2023 年 01 月 17 日

ある超幾何関数の評価について

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

[2] では、等エントロピー的な気体の 1 次元運動方程式に対する補償コンパクト性理論による弱解の存在証明について、τ が整数である場合の従来の方法 [3] の一つの簡略化を示した。ここで、τ は、気体の断熱定数 γ $(1<\gamma<3)$ に対して、

$$\tau = \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)} \tag{1}$$

によって決まる正の定数。

τ が非整数の場合は、Darboux の公式によってあたえられる一般化エントロピーの分数階微分の計算、評価によって、補償コンパクト性理論により [4],[5],[6] 等で弱解の存在証明が得られているが、τ が整数の場合に対してそれは格段に難しく複雑である。

その一般化エントロピーは、以下のような関数 $F_\ell(x)$ を用いて構成される。

$$F_\ell(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 y^{\tau+\ell}(1-y)^\tau(x-y)^{-(\tau)}dy & (x>1) \\ \displaystyle\int_0^x y^{\tau+\ell}(1-y)^\tau(x-y)^{-(\tau)}dy & (0<x<1) \end{cases} \qquad (\ell=0,1) \tag{2}$$

ここで (τ) は τ の小数部分を意味する。

[2] を τ が非整数な場合に拡張、すなわち [4],[5],[6] の証明の簡略化を行うには、F_ℓ の $[\tau]+2$ 階までの導関数、およその $x\to+0$, $x\to 1\pm 0$, $x\to\infty$ の極限とその収束 order の評価が必要になる。

本稿では、(2) を少し一般化した以下の関数を考える。

$$H_+(x;\alpha,\beta,\gamma) = \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}(x-y)^\gamma dy \quad (x>1,\alpha>0,\beta>0) \tag{3}$$

$$H_-(x;\alpha,\beta,\gamma) = \int_0^x y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}(x-y)^\gamma dy \quad (0<x<1,\alpha>0,\gamma>-1) \tag{4}$$

ここで、α, β, γ はいずれも整数ではないとする。(3), (4) の条件を満たす α, β, γ についてはこれらの積分は収束し、$H_\pm$ により (2) の F_ℓ は

$$F_\ell(x) = \begin{cases} H_+(x; \tau+\ell+1, \tau+1, -(\tau)) & (x > 1) \\ H_-(x; \tau+\ell+1, \tau+1, -(\tau)) & (0 < x < 1) \end{cases}$$

と表される。

この $H_\pm(x; \alpha, \beta, \gamma)$ は変数変換により、いわゆる超幾何関数 (hyper geometric function)

$$\begin{aligned} F(a,b,c;z) &= \frac{\mathit{\Gamma}(c)}{\mathit{\Gamma}(b)\,\mathit{\Gamma}(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt \\ &\quad (c > b > 0,\ |z| < 1) \end{aligned} \tag{5}$$

を用いて表すことも可能であり、実際に

$$\begin{aligned} H_+(x;\alpha,\beta,\gamma) &= x^\gamma \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\left(1-\frac{y}{x}\right)^\gamma dy \\ &= \frac{\mathit{\Gamma}(\alpha)\,\mathit{\Gamma}(\beta)}{\mathit{\Gamma}(\alpha+\beta)} x^\gamma F\left(-\gamma, \alpha, \alpha+\beta; \frac{1}{x}\right) \\ &\quad (x > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} H_-(x;\alpha,\beta,\gamma) &= x^{\alpha+\gamma} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-xt)^{\beta-1}(1-t)^\gamma dt \quad (y = xt) \\ &= \frac{\mathit{\Gamma}(\alpha)\,\mathit{\Gamma}(\gamma+1)}{\mathit{\Gamma}(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma} F(1-\beta, \alpha, \alpha+\gamma+1; x) \\ &\quad (0 < x < 1,\ \alpha > 0,\ \gamma > -1) \end{aligned} \tag{7}$$

のようになる。ただし、超幾何関数の性質、漸近性はあまり一般的に知られているわけではないし、(6), (7) の形はそれほど解析が易しいわけでもない。

よって本稿では、超幾何関数に関する既知の結果を用いず、(3), (4) の形の H_+, H_- のままで [2] の拡張のために必要となる性質や、境界への極限とその収束 order などを考察する。

2 $H_\pm$ の基本性質

本節では、まず $H_\pm$ に関する以下の基本的な性質を示す。

定理 1

$H_\pm(x;\alpha,\beta,\gamma)$ は、その両辺が積分の収束条件を満たしていれば、以下の性質 [i]〜[v] が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\text{[i]} && \frac{d}{dx}H_\pm(x;\alpha,\beta,\gamma+1) = (\gamma+1)H_\pm(x;\alpha,\beta,\gamma) \\
&\text{[ii]} && H_\pm(x;\alpha,\beta,\gamma+1) - H_\pm(x;\alpha,\beta+1,\gamma) = (x-1)H_\pm(x;\alpha,\beta,\gamma) \\
&\text{[iii]} && H_\pm(x;\alpha+1,\beta,\gamma) + H_\pm(x;\alpha,\beta+1,\gamma) = H_\pm(x;\alpha,\beta,\gamma) \\
&\text{[iv]} && H_\pm(x;\alpha+1,\beta,\gamma) + H_\pm(x;\alpha,\beta,\gamma+1) = xH_\pm(x;\alpha,\beta,\gamma) \\
&\text{[v]} && (\gamma+1)H_\pm(x;\alpha+1,\beta+1,\gamma) - \alpha H_\pm(x;\alpha,\beta+1,\gamma+1) \\
& && \quad +\beta H_\pm(x;\alpha+1,\beta,\gamma+1) = 0
\end{aligned}
$$

[i]〜[iv] はほぼ自明で、[v] は部分積分で容易に示される。

定理 1 から、H_+ と H_- で共通の性質が成り立つことがわかる。

気体の方程式に対する証明では、1 節で伸べたように $H_\pm$ を何回か微分する必要があるが、性質 [i] より、微分するとその分 γ が下がる。H_+ は γ が小さくてもそのまま積分で表現できるのだが、H_- の方は $\gamma > -1$ という制限があり、その先の微分は、性質 [i] がそのままは使えない。それは、別な式で表すことは可能なのだが、少し項が増えてしまい、それを繰り返すと複雑な式になってしまう (例えば [4])。それを防いで、同じ [i] のままの形で表現するために、次節で H_- の γ を $\gamma < -1$ に対して拡張することを考える。

