新潟工科大学紀要 第 2 号 1997 年 12 月

単独保存則方程式の周期解の数値解析

竹野 茂治 *

(平成 12 年 1 月 4 日受理)

Numerical results of time–periodic solutions for a scalar conservation law

Shigeharu TAKENO*

The scalar conservation law equation is known to have a discontinuous solution, so-called a shock wave. It makes some difficulties in mathematical analysis for the equation. Recently, the proof of the existence of the periodic solution was obtained for a scalar conservation law with a periodic outer force. In this paper, we introduce some properties and numerical results for the periodic solution by numerical computations.

Keywords: scalar conservation law, Burgers equation, time periodic solution, weak solutions, period doubling bifurcation

1 はじめに

非粘性圧縮性流体の運動方程式などを含む, 保存則方程式と呼ばれる準線形双曲型偏微分方程式については, 数学的にはまだ知られていないことが非常に多い. 例えば, 最も基本的な問題である解の存在と一意性については, 空間一次元の方程式に対してでさえ, 単独の方程式の場合を除いては完全には解決していない.

この方程式の数学的な解析の難しさの原因の一つは, 解に不連続性が発生することである. 初期値が微分可能性の高い滑らかな関数でも, 有限時刻で解の滑らかさが失われて, 不連続性が発生する現象が起こる. このような不連続な解は, 流体の方程式の場合の物理現象と対応づけて, 一般に衝撃波と呼ばれている.

この不連続な関数をも解と考えるために, 弱解という通常の解よりも広い概念が用いられるが, 一般には初期値に対して弱解は一意に決定しないので, 一意性を与えるために, 流体の場合のエントロピー増大則に対応するエントロピー条件という数学的な条件を課す必要がある. この条件を満たす弱解をエントロピー解と呼ぶ.

*情報電子工学科 講師

竹野 茂治

単独の保存則方程式

$$u_t + f(u)_x = g(t,x) \qquad (u = u(t,x) \in R, \quad f''(u) > 0) \tag{1}$$

に対しては, エントロピー解の存在と一意性, 漸近挙動などは調べられている [1), 2), 4)] が, より具体的な解の性質についてはまだ知られていないことが多い.

例えば, 外力項 $g(t,x)$ が時刻 t に関して周期的である場合に周期的な解が存在するかという問題について, 最近次のような結果が得られた [3)].

定理 1 方程式 (1) の $f(u)$ がある正数 δ に対し

$$f''(u) \geq \delta \qquad (u \in R) \tag{2}$$

を満たし, 外力項 $g(t,x)$ が t に関して周期 T を持つ有界な周期関数であり, 両立条件

$$\int_0^T dt \int_0^1 g(t,x)dx = 0 \tag{3}$$

と, ある正の定数 G_1 に対して不等式

$$\tilde{g}(t,x) - \tilde{g}(t,y) \leq G_1(x-y) \qquad (x > y) \tag{4}$$

を満たすとする. ただし $\tilde{g}(t,x)$ は $g(t,x)$ を x に関して区間 $(0,1)$ から R 全体の関数に周期的に拡張したものとする. このとき, 境界条件

$$u(t,0) = u(t,1) \qquad (0 < t < T) \tag{5}$$

のもと, 任意の平均値 $\bar{u}$ に対して方程式 (1) は周期 T の時間周期的なエントロピー解を少なくとも一つ持つ. すなわち, (1), (5), および

$$u(T,x) = u(0,x), \qquad \int_0^1 u(0,x) = \bar{u}$$

を満たすような $u(t,x)$ が少なくとも一つ存在する.

より複雑な方程式系である理想気体の方程式に対して, 相京 [5)], 水澤 [6)] は周期が T ではなく $2T$, $3T$ のような倍周期であるような解の存在を数値実験によって示している. このような現象は, 周期倍分岐と呼ばれる, 周期解の分岐現象として知られている. 数学的には常微分方程式, そして最近では半線形の波動方程式に対する研究が行われているようであるが [7), 8)], (1) のような準線形の波動方程式に対する論文はまだ見当たらない.

