2 変数の周期関数に関するある性質について

竹野 茂治 *

(平成 24 年 10 月 31 日受理)

On a feature for some periodic function of two variables

Shigeharu TAKENO*

For a real valued periodic function ϕ with period p, the function of two variables $F(\phi(x+y), \phi(x-y))$ has the same period p for x and for y. But basic periods for x and for y may be smaller than p. In this paper, we explain a conjecture whether these periods may differ, introduce some results about it, and some counter-examples in cases of complex valued functions and discontinuous functions.

Keywords: periodic function of two variables, real valued functions, complex valued functions, counter examples, continuous functions, discontinuous functions

1 はじめに

これまで, 時間周期的な外力のついた単独保存則方程式の周期解の性質について考察してきた [1], [2]. 単独保存則方程式では, 特に進行波型 $u = \phi(x - st)$ の周期解に対して, 粘性項のあるなしで周期解の様子も大きく異なることなどを示すことができたが, このような手法を気体の方程式のような連立保存則方程式系に用いるためには, 進行波解よりも少し自由度の高い解が必要になる. そこで, 2 階の波動方程式に対するダランベール解からの類推として,

$$F(\phi(x - st), \psi(x + st))$$

のような両方向への進行波を含む形の解を用いて, 単独保存則の場合と同様の結果が得られないか研究を進めているところであるが, その中で次のような疑問に行きあたった:

問題 1 $\phi = \phi(t)$ が周期 p (> 0) の周期関数, $F(X, Y)$ が $\phi(R) \times \phi(R)$ 上の連続関数のとき, x, y の 2 変数関数

$$f(x, y) = F(\phi(x + y), \phi(x - y)) \tag{1}$$

も x, y に関して周期 p を持つ周期関数となるが, その x に関する基本周期と y に関する基本周期は常に等しいか. もしずれることがあるとすれば, それはどのような条件の元で起きるか.

本稿では, この問題に関連するいくつかの結果と, この問題の見た目以上の難しさを示すような反例などを紹介する.

* 情報電子工学科 准教授

2　予想と反例

一般に, (1) の $f(x,y)$ の x, y の基本周期は p/n, p/m (n, m は自然数) の形になる. よって問題 1 は, この n と m が異なる場合があるかどうか, を意味する.

この問題 1 に関して, 色々な具体例で検証してみたが, ϕ が実数値連続関数の場合は, 今のところ 2 つの基本周期がずれるような例は見つかってはいない. よって, もしかすると以下のようなことが成り立つのではないかと予想している.

予想 2 ϕ が実数値連続関数の場合, $f(x,y)$ の x の基本周期と y の基本周期は等しい.

実際に, この予想 2 の特別な場合として, 以下の事実を証明することができた.

命題 3 ϕ が実数値連続関数の場合, $f(x,y)$ が x のみの関数ならば $f(x,y)$ は定数でなければならない.

この命題 3 は, もちろん y についても言えるが, これはすなわち, 0 という特別な周期については予想 2 が成り立つことを示している.

その一方で, ϕ に複素数値を許すと, 基本周期がずれるような例や命題 3 の反例は簡単に見出せる. 例えば,

$$\phi(t) = e^{it}, \quad F(X,Y) = X^2Y$$

とすると,

$$f(x,y) = e^{2i(x+y)}e^{i(x-y)} = e^{3ix}e^{iy}$$

となるので, x に関しては $2\pi/3$, y に関しては 2π がそれぞれ基本周期となる. 同様に, 同じ ϕ に対して $F = XY$ とすれば, それが命題 3 の反例となることはすぐにわかる.

また, ϕ が実数値であっても不連続性を許すと, やはり基本周期がずれる例は容易に構成できる.