3　H_- の拡張

本節では、$H_-(x;\alpha,\beta,\gamma)$ を、$\gamma < -1$ なる非整数の γ に拡張することを考える。

まず、$\alpha > 0, \gamma > -1$ に対して、$H_-(x;\alpha,\beta,\gamma)$ を γ が 1 つ大きい H_- で表す。以後簡単のため、

$$
H_\pm(x;\alpha+\ell,\beta+m,\gamma+n) = [\ell,m,n]_\pm = [\ell,m,n] \tag{8}
$$

のような記号を用いる。

[i]∼[v] の性質は、この記号を使うと以下のように書ける。

$$\begin{array}{rl}
[\mathrm{i}] & [0,0,1]' = (\gamma+1)[0,0,0] \\
[\mathrm{ii}] & [0,0,1]-[0,1,0] = (x-1)[0,0,0] \\
[\mathrm{iii}] & [1,0,0]+[0,1,0] = [0,0,0] \\
[\mathrm{iv}] & [1,0,0]+[0,0,1] = x[0,0,0] \\
[\mathrm{v}] & (\gamma+1)[1,1,0]-\alpha[0,1,1]+\beta[1,0,1] = 0
\end{array}$$

H_- では β は小さくても構わないので、[v] で β を一つ下げると

$$(\gamma+1)[1,0,0]_- - \alpha[0,0,1]_- + (\beta-1)[1,-1,1]_- = 0$$

となり、ここに [iv] を用いて [1,0,0] を消去すると、

$$(\gamma+1)(x[0,0,0]_- - [0,0,1]_-) = \alpha[0,0,1]_- - (\beta-1)[1,-1,1]_-$$

となるので、

$$[0,0,0]_- = \frac{1}{x}\left(\frac{\alpha+\gamma+1}{\gamma+1}[0,0,1]_- - \frac{\beta-1}{\gamma+1}[1,-1,1]_-\right) \tag{9}$$

のように $[0,0,0]_-$ を一つ大きい γ の H_- を用いて表せる。これは、$\alpha>0, \gamma>-1$ で非整数の α,β,γ すべてに対して成立するが、逆にこれを用いて、$-2<\gamma<-1$ に対する $H_-(x;\alpha,\beta,\gamma)$ を定義することにする。すなわち $-2<\gamma<-1$ に対して、

$$\begin{aligned}
H_-(x;\alpha,\beta,\gamma) \;=\;& \frac{1}{x}\left(\frac{\alpha+\gamma+1}{\gamma+1}H_-(x;\alpha,\beta,\gamma+1)\right. \\
& \left.-\frac{\beta-1}{\gamma+1}H_-(x;\alpha+1,\beta-1,\gamma+1)\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

と定める。

これにより、$\alpha>0,\ -2<\gamma<-1$ に対する H_- が定まり、そしてそれにより、再び (10) を用いることにより、$\alpha>0,\ -3<\gamma<-2$ に対する H_- を定義することができ、この手続きを繰り返すことによって、$\alpha>0, \gamma<-1$ を満たす任意の非整数の α,β,γ に対する H_- を $0<x<1$ で定義できることがわかる。

この $\gamma<-1$ に拡張された H_- に対し、再び [i]∼[v] が成り立つことを次に示す。

まず [i] から。$-2<\gamma<-1$ とする。この場合は、(9) より

$$[0,0,1]_-' = (\gamma+1)\frac{1}{x}\left(\frac{\alpha+\gamma+1}{\gamma+1}[0,0,1]_- - \frac{\beta-1}{\gamma+1}[1,-1,1]_-\right) \tag{11}$$

を示せばよいことになる。

それには、まず左辺の $[0,0,1]_-$ に (9) を用いて、

$$x[0,0,1]_- = \frac{\alpha+\gamma+2}{\gamma+2}[0,0,2]_- - \frac{\beta-1}{\gamma+2}[1,-1,2]_-$$

とし、この両辺を x で微分すると

$$[0,0,1]_- + x[0,0,1]_-' = \frac{\alpha+\gamma+2}{\gamma+2}[0,0,2]_-' - \frac{\beta-1}{\gamma+2}[1,-1,2]_-'$$

となるが、右辺の微分に対しては [i] が成立するので、

$$[0,0,1]_- + x[0,0,1]_-' = (\alpha+\gamma+2)[0,0,1]_- - (\beta-1)[1,-1,1]_-$$

となり、よって

$$x[0,0,1]_-' = (\alpha+\gamma+1)[0,0,1]_- - (\beta-1)[1,-1,1]_-$$

となって (11) が成立することが示されたことになる。

この証明では、一つ小さい γ を定義する式 (9) と [i] を用いているだけなので、これはそのまま $-3<\gamma<-2$ の場合にも用いることができ、よってこれで帰納的に $\gamma<-1$ のすべての非整数の γ で [i] が成立することになる。

さらにこの証明を振り返ると、実質的に $-2<\gamma<-1$ であることは使っておらず、[i]〜[v] の性質のみを用いていることがわかる。すなわち、$\gamma>-1$ に対してはすでに成り立つことが知られている式に対して当然成立する機械的な計算を行っているだけであり、その同じ計算を、機械的に $\gamma<-1$ の場合の証明に用いている形になっていて、行われる式変形は両者で全く違わない。

[i] 以外の [ii]〜[v] の性質の証明もこれと同じで、その証明は [ii]〜[v] を用いた式変形のみで、$\gamma>-1$ で成立する計算と全く同じ式変形を $\gamma<-1$ に対して実行するだけであり、よって $\gamma>-1$ と同じ結論が自然に $\gamma<-1$ でも得られることになり、これで $\gamma<-1$ でも成り立つことが保証される。

なお、この一見手抜きにも見える証明は、数学では本来複素関数論の分野の「解析接続」という手法で正当化されるもので、本稿の H_- の $\gamma < -1$ への拡張自体がその「解析接続」になるのであるが、本稿では α, β, γ は実数値の場合しか扱わないので、表面上「解析接続」は用いずに「(9) によって拡張する」という言い方をしておく。

