b)(s-i)^2}{(s^2+1)^2} = \frac{as^3+(-2ai+b)s^2+(-a-2bi)s-b}{(s^2+1)^2}$$

となるので、元の式と比較すれば、

$$\Re\{as^3+(-2ai+b)s^2+(-a-2bi)s-b\} = \frac{s^3}{2} - s^2 + 2$$

となるが、$\Re(iz) = -\Im z$ なので、

$$\Re a = \frac{1}{2}, \quad 2\Im a + \Re b = -1, \quad -\Re a + 2\Im b = 0, \quad -\Re b = 2$$

となるので、よって、

$$\Re a = \frac{1}{2}, \quad \Im a = \frac{1}{2}, \quad \Re b = -2, \quad \Im b = \frac{1}{4}$$

つまり

$$a = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \quad b = -2 + \frac{i}{4}$$

と得られる。こちらの方が (10) に比べて多少は式の処理はやさしく見えなくもない。

しかし、いずれにせよ、この方法では分母の次数が大きい場合、例えば $(s^2+1)^5$ のような場合は、計算量が非常に多く、あまり易しい計算方法ではない。

7 漸化式

F_k, G_k のラプラス逆変換を

$$\mathcal{L}^{-1}[F_k] = f_k(t), \quad \mathcal{L}^{-1}[G_k] = g_k(t)$$

とし、この f_k, g_k に対する漸化式を作って、そこから f_k, g_k を順に計算する、という方法もある。漸化式にもいくつかあり、それらをここで紹介し、計算量の比較などを行ってみる。

まずは、(4) を利用したものを考える。

$$\mathcal{L}[f_k] = \frac{1}{(s^2+1)^{k+1}}, \quad \mathcal{L}[g_k] = \frac{s}{(s^2+1)^{k+1}}$$

であるので、(4) より、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[tf_k] &= -\frac{d}{ds}\frac{1}{(s^2+1)^{k+1}} = \frac{2(k+1)s}{(s^2+1)^{k+2}} = (2k+2)G_{k+1}, \\
\mathcal{L}[tg_k] &= -\frac{d}{ds}\frac{s}{(s^2+1)^{k+1}} = -\frac{1}{(s^2+1)^{k+1}} + \frac{2(k+1)s^2}{(s^2+1)^{k+2}} \\
&= -F_k + \frac{2(k+1)(s^2+1) - 2(k+1)}{(s^2+1)^{k+2}} \\
&= -F_k + 2(k+1)F_k - 2(k+1)F_{k+1} = (2k+1)F_k - (2k+2)F_{k+1}
\end{aligned}$$

よって、

$$tf_k = (2k+2)g_{k+1}, \quad tg_k = (2k+1)f_k - (2k+2)f_{k+1}$$

となるので、よって

$$f_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2}f_k - \frac{t}{2k+2}g_k, \quad g_{k+1} = \frac{t}{2k+2}f_k \tag{11}$$

が得られる。$f_0,\, g_0$ は、

$$f_0 = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin t, \quad g_0 = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \cos t$$

であるから、(11) を用いて順に、$f_1,\, g_1,\, f_2,\, g_2$ 等を計算できる。なお、(11) の係数の分母を消すために、この式の両辺に $2^{k+1}(k+1)!$ をかけると、

$$2^{k+1}(k+1)!f_{k+1} = (2k+1)2^k k!f_k - t2^k k!g_k, \quad 2^{k+1}(k+1)!g_{k+1} = t2^k k!f_k$$

となるので、$\hat{f}_k = 2^k k!f_k,\, \hat{g}_k = 2^k k!g_k$ とすれば、

$$\hat{f}_{k+1} = (2k+1)\hat{f}_k - t\hat{g}_k, \quad \hat{g}_{k+1} = t\hat{f}_k \tag{12}$$

となり、(11) より多少式はやさしくなる。$\hat{f}_0 = f_0,\, \hat{g}_0 = g_0$ より、具体的に $\hat{f}_k,\, \hat{g}_k$ を求めてみると、