本報告では $f(u) = u^2/2$, すなわち非粘性バーガース方程式の場合の周期解, および周期倍分岐についての数値計算によるいくつかの結果を述べる.

2　差分近似解

外力項のない方程式

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \quad (0 < x < 1, \quad t > 0), \tag{6}$$

の初期値境界値問題

$$\begin{cases} u(t,0) = u(t,1) & (t > 0), \\ u(0,x) = u_0(x) & (0 < x < 1) \end{cases} \tag{7}$$

の解は, x-方向の積分による平均 $\int_0^1 u(t,x)dx$ を保存するため, $t \to \infty$ のとき $\bar{u} = \int_0^1 u_0(x)dx$ という定数解に収束し, またその収束の速さは $O(t^{-1})$ となることが知られている [2)]. これにより, 任意の初期値に対して, 周期的外力を与えた方程式 (1) の初期値境界値問題 (7) の一意に定まるエントロピー解は $t \to \infty$ のときに周期解に近づいていくと予想される.

よって数値計算では初期値は適当に与えて, その近似解の $t = mT$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ での近似解の値 $u(mT, x)$ の, m を大きくしていったときの様子を調べてみることにした. ただし, この方法では不安定な周期解を得ることはできない.

近似解は, その収束性が保証されていて [1)], 周期解の存在証明にも使用されている [3)] 段階的な Lax-Friedrichs 型の差分近似

$$\begin{aligned} u_j^{n+1/2} &= \frac{u_{j+1/2}^n + u_{j-1/2}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\{f(u_{j+1/2}^n) - f(u_{j-1/2}^n)\}, \\ u_{j+1/2}^{n+1} &= \frac{u_{j+1}^{n+1/2} + u_j^{n+1/2}}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\{f(u_{j+1}^{n+1/2}) - f(u_j^{n+1/2})\} + g_{j+1/2}^{n+1/2}\Delta t \\ &\quad (n = 0, 1, 2, \ldots, \ j = 0, 1, 2, \ldots, L-1, \ u_j^n = u(n\Delta t, j\Delta x)) \end{aligned}$$

を用いた. また, 境界の所では境界条件 (7) を考慮して, u を x-方向に周期拡張して計算した.

この差分近似は計算精度はそれほどよくはないが, 計算が楽であり, 安定であることから今回のような漸近的な解析には用いやすい. ただし, その誤差は

$$\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} u_{xx}$$

の形で発生し, この項の持つ粘性効果のために解が平滑化される. Courant-Friedrichs-Lewy 条件と呼ばれる差分幅に対する安定化条件

$$\{|f'(u)| + T|g|\}\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

を与えるために, Δx を小さくすればこの粘性効果は少なくなるが, 周期解の数値解析には影響を及ぼす. この効果については 4 節で述べる.

3　周期解への収束

周期解の存在証明[3)]では, 外力の x-方向の全変動が影響を与えていたので, 実験に用いた時間周期的外力は, 最大値を保ったままで全変動を変えられるように次のような関数とした.

$$g(t,x) = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) h(x;a,N), \quad h(x;a,N) = \begin{cases} \sin^2\left(\dfrac{N\pi x}{a}\right) & (0 < a \le x), \\ 0 & (a < x \le 1) \end{cases}$$

$$(0 < a < 1,\ A > 0,\ T > 0,\ N = 1, 2, \ldots)$$

$h(x;a,N)$ の全変動は $2N$, $h'(x;a,N)$ の最大値は $2N\pi/a$ となる. ただし, 以下の実験では, この外力の変動は変化させず, すべて $N = 2$, $a = 0.5$ と固定し, 外力については A, T のみを変化させて数値計算を行った. また, $u(t,x)$ の初期値 $u(0,x)$ は定数 M で与えた. x-方向の分割幅 Δx は分割数 L に対して $\Delta x L = 1$ となるように定め, t-方向の分割幅 Δt は, CFL 条件と, T がちょうど Δt の整数倍になるように決定したが, 粘性効果が大きくなりすぎないようになるべく大きな値に取った. この外力の周期 T と分割数 L を変えて数値実験してみた結果を以下に示す.