$\gamma < -2$ に対する H_- は、(9) を繰り返し用いることで帰納的に定義したが、実際に (9) を繰り返して得られる公式を一つ紹介する。

補題 2 (γ の n 回のリフティング)

任意の自然数 n に対し、

$$x^n[0,0,0] = \sum_{j=0}^{n} \mu_j^n[j,-j,n] \tag{12}$$

となる。ここで、μ_j^n は以下の通り。

$$\mu_j^n = \mu_j^n(\alpha,\beta,\gamma) = (-1)^j \frac{\binom{\alpha+\gamma+n}{n-j}\binom{\beta-1}{j}}{\binom{\gamma+n}{n}} \tag{13}$$

証明

$n = 1$ の場合は (12),(13) は容易に (9) に一致することがわかる。$n-1$ で (12),(13) が成立するとすると、

$$x^{n-1}[0,0,0] = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j^{n-1}[j,-j,n-1] \tag{14}$$

となるが、(9) より、

$$x[j,-j,n-1] = \frac{\alpha+\gamma+j+n}{\gamma+n}[j,-j,n] - \frac{\beta-j-1}{\gamma+n}[j+1,-j-1,n]$$

となるので、これを (14) に代入すると

$$x^n[0,0,0] = \sum_{j=0}^{n} \bar{\mu}_j[j,-j,n] \tag{15}$$

となり、$\bar{\mu}_j$ は

$$\bar{\mu}_j = \frac{\alpha+\gamma+j+n}{\gamma+n}\,\mu_j^{n-1} - \frac{\beta-j}{\gamma+n}\,\mu_{j-1}^{n-1} \quad (0 \le j \le n) \tag{16}$$

となる。なお、$\mu_n^{n-1} = \mu_{-1}^{n-1} = 0$ とする。あとはこの $\bar{\mu}_j$ が μ_j^n に一致することを示せばよい。

$$\begin{aligned}
\mu_j^{n-1} &= (-1)^j \frac{\binom{\alpha+\gamma+n-1}{n-1-j}\binom{\beta-1}{j}}{\binom{\gamma+n-1}{n-1}} = \mu_j^n \frac{(n-j)(\gamma+n)}{(\alpha+\gamma+n)n} \\
\mu_{j-1}^{n-1} &= (-1)^{j-1} \frac{\binom{\alpha+\gamma+n-1}{n-j}\binom{\beta-1}{j-1}}{\binom{\gamma+n-1}{n-1}} = -\mu_j^n \frac{(\alpha+\gamma+j)(\gamma+n)j}{(\alpha+\gamma+n)n(\beta-j)}
\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}_j &= \left(\frac{(\alpha+\gamma+j+n)(n-j)}{(\alpha+\gamma+n)n} + \frac{(\alpha+\gamma+j)j}{(\alpha+\gamma+n)n}\right)\mu_j^n \\
&= \frac{(\alpha+\gamma+j)n+n(n-j)}{(\alpha+\gamma+n)n}\mu_j^n = \mu_j^n
\end{aligned}$$

となる。■

この補題 2 を用いれば、$\gamma < -1$ の H_- は帰納的に考えなくても一度で $\gamma > -1$ に対する H_-、すなわち積分を用いた式で表すことができる。逆に言えば、$\gamma < -1$ に拡張した H_- は、実際には (12) の右辺の式で表されるものを意味することになる。

4 $x \to \infty$ の評価

$H_\pm$ は、前節の拡張版も含め $x > 1$ (H_+), $0 < x < 1$ (H_-) では明らかに滑らかな関数だから、その可積分性や有界性は、境界の評価、すなわち収束 order のみによって決まる。本節以降、$H_\pm$ の境界の評価を考える。まずは H_+ の $x \to \infty$ の評価から。

$\alpha > 0, \beta > 0$ に対して、H_+ を

$$H_+(x;\alpha,\beta,\gamma) = x^\gamma \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\left(1-\frac{y}{x}\right)^\gamma dy$$

と変形すると、$x > 2$ なら $1/2 < 1 - y/x < 1$ より $(1-y/x)^\gamma$ は有界なので、$x \to \infty$ に対してルベーグ収束定理により

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\left(1-\frac{y}{x}\right)^\gamma dy \to \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy = B(\alpha,\beta)$$

となるから、よって $x \to \infty$ に対しては、

$$H_+(x;\alpha,\beta,\gamma) = x^\gamma(B(\alpha,\beta)+o(1)) \tag{17}$$

となる。

よって、x が ∞ の近くでは、$\gamma \leq 0$ の場合に H_+ は有界で、$\gamma < -1$ の場合に H_+ は可積分であることになる。

5 $x \to +0$ の評価

次は、H_- の $x \to +0$ の評価を考える。なお、この場合は $\gamma < -1$ の拡張版に対しても考える必要がある。

まず、$\gamma > -1$ の場合を考える。この場合は、以下の反転公式が利用できる。

補題 3 (H_+ と H_- の反転公式)

$\gamma > -1, \alpha > 0$ に対し次が成り立つ。

$$H_-(x;\alpha,\beta,\gamma) = x^{\alpha+\beta+\gamma-1}H_+\left(\frac{1}{x};\alpha,\gamma+1,\beta-1\right) \tag{18}$$

証明

$y = xt$ の置換積分により、

$$\begin{aligned} H_-(x;\alpha,\beta,\gamma) &= x^{\alpha+\gamma}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-xt)^{\beta-1}(1-t)^{\gamma}dt \\ &= x^{\alpha+\gamma+\beta-1}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma}\left(\frac{1}{x}-t\right)^{\beta-1}dt \end{aligned}$$

となって得られる。■

この補題 3 と前節の評価 (17) により、$\gamma > -1$ のときは $x \to +0$ に対して

$$\begin{aligned} H_-(x;\alpha,\beta,\gamma) &= x^{\alpha+\beta+\gamma-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta-1}(B(\alpha,\gamma+1)+o(1)) \\ &= x^{\alpha+\gamma}(B(\alpha,\gamma+1)+o(1)) \end{aligned} \tag{19}$$