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1 &= \hat{f}_0 - t\hat{g}_0 = \sin t - t\cos t, \\
\hat{g}_1 &= t\hat{f}_0 = t\sin t, \\
\hat{f}_2 &= 3\hat{f}_1 - t\hat{g}_1 = 3\sin t - 3t\cos t - t^2\sin t, \\
\hat{g}_2 &= t\hat{f}_1 = t\sin t - t^2\cos t, \\
\hat{f}_3 &= 5\hat{f}_2 - t\hat{g}_2 = 15\sin t - 15t\cos t - 6t^2\sin t + t^3\cos t, \\
\hat{g}_3 &= t\hat{f}_2 = 3t\sin t - 3t^2\cos t - t^3\sin t, \\
\hat{f}_4 &= 7\hat{f}_3 - t\hat{g}_3 = 105\sin t - 105t\cos t - 45t^2\sin t + 10t^3\cos t + t^4\sin t, \\
\hat{g}_4 &= t\hat{f}_3 = 15t\sin t - 15t^2\cos t - 6t^3\sin t + t^4\cos t
\end{aligned}$$

のようになる。

さらに、(12) から $\hat{g}_k$, あるいは $\hat{f}_k$ を消去して、3 項漸化式を導くこともできる。(12) より、

$$\hat{f}_{k+2} = (2k+3)\hat{f}_{k+1} - t\hat{g}_{k+1} = (2k+3)\hat{f}_{k+1} - t^2\hat{f}_k, \tag{13}$$
$$\hat{g}_{k+2} = t\hat{f}_{k+1} = (2k+1)t\hat{f}_k - t^2\hat{g}_k = (2k+1)\hat{g}_{k+1} - t^2\hat{g}_k \tag{14}$$

のようになる。f_k, g_k の一方のみを計算したい場合は、これらを用いる方が多少計算は速くなる。$\hat{f}_0 = \sin t$, $\hat{f}_1 = \sin t - t\cos t$ であるので、

$$\begin{aligned}
\hat{f}_2 &= 3\hat{f}_1 - t^2\hat{f}_0 = 3\sin t - 3t\cos t - t^2\sin t, \\
\hat{f}_3 &= 5\hat{f}_2 - t^2\hat{f}_1 = 5(3\sin t - 3t\cos t - t^2\sin t) - t^2(\sin t - t\cos t) \\
&= 15\sin t - 15t\cos t - 6t^2\sin t + t^3\cos t, \\
\hat{f}_4 &= 7\hat{f}_3 - t^2\hat{f}_2 \\
&= 7(15\sin t - 15t\cos t - 6t^2\sin t + t^3\cos t) - t^2(3\sin t - 3t\cos t - t^2\sin t) \\
&= 105\sin t - 105t\cos t - 45t^2\sin t + 10t^3\cos t + t^4\sin t
\end{aligned}$$

のように計算できる。

さて、漸化式は (12) 以外にも成り立つ。例えば、(5) を用いれば、

$$\mathcal{L}[f_k'] = s\mathcal{L}[f_k] - f_k(0)$$

となるが、$k \geq 0$ に対して f_k は t の奇関数である ((13) と $\hat{f}_0$, $\hat{f}_1$ より帰納的に示すことができる) から $f_k(0) = 0$ であり、

$$s\mathcal{L}[f_k] = s\frac{1}{(s^2+1)^{k+1}} = \mathcal{L}[g_k]$$

なので、

$$f_k' = g_k \quad (k \geq 0) \tag{15}$$

がわかる。同様に (5) より

$$\mathcal{L}[g_k'] = s\mathcal{L}[g_k] - g_k(0)$$

となるが、(11) より $k \geq 1$ ならば $g_k(0) = 0$ であることががわかるので、

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}[g_k] &= \frac{s^2}{(s^2+1)^{k+1}} = \frac{(s^2+1)-1}{(s^2+1)^{k+1}} = \frac{1}{(s^2+1)^k} - \frac{1}{(s^2+1)^{k+1}} \\ &= \mathcal{L}[f_{k-1}] - \mathcal{L}[f_k] \end{aligned}$$

より、

$$g_k' = f_{k-1} - f_k \quad (k \geq 1) \tag{16}$$

が成り立つ。しかし、この (15) の両辺の添え字は同じであるし、(16) にも添え字の同じものが含まれているので、この 2 本から f_k, g_k を順に計算できる形にはなっていないが、これらに (11) を組み合わせることで、一応順に計算できるような形に変形できる。例えば、(15), (16) に (11) を代入して、

$$\begin{aligned} f_k' &= \frac{t}{2k} f_{k-1}, \\ g_k' &= f_{k-1} - \frac{2k-1}{2k} f_{k-1} + \frac{t}{2k} g_{k-1} = \frac{1}{2k}(f_{k-1} + t g_{k-1}) \end{aligned}$$