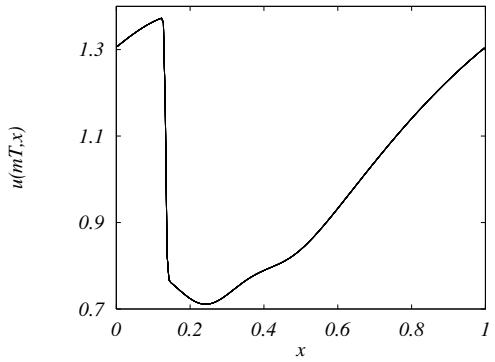

Fig. 1　$u(mT,x)$: $T = 0.9$, $L = 1000$, m=100,101,102,. . . ,110 $(A = 1.0,\ M = 1.0)$

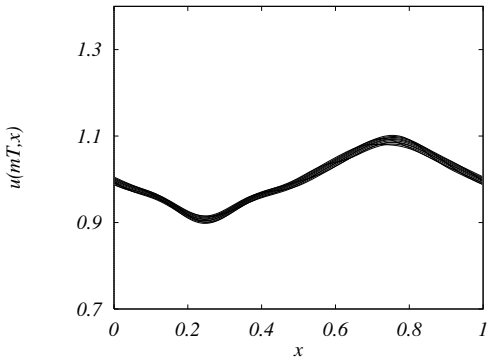

Fig. 2　$u(mT,x)$: $T = 0.7$, $L = 1000$, m=100,101,102,. . . ,110 $(A = 1.0,\ M = 1.0)$

Fig. 1,2 は $L = 1000$ のときの $u(mT,x)$ のグラフを $m = 100$ から $m = 110$ まで, すなわち外力の 100 周期目から 110 周期目までのグラフを重ねて書いたもので, Fig. 1 は $T = 0.9$, Fig. 2 は $T = 0.7$ のときの様子である. Fig. 1 のグラフはほとんど一本のグラフに見え, 関数 $u(mT,x)$ $(m = 100, 101, \ldots, 110)$ がほぼ同じものであることがわかる. これはこの解がこの時点でほぼ T-周期解になっていることを意味する. 一方 Fig. 2 のグラフは一本のグラフにまとまっているとはいいがたい.

m の経過にともなうグラフのまとまり具合を, 外力の周期 T を変化させてながめてみると, この二つの例のように非常に速くまとまる T とまとまりの悪い T があり, しかもこれらが T の変化に対して入れ替わりにあらわれる. このまとまりの悪い T では何らかの不安定さが働いているのではないかと予想される.