例えば, ϕ を

$$\phi(t) = t \quad (0 \leq t < 1), \qquad \phi(t+1) = \phi(t) \quad (-\infty < t < \infty),$$

すなわち $[0,1)$ 上の t を周期 1 に周期拡張した不連続関数とする. このとき, ϕ はすべての t に対して

$$\phi(t) \equiv t \pmod 1$$

となるが,

$$2\phi(x+y) + \phi(x-y) \equiv 2(x+y) + (x-y) \equiv 3x + y \pmod 1 \tag{2}$$

なので, 例えば $F(X,Y) = \sin 2\pi(2X+Y)$ とすれば, (2) より

$$f(x,y) = \sin 2\pi(3x+y)$$

となるので, x に関して $1/3$, y に関しては 1 が基本周期となる例になる. 同様に, 同じ ϕ に対して $F = \sin 2\pi(X+Y)$ とすれば, 命題 3 の反例も作れる.

しかし, ϕ が実数値連続関数の場合は, このような周期がずれる例は今のところ見つけることができていない.

なお, $f(x,y)$ の x に関する基本周期と y に関する基本周期については, 次のことが容易にわかる.

命題 4 ϕ の基本周期を $p\ (>0)$, $f(x,y)$ の x の基本周期を p/m, y の基本周期を p/n (m, n は自然数) とすると, m, n は共に奇数であるか, または共に偶数である.

この命題 4 は, ϕ が実数値であるかどうか, 連続であるかどうかに関わらず成り立つが, 逆にそのような一般の ϕ に対しては, 周期に関する共通の性質はこの程度しか得られない. 実際, 任意の奇数の m, n, または任意の偶数の m, n に対して, p/m, p/n が x, y に関する基本周期になるような例は, $\phi(t)=e^{it}$, $F(X,Y)=X^\alpha Y^\beta$ の形の式を用いて簡単に作ることができるので, 複素数値も許した一般の ϕ に関する性質としては命題 4 より強いことは言えないことがわかる.

命題 4 より強い主張である予想 2 は, ϕ の実数値や連続性を外すと周期がずれる反例ができてしまうので, 逆に予想 2 の考察には ϕ の実数値性や連続性を必要とするような議論をしなければならないことになる. 命題 3 の証明はまさにそのような議論を行うのであるが, 予想 2 の方はさらに難しいので, 位相力学系や位相幾何学, 実解析学などの理論が必要になるかもしれない. また, もしかすると, そちらの分野の人から見れば案外容易な問題である可能性もあるが, その点についても現在は不明である.

3 証明

まず, 命題 3 の証明を紹介する.

命題 3 の証明 まず ϕ の値域を $\phi(R)=[m,M]$ とすると, F は $I=[m,M]\times[m,M]$ 上の連続関数となる. 仮定より,

$$F(\phi(x+y),\phi(x-y))=g(x)$$

であるとし, このとき g が定数, すなわち $F(X,Y)$ が I 上定数となることを示す.

今 F に代入する I 上の点 $(\phi(x+y),\phi(x-y))$ の, x を固定して y を動かしてできる I 内の平面曲線を C_x と書くこととする:

$$C_x=\{(X,Y)=(\phi(x+y),\phi(x-y)):\ 0\le y\le p\}\quad(\subset I)$$

ϕ は周期関数なので, この C_x は I 内の閉曲線となる. しかも, C_x は X に関しても Y に関しても m から M まで動くので, 正方形である I の 4 辺 (境界) を B_n, B_s, B_w, B_e とすると, C_y には必ずこの 4 辺との共有点がそれぞれ存在する (ただしその 4 つがすべて異なるとは限らない).

次に, C_x 全体が正方形 I 全体を埋めつくしていることを示す. ϕ は連続なので, 任意の $A,B\in[m,M]$ に対して, $(\phi(s),\phi(t))=(A,B)$ となる s, t が存在する $(0\le s,t\le p)$. ここで $x=(s+t)/2$, $y=(s-t)/2$ とすれば $x+y=s$, $x-y=t$ なので,

$$(\phi(x+y),\phi(x-y))=(\phi(s),\phi(t))=(A,B)$$

となり I の任意の点 (A,B) が C_x 上に乗ることになるから C_x 全体は I 全体を埋めつくすことがわかる:

$$\bigcup_{x\in R} C_x = I$$

なお, ϕ の周期性より $C_x = C_{x+p}$ となるので, x の範囲は $0 \leq x \leq p$ のみを考えればよいことも容易にわかる.