となる。

次は $\gamma < -1$ の場合を考える。まずは、$P = \alpha+\gamma \notin \boldsymbol{Z}$ と仮定する。ここで、$\boldsymbol{Z}$ は整数全体の集合とする。この場合、$\gamma = [\gamma]+(\gamma) = -m+(\gamma)$ とすると m は 2 以上の整数で、$\gamma+m-1 = (\gamma)-1 \in (-1,0)$ となるので補題 2 を用いて $m-1$ 回リフティングすると、

$$[0,0,0]_- = \frac{1}{x^{m-1}}\sum_{j=0}^{m-1}\mu_j^{m-1}[j,-j,m-1]_- \tag{20}$$

となるが、(19) より

$$[j,-j,m-1]_- = x^{\alpha+j+\gamma+m-1}(B(\alpha+j,\gamma+m)+o(1)) \tag{21}$$

となり、また係数 μ_j^{m-1} は

$$\mu_j^{m-1} = (-1)^j\frac{\binom{P+m-1}{m-1-j}\binom{\beta-1}{j}}{\binom{\gamma+m-1}{m-1}} \tag{22}$$

で、$\beta, P \notin \boldsymbol{Z}$ より 0 にはならないので、(20), (21) より $j=0$ の項が最低次になり、よって

$$[0,0,0]_- = x^{\alpha+\gamma}(\mu_0^{m-1}B(\alpha,\gamma+m)+o(1)) \tag{23}$$

となる。

ここで、Γ 関数と B 関数の拡張 (解析接続) を考える。Γ 関数、B 関数は通常は

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \quad (x>0), &(24)\\ B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad (x>0, y>0) &(25)\end{aligned}$$

と定義されるが、これらは

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x), \quad B(x,y) = B(y,x) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{26}$$

という性質を持ち、逆にこれにより H_- と同様に、$x \notin \boldsymbol{Z}$ であれば $x<0$ に対しても $\Gamma(x)$ は

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

によって拡張でき、$x, y \notin \boldsymbol{Z}$ であれば $x<0, y<0$ に対しても $B(x,y)$ は (26) により拡張できる。なお、これらの拡張は「解析接続」としてよく知られている。また、以後

$$\begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix} = n!\binom{p}{n} = p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)$$

の記号も用いる。

これらを利用すれば (23) の係数は、

$$\begin{aligned}\mu_0^{m-1}B(\alpha,\gamma+m) &= \frac{\dbinom{\alpha+\gamma+m-1}{m-1}}{\dbinom{\gamma+m-1}{m-1}}\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma+m)}{\Gamma(\alpha+\gamma+m)}\\ &= \Gamma(\alpha)\frac{\Gamma(\gamma+m)}{\begin{bmatrix}\gamma+m-1\\ m-1\end{bmatrix}}\frac{\begin{bmatrix}\alpha+\gamma+m-1\\ m-1\end{bmatrix}}{\Gamma(\alpha+\gamma+m)} = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}\\ &= B(\alpha,\gamma+1)\end{aligned}$$

と書けることになり、よって、$\gamma < -1$ で $P = \alpha + \gamma \notin \boldsymbol{Z}$ ならば

$$[0,0,0]_- = x^{\alpha+\gamma}(B(\alpha, \gamma+1) + o(1)) \tag{27}$$

となり、式の上では $\gamma > -1$ の場合の (19) と同形となる。

次は $\gamma < -1, P = \alpha + \gamma \in \boldsymbol{Z}$ の場合を考える。まず、$P \geq 0$ ならば、$P \notin \boldsymbol{Z}$ の場合の計算の (22) の μ_j^{m-1} は、$m \geq 2$ より 0 にはならないので $P \notin \boldsymbol{Z}$ の場合の議論がそのまま使えて、$\alpha + \gamma + 1 = P + 1 \geq 1$ よりやはり (27) が成立することになる。よって、あとは $P < 0$ の場合を考えればよい。

$k = -P \in \boldsymbol{Z}$ とすると $k \geq 1$ で、$k = -\alpha - \gamma = -\alpha + m - (\gamma) \leq m - 1$ なので、μ_j^{m-1} は

$$\binom{P+m-1}{m-1-j} = \binom{m-k-1}{m-j-1}$$

を含んでいるため $0 \leq j \leq k-1$ に対しては 0 になり、それ以外の j に対しては 0 ではない。よって、

$$\begin{aligned} [0,0,0]_- &= \frac{1}{x^{m-1}} \sum_{j=k}^{m-1} \mu_j^{m-1}[j, -j, m-1]_- \\ &= x^{\alpha+k+\gamma}(\mu_k^{m-1} B(\alpha+k, \gamma+m) + o(1)) \end{aligned}$$

となるが、$\alpha + k + \gamma = P + k = 0$ となるので $(\alpha) + (\gamma) = 1$ で、

$$[0,0,0]_- = \mu_k^{m-1} B(\alpha+k, \gamma+m) + o(1) \tag{28}$$

となる。ここで、$P = \alpha + \gamma = -k \in \boldsymbol{Z}$ より、

$$\gamma + m = (\gamma) = 1 - (\alpha), \quad \alpha + k = -\gamma = -[\gamma] - (\gamma) = m - 1 + (\alpha)$$

となるので、

$$\begin{aligned} &\mu_k^{m-1} B(\alpha+k, \gamma+m) \\ &= (-1)^k \frac{\binom{m-k-1}{m-k-1}\binom{\beta-1}{k}}{\binom{\gamma+m-1}{m-1}} B(m-1+(\alpha), 1-(\alpha)) \end{aligned}$$

$$= \quad (-1)^k \frac{\binom{\beta-1}{k} \Gamma(m-1+(\alpha))\,\Gamma(1-(\alpha))}{\binom{-(\alpha)}{m-1} \Gamma(m)}$$

となるが、

$$\binom{-(\alpha)}{m-1} = (-1)^{m-1} \binom{m+(\alpha)-2}{m-1}$$

であり、

$$\frac{\Gamma(m-1+(\alpha))}{\binom{m+(\alpha)-2}{m-1}} = (m-1)!\,\Gamma((\alpha)) = \Gamma(m)\,\Gamma((\alpha))$$