または、$\hat{f}_k$, $\hat{g}_k$ で書き直した式:

$$\hat{f}_k' = t\hat{f}_{k-1}, \quad \hat{g}_k' = \hat{f}_{k-1} + t\hat{g}_{k-1} \tag{17}$$

を得ることができる。しかし、この式から f_k, g_k を計算するには、積分計算が必要になるが、そこには $t^j \sin t$, $t^j \cos t$ の形の積分が含まれるので、必ずしも計算は易しくはない。

例えば、

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &= \int_0^t x\hat{f}_0(x)dx = \int_0^t x \sin x dx = -t\cos t + \int_0^t \cos x dx \\ &= -t\cos t + \sin t, \\ \hat{g}_1 &= \int_0^t (\hat{f}_0(x) + x\hat{g}_0(x))dx = \int_0^t (\sin x + x\cos x)dx = \int_0^t (x\sin x)' dx \\ &= t\sin t, \\ \hat{f}_2 &= \int_0^t x\hat{f}_1(x)dx = \int_0^t (x\sin x - x^2\cos x)dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t x\sin x dx - \left(t^2\sin t - \int_0^t 2x\sin x dx\right)\\
&= -t^2\sin t + \int_0^t 3x\sin x dx = -t^2\sin t - 3t\cos t + \int_0^t 3\cos x dx\\
&= -t^2\sin t - 3t\cos t + 3\sin t,\\
\hat{g}_2 &= \int_0^t (\hat{f}_1(x) + x\hat{g}_1(x))dx = \int_0^t (\sin x - x\cos x + x^2\sin x)dx\\
&= -t^2\cos t + \int_0^t (\sin x + x\cos x)dx = -t^2\cos t + \int_0^t (x\sin x)' dx\\
&= -t^2\cos t + t\sin t
\end{aligned}
$$

のようになる。

最後にもうひとつの漸化式を紹介する。

$$\mathcal{L}[f_{k+1}] = \frac{1}{(s^2+1)^{k+2}} = \frac{1}{s^2+1}\mathcal{L}[f_k] = \mathcal{L}[\sin t]\mathcal{L}[f_k], \tag{18}$$

$$\mathcal{L}[g_{k+1}] = \frac{s}{(s^2+1)^{k+2}} = \frac{1}{s^2+1}\mathcal{L}[g_k] = \mathcal{L}[\sin t]\mathcal{L}[g_k], \tag{19}$$

となるが、以下の公式を使えばここから漸化式が得られる:

$$\mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g] = \mathcal{L}[f*g] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-y)g(y)dy\right] \tag{20}$$

この

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-y)g(y)dy = \int_0^t f(y)g(t-y)dy$$

は 畳み込み 演算と呼ばれる。この公式 (20) は、形式的に以下のように積分の順序交換と置換積分を行うことで得られる:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}[f*g](s)\\
&= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(t-y)g(y)dy\right)dt = \int_0^\infty \left(\int_y^\infty e^{-st}f(t-y)g(y)dt\right)dy\\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(y+x)}f(x)dx\right)g(y)dy = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx\right)e^{-sy}g(y)dy\\
&= \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx\int_0^\infty e^{-sy}g(y)dy = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]
\end{aligned}
$$

よって、(18), (19), (20) により、

$$\mathcal{L}[f_{k+1}] = \mathcal{L}[f_k * \sin t], \quad \mathcal{L}[g_{k+1}] = \mathcal{L}[g_k * \sin t]$$