任意の x, z に対して, C_x と C_z が少なくとも 1 点で交わることを示すこともできる. 上に見たように, 各 C_x は境界の 4 辺との共有点を必ず持つから, その交点を結ぶ C_x の部分曲線が I の対辺 B_n と B_s を分離する (別の側に置く). 同様に C_z も部分曲線で別の対辺 B_w と B_e を分離するから, これら C_x と C_z の部分曲線 (連続曲線) は必ず交わることになる.

さて, 元の仮定

$$F(\phi(x+y),\phi(x-y)) = g(x)$$

より, $F(X,Y)$ は C_x 上定数となっていて, すなわち C_x は $F(X,Y)$ の等高線であることがわかる. 一方で, すべての C_x, C_z は少なくとも 1 点で交わるので, その曲線の上ですべて F は同じ値を取ることになり,

$$\bigcup_{0\leq x\leq p} C_x = I$$

より F は I 上定数でなければならないことになる. ■

命題 4 の方は, 例えば x に関して $p/4$ が周期, y に関して $p/3$ が周期の場合,

$$\frac{2}{4}+\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+1,\qquad \frac{2}{4}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$$

より,

$$\begin{aligned}
F\left(\phi\left(x+y+\frac{p}{6}\right),\phi\left(x-y-\frac{p}{6}\right)\right) &= F\left(\phi\left(x+y+\frac{p}{6}+p\right),\phi\left(x-y-\frac{p}{6}\right)\right)\\
&= F\left(\phi\left(x+\frac{2p}{4}+y+\frac{2p}{3}\right),\phi\left(x+\frac{2p}{4}-y-\frac{2p}{3}\right)\right)\\
&= F\left(\phi\left(x+y+\frac{2p}{3}\right),\phi\left(x-y-\frac{2p}{3}\right)\right) = F(\phi(x+y),\phi(x-y))
\end{aligned}$$

となり, これは y に関して $p/6$ も周期であることを意味する. つまり, x に関して $p/4$ が「基本周期」で y に関して $p/3$ が「基本周期」となることはないことになる.

一般の場合の命題 4 の証明も同様で, 例えば m が偶数で n が奇数の場合は,

$$\frac{j}{m}+\frac{k}{n}=\frac{1}{2n}+p,\qquad \frac{j}{m}-\frac{k}{n}=-\frac{1}{2n}$$

となる整数 j, k, p が取れることを示すことで矛盾を導くことができる. 偶奇が逆の場合も同様にして示せる.

4　最後に

元々の研究の目標である気体の方程式の場合, 単独保存則の数値計算例で見たように, 安定な周期解は連続関数解よりもむしろ不連続関数解として現われるのではないかと思われる.

よって, 本稿で述べた, 連続な周期解にずれが起きないという制限が, 気体の方程式の周期解の問題に直接強く影響するとは限らないが, そこからどんなことが言えるのかについては今後検討したいと思う.

また, 不連続周期解に対しては, 2 節の例のように空間方向と時間方向の周期がずれる可能性があることになるが, 気体の方程式の場合は任意の不連続性が許されるわけではなくランキン・ユゴニオ条件という関係式を満たす必要があるので, 容易に周期がずれる不連続解を構成できるわけではないし, また構成できたとしてもそのずれが気体の方程式の周期解の性質にどのように影響するかについてはまだよくわかっていない. 今回残された問題の解決も含めて, 今後もそれらの研究を進めて行きたいと思う.

参考文献

[1] 竹野茂治: 単独保存則方程式の周期解の数値解析; 新潟工科大学紀要, **2**, 19–26, 1997.

[2] 竹野茂治, 小松幸恵: 単独保存則方程式の周期解の数値解析 II; 新潟工科大学紀要, **8**, 13–21, 2003.