となるので、

$$\begin{aligned} \mu_k^{m-1} B(\alpha+k, \gamma+m) &= (-1)^{m-1+k} \binom{\beta-1}{k} \Gamma((\alpha))\,\Gamma(1-(\alpha)) \\ &= (-1)^{m-1-k} \binom{\beta-1}{k} B((\alpha), 1-(\alpha)) \end{aligned}$$

となる。ここで、$m-1-k$ は

$$m-1-k = -[\gamma]-1+\alpha+\gamma = (\gamma)-1+\alpha = \alpha-(\alpha) = [\alpha]$$

と表すことができる。

以上をまとめると、$x \to +0$ の場合は、

$$H_-(x;\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} x^{\alpha+\gamma}(B(\alpha,\gamma+1)+o(1)) \\ \quad (P=\alpha+\gamma \notin \boldsymbol{Z},\ \text{または}\ P \geq 0\ \text{のとき}) \\ \\ (-1)^{[\alpha]} \binom{\beta-1}{k} B((\alpha), 1-(\alpha)) + o(1) \\ \quad (P=-k \in \boldsymbol{Z},\ k \geq 1\ \text{のとき}) \end{cases} \tag{29}$$

となる。

よって、$x=0$ の近くでは、$P=\alpha+\gamma \notin \boldsymbol{Z}$ の場合は、$P>-1$ のとき、$P \in \boldsymbol{Z}$ の場合はすべての場合で H_- は可積分となり、また $P=\alpha+\gamma \notin \boldsymbol{Z}$ の場合は、$P>0$ のとき、$P \in \boldsymbol{Z}$ の場合はすべての場合で H_- は有界となる。

6 $x \to 1+0$ の評価

次は、H_+ の $x \to 1+0$ に対する評価を行う。本節では $x=1+\varepsilon$ とおいて $\varepsilon \to +0$ の場合を考える。

$$H_+(1+\varepsilon;\alpha,\beta,\gamma)=\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}(\varepsilon+1-y)^\gamma dy$$

は、$\gamma \geq 0$ のときは $(\varepsilon+1-y)^\gamma$ は有界なので、ルベーグ収束定理により

$$H_+(1+\varepsilon;\alpha,\beta,\gamma) \to \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1+\gamma}dy = B(\alpha,\beta+\gamma) \tag{30}$$

となる。

$\gamma<0$ の場合でも、$\beta+\gamma>0$ であれば、$0<\varepsilon<1/2$ に対して $(\varepsilon+1-y)^\gamma \leq (1-y)^\gamma$ となるので、ルベーグ収束定理によりやはり (30) が成立する。よって $\beta+\gamma>0$ の場合は

$$H_+(1+\varepsilon;\alpha,\beta,\gamma)=B(\alpha,\beta+\gamma)+o(1) \tag{31}$$

となる。

次は $Q=\beta+\gamma<0$ (よって $\gamma<0$) の場合を考える。まず、

$$H_+(1+\varepsilon;\alpha,\beta,\gamma)=\int_0^{1/2}+\int_{1/2}^1 = I_1+I_2 \tag{32}$$

と分けると、I_1 に関しては $\gamma<0$ より $(\varepsilon+1-y)^\gamma \leq (1-y)^\gamma$ となるので、

$$I_1 \to \int_0^{1/2} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta+\gamma-1}dy \tag{33}$$

となる。I_2 では $1-y=\varepsilon t$ とすると、

$$I_2=\varepsilon^{\beta+\gamma}\int_0^{1/(2\varepsilon)}(1-\varepsilon t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}(1+t)^\gamma dt$$

となり、$1/2 < 1-\varepsilon t < 1$, $\beta - 1 + \gamma = Q - 1 < -1$ より、ルベーグ収束定理により

$$\frac{I_2}{\varepsilon^{\beta+\gamma}} \to \int_0^\infty t^{\beta-1}(1+t)^\gamma dt \tag{34}$$

となる。よって、$\beta + \gamma = Q < 0$ より、(33), (34) をまとめると、

$$\frac{H_+(1+\varepsilon;\alpha,\beta,\gamma)}{\varepsilon^{\beta+\gamma}} \to \int_0^\infty t^{\beta-1}(1+t)^\gamma dt \tag{35}$$

となることがわかる。この最後の積分は $1+t = s^{-1}$ とすれば、$t = (1-s)/s$, $dt = -ds/s^2$ より、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{\beta-1}(1+t)^\gamma dt \;&=\; \int_0^1 \left(\frac{1-s}{s}\right)^{\beta-1} \frac{1}{s^\gamma}\frac{ds}{s^2} \;=\; \int_0^1 s^{-\gamma-\beta-1}(1-s)^{\beta-1}ds \\ &=\; B(\beta, -\gamma-\beta)\end{aligned}$$

となり、結局 $Q = \beta + \gamma < 0$ のときは

$$H_+(1+\varepsilon;\alpha,\beta,\gamma) = \varepsilon^{\beta+\gamma}(B(\beta,-\gamma-\beta) + o(1)) \tag{36}$$

が言える。

あとは、$Q = \beta + \gamma = 0$ の場合を考えればよい。

この場合 $\gamma = -\beta$ なので、$1-y=t$ により、

$$\begin{aligned}H_+(1+\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta) \;&=\; \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}(\varepsilon+t)^{-\beta}dt \\ &=\; \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}-1}{t}\left(\frac{t}{\varepsilon+t}\right)^\beta dt + \int_0^1 \frac{1}{t}\left(\frac{t}{\varepsilon+t}\right)^\beta dt \;=\; I_3 + I_4\end{aligned}$$

と分けると、I_3 では $((1-t)^{\alpha-1}-1)/t$ は可積分で、$0 < t/(\varepsilon+t) < 1$ より

$$I_3 \to \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}-1}{t}dt \tag{37}$$

となる。以後この極限を $M(\alpha)$ と書くことにする:

$$M(\alpha) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}-1}{t}dt \quad (\alpha > 0) \tag{38}$$