4　$2T$-周期解

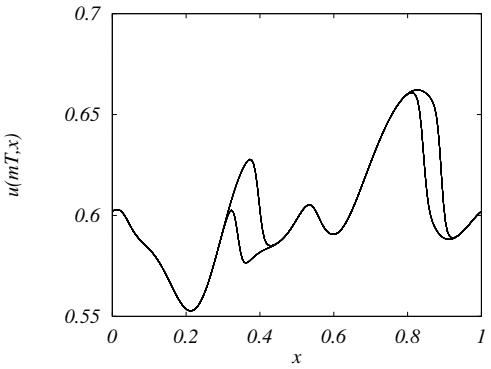

Fig. 3　$u(mT,x)$: $T=0.8$, $L=1000$, m=300,301,...,330 $(A=0.5,\ M=0.6)$

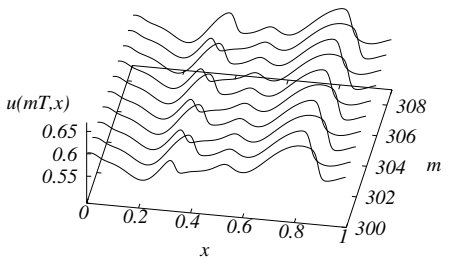

Fig. 4　$u(mT,x)$: $T=0.8$, $L=1000$, m=300,301,...,330 $(A=0.5,\ M=0.6)$

Fig. 3 は $T=0.8$, $L=1000$ のときの $u(mT,x)$ のグラフを 300 から 330 までの m に対して重ねたものであり, 2 本のグラフにまとまっているように見える. Fig. 4 はこれを m の順に並べて 3 次元的に見たものであるが, これをみるとこの 2 種類のグラフが交互にあらわれていることがわかる. これはこの解がほぼ $2T$-周期解であることを示している.

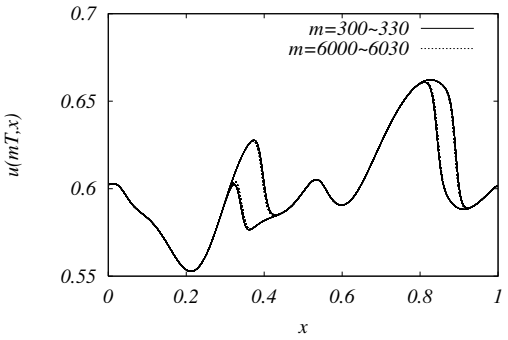

Fig. 5　$u(mT,x)$: $T=0.8$, $L=1000$, m=300,301,...330, and m=6000,6001,...6030

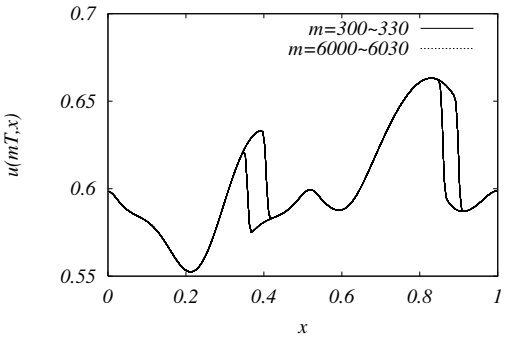

Fig. 6　$u(mT,x)$: $T=0.8$, $L=3000$, m=300,301,...330, and m=6000,6001,...,6030

さらに m を進めて, $m=6000$ から $m=6030$ までのグラフを重ねて書いたのが Fig. 5 のグラフであるが, この交互にあらわれる 2 種類のグラフは m の増加とともに近づいている. これにより $m\to\infty$ の極限においてはこの 2 種類のグラフが一致して, 結局は T-周期解になるのではないか, とも考えられるが, Δx を小さくしてみてみると (Fig. 6) この場合は m による変化がほとんどない.

つまり m の増加にともなってグラフが一つになろうとしたのは, 差分幅 Δx の大きさに関係する現象であり, 差分近似解の粘性効果によるものであると予想できる. 粘性項が

ある場合の方程式

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = \varepsilon u_{xx} \tag{8}$$

の解は定常解への漸近収束が非常に速く, より外力の影響を受けやすいので, 周期外力に対する解は T-周期解へ漸近収束しやすいと考えられるが, それによって一つのグラフに近づいたものと思われる.

さらに, 早い段階で, つまり割りと小さい m で, ひとつ, あるいは 2 つのグラフにまとまること, また, 3 節の Fig. 2 のグラフのまとまりが悪いことなどは Δx の大きさにはあまり関係がないので, これらは非粘性の方程式, すなわち差分近似解というより, もとの方程式 (1) の厳密解のなんらかの性質をあらわしているものと思われる.

5 $2T$-周期を持つ厳密解

最後にひとつ厳密解である $2T$-周期解を紹介する.