となるので、畳み込み演算による漸化式

$$f_{k+1} = f_k * \sin t, \quad g_{k+1} = g_k * \sin t \tag{21}$$

が得られる。これは一見シンプルでわかりやすいので、これを漸化式として f_k, g_k は順次計算できる、と書いてある本もあるようであるが、実際にはこれを用いて計算するのもそれほど易しくはない。

$$\begin{aligned}
f_1 &= f_0 * \sin t = \int_0^t f_0(y)\sin(t-y)dy = \int_0^t \sin y \sin(t-y)dy \\
&= \int_0^t \frac{1}{2}\{\cos(2y-t) - \cos t\}dy = \left[\frac{\sin(2y-t)}{4}\right]_{y=0}^{y=t} - \frac{t}{2}\cos t \\
&= \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t, \\
f_2 &= f_1 * \sin t = \int_0^t f_1(y)\sin(t-y)dy = \int_0^t \frac{1}{2}(\sin y - y\cos y)\sin(t-y)dy \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t\right) + \int_0^t \frac{y}{4}\{\sin(2y-t) - \sin t\}dy \\
&= \frac{1}{4}\sin t - \frac{t}{4}\cos t + \left[-\frac{y\cos(2y-t)}{8}\right]_{y=0}^{y=t} + \int_0^t \frac{1}{8}\cos(2y-t)dy - \frac{t^2}{8}\sin t \\
&= \frac{1}{4}\sin t - \frac{3t}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t - \frac{t^2}{8}\sin t = \frac{3}{8}\sin t - \frac{3t}{8}\cos t - \frac{t^2}{8}\sin t
\end{aligned}$$

見てわかる通り、三角関数の積を和に直したり、部分積分が入ったりと結構面倒である。

結局、漸化式で具体的に f_k, g_k を求めるには、(12), または (13), (14) を用いるのがよさそうである。もちろん、(15), (16) や (21) なども全く意味がないわけではなく、これが使われる場面もちゃんとあるとは思う。

8 未定係数法

最後に、未定係数法を用いた計算を紹介する。これまでの計算からもわかるように、f_k, g_k は $\cos t$, $\sin t$ の t^j 倍の和の形で表される。より詳しくは、[2] で紹介したように、

$$\mathcal{L}[t^k \cos t] = \frac{k!\Re(s+i)^{k+1}}{(s^2+1)^{k+1}}, \quad \mathcal{L}[t^k \sin t] = \frac{k!\Im(s+i)^{k+1}}{(s^2+1)^{k+1}} \tag{22}$$

であり、これらの分子はそれぞれ $(k+1)$ 次式、k 次式で、ひとつおきの次数の項しか現れない。よって特に

- 奇関数 $t^{2m}\sin t$, $t^{2m-1}\cos t$ のラプラス変換は偶関数
- 偶関数 $t^{2m}\cos t$, $t^{2m-1}\sin t$ のラプラス変換は奇関数

となる。よって、f_k, g_k は以下のような形に表されることがわかる:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(s^2+1)^{2m+1}} &= \mathcal{L}[a_{2m}t^{2m}\sin t + a_{2m-1}t^{2m-1}\cos t + \cdots + a_0 \sin t],\\
\frac{1}{(s^2+1)^{2m}} &= \mathcal{L}[b_{2m-1}t^{2m-1}\cos t + b_{2m-2}t^{2m-2}\sin t + \cdots + b_0 \sin t],\\
\frac{s}{(s^2+1)^{2m+1}} &= \mathcal{L}[c_{2m}t^{2m}\cos t + c_{2m-1}t^{2m-1}\sin t + \cdots + c_0 \cos t],\\
\frac{s}{(s^2+1)^{2m}} &= \mathcal{L}[d_{2m-1}t^{2m-1}\sin t + d_{2m-2}t^{2m-2}\cos t + \cdots + d_0 \cos t]
\end{aligned}$$

未定係数法は、これを利用して a_j, b_j 等を未定係数として代入と比較によりその係数を求める、という方法である。これなら漸化式のように順に求める必要はなく、f_k, g_k を直接求められる。例として f_4 を考えてみる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f_4] &= \frac{1}{(s^2+1)^5} = \mathcal{L}[a_4t^4\sin t + a_3t^3\cos t + a_2t^2\sin t + a_1 t\cos t + a_0\sin t]\\
&= a_4\frac{4!\Im(s+i)^5}{(s^2+1)^5} + a_3\frac{3!\Re(s+i)^4}{(s^2+1)^4} + a_2\frac{2!\Im(s+i)^3}{(s^2+1)^3} + a_1\frac{1!\Re(s+i)^2}{(s^2+1)^2}\\
&\quad + a_0\frac{0!\Im(s+i)}{s^2+1}\\
&= \frac{24a_4(5s^4-10s^2+1)}{(s^2+1)^5} + \frac{6a_3(s^4-6s^2+1)}{(s^2+1)^4} + \frac{2a_2(3s^2-1)}{(s^2+1)^3}
\end{aligned}$$