なお、本稿では $M(\alpha)$ で書き表すが、[1] (p297 2.2.4, 20.) によれば、
$\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ によって

$$M(\alpha) = \psi(1) - \psi(\alpha)$$

とも書けるようである。

I_4 の方は、$t = \varepsilon(1-s)/s$ と置換すると、$t/(\varepsilon+t) = 1-s$, $dt = -\varepsilon ds/s^2$ より

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\varepsilon/(1+\varepsilon)}^1 \frac{s}{1-s}(1-s)^\beta \frac{ds}{s^2} = \int_{\varepsilon/(1+\varepsilon)}^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{s} ds \\ &= \int_{\varepsilon/(1+\varepsilon)}^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}-1}{s} ds - \log\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = -\log\varepsilon + M(\beta) + o(1) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$I_3 + I_4 = -\log\varepsilon + M(\alpha) + M(\beta) + o(1) = (-\log\varepsilon)(1+o(1)) \tag{39}$$

が言える。

以上をまとめると $\varepsilon \to +0$ のときに以下が言えることになる。

$$H_+(1+\varepsilon;\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} B(\alpha,\beta+\gamma) + o(1) & (\beta+\gamma>0) \\ \varepsilon^{\beta+\gamma}(B(\beta,-\beta-\gamma)+o(1)) & (\beta+\gamma<0) \\ (-\log\varepsilon)(1+o(1)) & (\beta+\gamma=0) \end{cases} \tag{40}$$

これにより、$x = 1+0$ の近くでは、$\beta+\gamma>0$ のときは H_+ は有界で、$\beta+\gamma>-1$ のときは可積分になる。

7 $x \to 1-0$ の評価

次は、H_- の $x \to 1-0$ に対する評価を行う。本節では $x = 1-\varepsilon$ とおいて、$\varepsilon \to +0$ を考える。この場合、$\gamma < -1$ の拡張に関しても考察する必要がある。

まずは $\gamma > -1$ の場合を考える。この場合は、補題 3 と前節の評価 (40) を用いればよい。まず、補題 3 より、

$$\begin{aligned} H_-(1-\varepsilon;\alpha,\beta,\gamma) &= (1-\varepsilon)^{\alpha+\beta+\gamma-1} H_+\left(\frac{1}{1-\varepsilon};\alpha,\gamma+1,\beta-1\right) \\ &= (1+O(\varepsilon))H_+\left(1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon};\alpha,\gamma+1,\beta-1\right) \end{aligned}$$

となるので、(40) より、

$$H_-(1-\varepsilon;\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} B(\alpha,\beta+\gamma)+o(1) & (\beta+\gamma>0) \\ \varepsilon^{\beta+\gamma}(B(\gamma+1,-\beta-\gamma)+o(1)) & (\beta+\gamma<0) \\ (-\log\varepsilon)(1+o(1)) & (\beta+\gamma=0) \end{cases} \tag{41}$$

となることがわかる。なお、この評価は、$\beta+\gamma$ が小さくなるにつれ悪くなる (大きくなる) ことに注意する。

次は $\gamma<-1$ の場合を考える。まず、$-2<\gamma<-1$ とする。

$$\begin{aligned} H_-(1-\varepsilon;\alpha,\beta,\gamma) \;&=\; \frac{\alpha+\gamma+1}{\gamma+1}\,H_-(1-\varepsilon;\alpha,\beta,\gamma+1) \\ &\quad -\frac{\beta-1}{\gamma+1}\,H_-(1-\varepsilon;\alpha+1,\beta-1,\gamma+1) \end{aligned} \tag{42}$$

を用いると、$\gamma+1>-1$ なので、この右辺に既知の評価 (41) を適用すれば、$\beta+\gamma>0$ の場合は (42) の右辺は

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha+\gamma+1}{\gamma+1}\;B(\alpha,\beta+\gamma+1)-\;\frac{\beta-1}{\gamma+1}\;B(\alpha+1,\beta+\gamma)+o(1) \\ &=\;\left(\frac{\alpha+\gamma+1}{\gamma+1}\,\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\;-\;\frac{\beta-1}{\gamma+1}\,\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right)B(\alpha,\beta+\gamma)+o(1) \\ &=\;\frac{\alpha(\gamma+1)+(\gamma+1)(\beta+\gamma)}{(\gamma+1)(\alpha+\beta+\gamma)}\;B(\alpha,\beta+\gamma)+o(1) \\ &=\;B(\alpha,\beta+\gamma)+o(1) \end{aligned}$$

となるから (41) に一致し、$\beta+\gamma=0$ のときは (42) の右辺の前者の項は有界、後者の項は対数オーダーとなるので、

$$\begin{aligned} &-\frac{\beta-1}{\gamma+1}(-\log\varepsilon)(1+o(1)) \;=\; -\frac{\beta-1}{-\beta+1}(-\log\varepsilon)(1+o(1)) \\ &=\;(-\log\varepsilon)(1+o(1)) \end{aligned}$$

となって (41) に一致、$\beta+\gamma<0$ のときも後者の項の方が評価が悪いので、

$$\begin{aligned} &-\frac{\beta-1}{\gamma+1}\,\varepsilon^{\beta+\gamma}(B(\gamma+2,-\beta-\gamma)+o(1)) \\ &=\;-\frac{\beta-1}{\gamma+1}\,\varepsilon^{\beta+\gamma}\left(\frac{\gamma+1}{-\beta+1}\,B(\gamma+1,-\beta-\gamma)+o(1)\right) \\ &=\;\varepsilon^{\beta+\gamma}(B(\gamma+1,-\beta-\gamma)+o(1)) \end{aligned}$$

となってこれも (41) に一致する。

これで $-2<\gamma<-1$ の場合に (41) が成立することが示されたことになる。

一方で、この証明では $-2<\gamma<-1$ であることは実質的には用いておらず、よって $-3<\gamma<-2$ の場合も、$-2<\gamma<-1$ で (41) が成立することを利用して、上と全く同じ計算により証明を行うことができる。つまり、すべての $\gamma<-1$ の場合に対して (41) が成り立つことを帰納的に証明することができるので、これで (41) が $\gamma<-1$ の場合も成立することが示されたことになる。