$u(t,x)$ として進行波型の関数

$$u(t,x) = \frac{1}{T} + a\cos\left(2\pi x - \frac{\pi}{T}t - \frac{\pi}{4}\right) \tag{9}$$

を考えると

$$g(t,x) = u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = u_t + uu_x = \pi a^2 cos\left(4\pi x - \frac{2\pi}{T}t\right)$$

によって定まる $g(t,x)$ も進行波であり, いずれも移動速度は $1/(2T)$ で, u, g の x-方向の周期はそれぞれ 1, $1/2$, u, g の t-方向の周期はそれぞれ $2T$, T となっている. つまりこの g に対して u は確かに $2T$-周期解である.

この $g(t,x)$ に対して前節までの方法と同様の数値計算をしたものが Fig. 7,8 である.

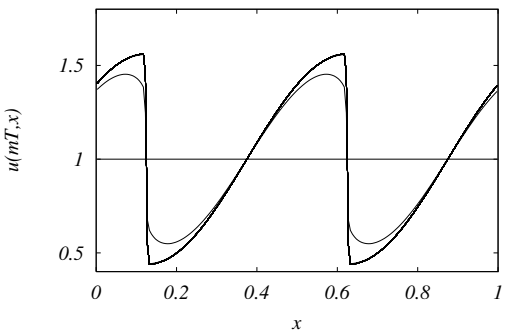

Fig. 7 $u(mT,x)$: m=0,1,...,30,
$L = 1000$, $u(0,x) = 1.0$
($T = 0.5$, $\pi a^2 = 1.0$)

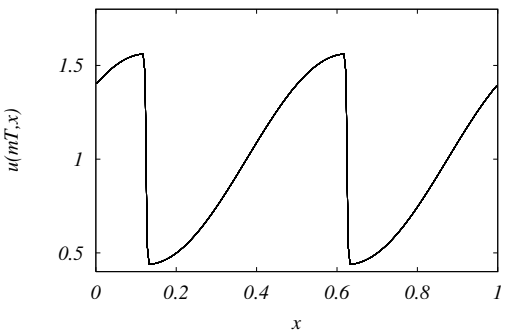

Fig. 8 $u(mT,x)$: m=100,101,...,130,
$L = 1000$, $u(0,x) = 1.0$
($T = 0.5$, $\pi a^2 = 1.0$)

ここには不連続性を持つ別の進行波型の T-周期解

$$u(t,x)=\frac{1}{T}+\begin{cases} a\cos\left(2\pi x-\dfrac{\pi}{T}t-\dfrac{\pi}{4}\right) & 2n\pi\le x-\dfrac{t}{2T}-\dfrac{1}{8}<2(n+1)\pi \\ & (n:\ \text{整数}), \\ -a\cos\left(2\pi x-\dfrac{\pi}{T}t-\dfrac{\pi}{4}\right) & \text{それ以外} \end{cases} \tag{10}$$

があらわれている.

初期値を, 今までのような定数ではなく, (9) の $u(t,x)$ に $t=0$ としたものを与えた場合の, $u(mT,x)$ のグラフが Fig. 9,10 である.

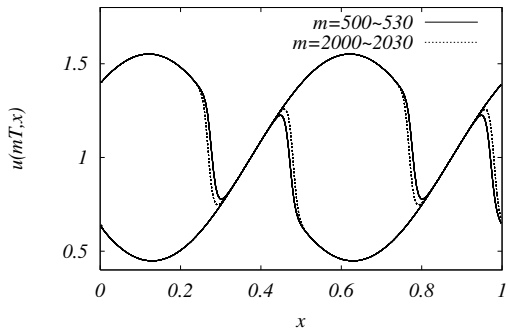

Fig. 9 $u(mT,x)$: $L=1000$, m=500,501,...,530, and m=2000,2001,...,2030, u(0,x) is given by (9)