$$+\frac{a_1(s^2-1)}{(s^2+1)^2}+\frac{a_0}{s^2+1}$$

ここで、$Y=s^2+1$ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{Y^5} &= \frac{24a_4\{5(Y-1)^2-10(Y-1)+1\}}{Y^5}+\frac{6a_3\{(Y-1)^2-6(Y-1)+1\}}{Y^4}\\ &\quad+\frac{2a_2\{3(Y-1)-1\}}{Y^3}+\frac{a_1(Y-2)}{Y^2}+\frac{a_0}{Y}\\ &= 24a_4\left(\frac{5}{Y^3}-\frac{20}{Y^4}+\frac{16}{Y^5}\right)+6a_3\left(\frac{1}{Y^2}-\frac{8}{Y^3}+\frac{8}{Y^4}\right)+2a_2\left(\frac{3}{Y^2}-\frac{4}{Y^3}\right)\\ &\quad+a_1\left(\frac{1}{Y}-\frac{2}{Y^2}\right)+\frac{a_0}{Y}\\ &= \frac{384a_4}{Y^5}+\frac{-480a_4+48a_3}{Y^4}+\frac{120a_4-48a_3-8a_2}{Y^3}+\frac{6a_3+6a_2-2a_1}{Y^2}\\ &\quad+\frac{a_1+a_0}{Y}\end{aligned}$$

となるので、この両辺の係数を比較して、

$$\begin{cases}384a_4 &= 1,\\ -480a_4+48a_3 &= 0,\\ 120a_4-48a_3-8a_2 &= 0,\\ 6a_3+6a_2-2a_1 &= 0,\\ a_1+a_0 &= 0\end{cases}\tag{23}$$

が得られ、この連立方程式を解けば、

$$\begin{aligned}a_4 &= \frac{1}{384},\\ a_3 &= 10a_4=\frac{5}{192},\\ a_2 &= 15a_4-6a_3=\frac{5}{128}-\frac{5}{32}=-\frac{15}{128},\\ a_1 &= 3a_3+3a_2=\frac{5}{64}-\frac{45}{128}=-\frac{35}{128},\\ a_0 &= -a_1=\frac{35}{128}\end{aligned}$$

となるので、よって、

$$f_4 = \frac{t^4}{384}\sin t+\frac{5t^3}{192}\cos t-\frac{15t^2}{128}\sin t-\frac{35t}{128}\cos t+\frac{35}{128}\sin t$$

$$= \frac{1}{384}(t^4 \sin t + 10t^3 \cos t - 45t^2 \sin t - 105t \cos t + 105 \sin t)$$

となる。

最後の連立方程式 (23) は、5 本の方程式なので大変そうに見えるが、実際には上から順に一つずつ未知数が求まっていくし、下に行っても未知数の数がそれほど増えないので、それほど大変ではない。しかし、そこに至るまでの計算量が多少あるので、7 節の (13) の計算に比べると、やや計算量が多いように思う。

9 最後に

工学部向けのラプラス変換の教科書は色々あるが、有理関数のラプラス逆変換の計算は、だいたい本稿で紹介したような方法、すなわち部分分数分解と、標準形への変換によって求める方法が紹介されていることが多い。

ただ、ここで紹介した f_k, g_k の計算については、どの方法でも多少計算量があるためか、小さい k の場合の計算のみを紹介し一般の k に対する計算についてはちゃんとは書いてないものも多いようであるので、ここでちゃんと紹介し、いくつかの計算方法を比較してみたのは、個人的な確認としても、また講義の補足としても多少は意味があったのではないかと思う。

なお、実はこの教科書 [1] は、ラプラス変換以外に他の分野の話も含んでいて、特に複素関数論も扱っているので、そのため 2 節でも少し触れた複素関数論の留数計算を利用したラプラス逆変換の計算方法も紹介している。これについては、また別の機会に考察したいと思う。

参考文献

[1] 矢野健太郎、石原繁「基礎解析学 改訂版」裳華房 (1993)

[2] 竹野茂治、「$t \sin t$ のラプラス変換」(2008)