なお、$H_+(1+\varepsilon)$ の評価 (40) と、$H_-(1-\varepsilon)$ の評価 (41) を比較すると、よく似た形で、$\beta+\gamma<0$ の場合の係数に少しだけ違いがあることがわかる。

8 $x \to 1+0$ の評価の精密化

6 節、7 節で $H_\pm$ の $x\to 1\pm 0$ の評価を調べたが、気体の方程式で必要な評価は、$\beta+\gamma=Q$ が整数の場合であり、さらに $Q\leq 0$ の場合は最悪の部分の評価だけでなく、定数値までの展開が必要になる。本節と次節で、$Q=\beta+\gamma\in\boldsymbol{Z}$, $Q\leq 0$ の場合に対して、$x\to 1\pm 0$ の評価のそのような精密化を行う。

$n=-Q=-\beta-\gamma$ とし、本節では

$$H_+(1+\varepsilon;\alpha,\beta,\gamma)=H_+(1+\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta-n)$$

について考える ($\alpha>0$, $\beta>0$, $\varepsilon>0$)。今のところ、(40), および (39) により、

$$H_+(1+\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta-n)=\begin{cases}-\log\varepsilon+M(\alpha)+M(\beta)+o(1) & (n=0)\\ \varepsilon^{-n}(B(\beta,n)+o(1)) & (n\geq 1)\end{cases} \tag{43}$$

は得られている。この後者の $n\geq 1$ の方を、

$$H_+(1+\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta-n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j^+}{\varepsilon^j}+B^+\log\varepsilon+A_0^++o(1) \tag{44}$$

の形に展開することが本節の目標である。ここで A_j^+, B^+, A_0^+ は ε によらない定数。なお、気体の方程式で必要なのは、$n=1$ までであるが、ここでは一般の自然数 n に対して考える。

$y = 1 - t$ により、

$$H_+(1+\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta-n) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}(\varepsilon+t)^{-\beta-n}dt$$

となるが、$\varepsilon \to +0$ のときに $t=0$ での order が t^{-n-1} となってしまうので、このままでは極限が取れない。よって、$(1-t)^{\alpha-1}$ の部分を $t=0$ で展開して、$n+1$ 次になる項と多項式に分離する。すなわち、

$$J(t) = J(t;n,\alpha) = (1-t)^{\alpha-1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha-1}{k}(-1)^k t^k \tag{45}$$

とすると、$t=0$ の近くでは $J(t) = O(t^{n+1})$ で、これにより、H_+ を以下の 2 つに分ける。

$$\begin{aligned} & H_+(1+\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta-n) \\ = \ & \int_0^1 J(t)t^{\beta-1}(\varepsilon+t)^{-\beta-n}dt + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}\int_0^1 t^{\beta+k-1}(\varepsilon+t)^{-\beta-n}dt \\ = \ & I_5 + I_6 \end{aligned} \tag{46}$$

まず、I_6 の各積分を考える。$k \leq n-1$ の場合、$t \to \infty$ の order は $-n+k-1 \leq -2$ なので可積分であり、よって積分を

$$\int_0^1 t^{\beta+k-1}(\varepsilon+t)^{-\beta-n}dt = \int_0^\infty - \int_1^\infty = I_{6,k,1} - I_{6,k,2}$$

に分け、$I_{6,k,1}$ に対しては $t = \varepsilon(1-s)/s$ と置換すると

$$I_{6,k,1} = \varepsilon^{k-n}\int_0^1 s^{n-k-1}(1-s)^{\beta+k-1}ds = \frac{B(n-k,\beta+k)}{\varepsilon^{n-k}}$$

となるが、

$$\begin{aligned} B(n-k,\beta+k) &= \frac{\mathit{\Gamma}(n-k)\,\mathit{\Gamma}(\beta+k)}{\mathit{\Gamma}(\beta+n)} = \frac{(n-k-1)!}{\begin{bmatrix}\beta+n-1\\ n-k\end{bmatrix}} \\ &= \frac{1}{(n-k)\dbinom{\beta+n-1}{n-k}} \end{aligned}$$

なので、$k<n$ に対しては、

$$I_{6,k,1} = \frac{1}{(n-k)\binom{\beta+n-1}{n-k}} \frac{1}{\varepsilon^{n-k}}$$

となる。$I_{6,k,2}$ の方は、$\beta>0$ より $(\varepsilon+t)^{-\beta-n} \le t^{-\beta-n}$ なので、ルベーグ収束定理より

$$I_{6,k,2} = \int_1^\infty t^{k-n-1}dt + o(1) = \frac{1}{n-k} + o(1)$$

となる。$k=n$ の項は、$t=\varepsilon(1-s)/s$ と置換すれば

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{\beta+n-1}(\varepsilon+t)^{-\beta-n}dt &= \int_{\varepsilon/(1+\varepsilon)}^1 s^{-1}(1-s)^{\beta+n-1}ds \\ &= \int_{\varepsilon/(1+\varepsilon}^1 \frac{(1-s)^{\beta+n-1}-1}{s}ds - \log\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = M(\beta+n) - \log\varepsilon + o(1)\end{aligned}$$

となるので、結局 I_6 は、

$$\begin{aligned} I_6 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{n-k} \frac{\binom{\alpha-1}{k}}{\binom{\beta+n-1}{n-k}} \frac{1}{\varepsilon^{n-k}} + (-1)^{n+1}\binom{\alpha-1}{n}\log\varepsilon \\ &\quad +(-1)^n\binom{\alpha-1}{n}M(\beta+n) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{n-k}\binom{\alpha-1}{k} + o(1) \end{aligned} \tag{47}$$

となる。

I_5 に関しては、$0 \le t \le 1/2$ では $J(t) = O(t^{n+1})$ なのでルベーグ収束定理により $0 \le t \le 1/2$ の積分はそのまま $\varepsilon \to +0$ とできる。また、$1/2 \le t \le 1$ では $(\varepsilon+t)^{-\beta-n} \le t^{-\beta-n}$ で、$J(t)t^{-1-n}$ は可積分だから、やはりそのまま極限が取れる。よって、I_5 は

$$I_5 \to \int_0^1 \frac{J(t)}{t^{n+1}}dt = I_7(n,\alpha) \tag{48}$$

となる。あとはこの I_7 を求めればよい。このあと使用するものを以下にまとめて補題として示す。

補題 4

1. $\alpha > 0$ に対して、$M(\alpha+1) = M(\alpha) - \dfrac{1}{\alpha}$
2. $M(1) = 0$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{\alpha}{k} = (-1)^n \binom{\alpha-1}{n}$
4. $\alpha > 0, n \geq 0$ に対して、$I_7(n,\alpha) = (-1)^n \dbinom{\alpha-1}{n}(M(\alpha) - M(n+1))$