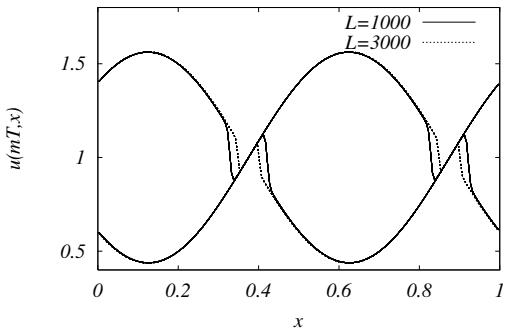

Fig. 10 $u(mT,x)$: m=2000,2001,...,2030, $L=1000$, and $L=3000$, u(0,x) is given by (9)

Fig. 9 は $L=200$ とし, $m=500$ から $m=530$ までのグラフと $m=2000$ から $m=2030$ までのグラフで, Fig. 10 は $L=1000$ と $L=3000$ の場合の $m=2000$ から $m=2030$ までのグラフである.

いずれも m の増加とともに (9) からのずれが大きくなって (10) に近づいているようにも見えるが, L を増やすとそのずれは減少している. つまりこれは粘性効果によるもので, 非粘性の方程式の解の性質によるものではないと考えられる.

よって, この $2T$-周期解は, 差分近似解の差分幅パラメータ Δx に関しては不安定かも知れないが, 非粘性の方程式の解に関して, 必ずしも安定でないとは言えない.

また, 以上のことから漸近極限である周期解は, 初期値の平均値のみによって一意に決定するのではないこともわかる. 気体の方程式の場合 [5] には, 漸近極限の周期解が初期総質量のみに依存していたこととは状況が異なっている. 初期値のどんな性質が漸近極限の周期解を決定しているのかを調べていく必要がある.

6 まとめ

定理 1 では単に T-周期解の存在が示されただけであるが, 数値計算例をみると, ある条件のもとで $2T$-周期解も存在することがわかる.

3 節で見たような周期解へのまとまりの悪さが起こる理由, まとまりが悪い部分の詳しい様子, 今までにみた $2T$-周期解はいずれも似た形のグラフから成っていたがそうでないものはないのか, $3T$-周期解などは存在するか, 極限周期解と初期値との関係などあらたな疑問もいくつか浮かんで来るが, 倍周期解が発生する条件, T-周期解から $2T$-周期解への分岐の様子や周期解の安定性といった基本的な問題も合わせて, これらの問題を解決するにはさらに数値実験を繰り返し, 理論的な解析を行っていく必要があると思われる. また数値実験においてもグラフを目で見て判断するだけではなく, 何らかの定量的な判断指標を設ける必要があると思われる. これらが今後の課題である.

参考文献

1) O. A. Oleinik: "Discontinuous solutions of non-linear differential equations", Uspekhi Mat. Nauk **12**, pp3–73 (1957) (English transl. Amer. Math. Soc. Transl. **26**, pp95–172 (1963))

2) J. Glimm and P. D. Lax: *Decay of solutions of systems of nonlinear hyperbolic conservation laws* (Amer. Math. Soc., Providence, 1970)

3) S. Takeno: "A time-periodic solution for a scalar conservation law", preprint, pp1–26 (1997)

4) E. Tadmor: "The large-time behavior of the scalar, genuinely nonlinear Lax-Friedrichs scheme", Math. Comp. **43**, pp353–368 (1984)

5) 相京 敦: "理想気体の 1 次元流の数値解析", 新潟大学工学部卒業論文, pp1–20 (1994)

6) 水澤 智裕: "理想気体のピストン問題における周期解分岐", 新潟大学工学部卒業論文, pp1–24 (1995)

7) 小松幸恵, 小谷真一, 松村昭孝: "Duffing 方程式のある倍周期解分岐", 日本数学会 1996 年度年会函数方程式分科会講演アブストラクト, pp28–29 (1996)

8) 小松幸恵: "半線形波動方程式のある周期倍分岐について", 日本数学会 1997 年度秋期総合分科会応用数学分科会講演アブストラクト, pp129–130 (1997)