証明

1. $M(\alpha+1) - M(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha - (1-t)^{\alpha-1}}{t}dt = -\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}dt = -\frac{1}{\alpha}$

2. 定義 (38) より明らか。

3. $n = 0$ では成立し、$n-1$ まで成立するとすると、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{\alpha}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{\alpha}{k} + (-1)^n \binom{\alpha}{n} \\
&= (-1)^{n-1}\binom{\alpha-1}{n-1} + (-1)^n \binom{\alpha}{n} = (-1)^{n-1}\binom{\alpha-1}{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \\
&= (-1)^n \binom{\alpha-1}{n-1}\frac{\alpha-n}{n} = (-1)^n \binom{\alpha-1}{n}
\end{aligned}$$

となって n でも成立する。

4. 以後、$J(t;n,\alpha) = (1-t)^{\alpha-1} - S(t;n,\alpha)$ と書くことにする。

$$\begin{aligned}
\{(1-t)^\alpha\}' &= -\alpha(1-t)^{\alpha-1}, \\
S(t;n+1,\alpha+1)' &= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k \binom{\alpha}{k} kt^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k \binom{\alpha-1}{k-1}\alpha t^{k-1} \\
&= -\alpha S(t;n,\alpha)
\end{aligned}$$

より $(J(t;n+1,\alpha+1))' = -\alpha J(t;n,\alpha)$ となるので、部分積分により、

$$I_7(n,\alpha) = \int_0^1 \frac{J(t;n,\alpha)}{t^{n+1}}dt$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\alpha}\left[\frac{J(t;n+1,\alpha+1)}{t^{n+1}}\right]_0^1 - \frac{n+1}{\alpha}\int_0^1 \frac{J(t;n+1,\alpha+1)}{t^{n+2}}dt \\
&= -\frac{1}{\alpha}J(1;n+1,\alpha+1) - \frac{n+1}{\alpha}I_7(n+1,\alpha+1) \qquad (49)
\end{aligned}
$$

となるが、3. より

$$
J(1;n+1,\alpha+1) = -\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{\alpha}{k} = (-1)^n\binom{\alpha-1}{n+1}
$$

となり、また、

$$
\begin{aligned}
(1-t)^\alpha &= (1-t)^{\alpha-1} - t(1-t)^{\alpha-1}, \\
S(t;n+1,\alpha+1) &= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{\alpha}{k}t^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\left\{\binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1}\right\}t^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}t^k + t\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k-1}t^{k-1} \\
&= S(t;n+1,\alpha) - tS(t;n,\alpha)
\end{aligned}
$$

より

$$
J(t;n+1,\alpha+1) = J(t;n+1,\alpha) - tJ(t;n,\alpha)
$$

となり、よって

$$
\begin{aligned}
I_7(n+1,\alpha+1) &= \int_0^1\left\{\frac{J(t;n+1,\alpha)}{t^{n+2}} - \frac{J(t;n,\alpha)}{t^{n+1}}\right\}dt \\
&= I_7(n+1,\alpha) - I_7(n,\alpha)
\end{aligned}
$$

となるので、(49) は

$$
I_7(n,\alpha) = \frac{1}{\alpha}(-1)^{n+1}\binom{\alpha-1}{n+1} - \frac{n+1}{\alpha}(I_7(n+1,\alpha) - I_7(n,\alpha))
$$

となり、ここから I_7 に関する漸化式

$$
I_7(n+1,\alpha) = \left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right)I_7(n,\alpha) + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\binom{\alpha-1}{n+1} \qquad (50)
$$

が得られる。$I_7(0,\alpha)$ は、

$$I_7(0,\alpha)=\int_0^1\frac{J(t;0,\alpha)}{t}dt=\int_0^1\frac{(1-t)^{\alpha-1}-1}{t}dt=M(\alpha)$$

であり、

$$\begin{aligned}(-1)^n\binom{\alpha-1}{n} &= (-1)^n\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{n!}\\ &= (1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)\end{aligned}$$

に注意すると、(50) より $I_7(n,\alpha)$ は、

$$\begin{aligned}I_7(1,\alpha) &= (1-\alpha)I_7(0,\alpha)-(\alpha-1)=(1-\alpha)(M(\alpha)+1)\\ &= (-1)\binom{\alpha-1}{1}(M(\alpha)+1),\\ I_7(2,\alpha) &= \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)I_7(1,\alpha)+\frac{1}{2}\binom{\alpha-1}{2}\\ &= (1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)(M(\alpha)+1)+\frac{1}{2}(1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\\ &= (-1)^2\binom{\alpha-1}{2}\left(M(\alpha)+1+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

等となり、これを繰り返せば結局

$$I_7(n,\alpha)=(-1)^n\binom{\alpha-1}{n}\left(M(\alpha)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

となることがわかり、また 1., 2. より、

$$M(n+1)=M(1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

となるから 4. が得られる。■

なお、この補題 4 の 1. により、H_- と同様に、非整数の α であれば、$\alpha<0$ に対しても

$$M(\alpha)=M(\alpha+1)+\frac{1}{\alpha}$$

により $M(\alpha)$ を拡張できることになり、以後そのように考える。

この補題 4 の 4. と (47) により、結局 H_+ は、

$$\begin{aligned} H_+(1+\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta-n) \;&=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{j} \frac{\begin{pmatrix}\alpha-1\\ n-j\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\beta+n-1\\ j\end{pmatrix}} \frac{1}{\varepsilon^j} \\ &+(-1)^{n+1}\begin{pmatrix}\alpha-1\\ n\end{pmatrix}\log\varepsilon + \sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{n+1-j}}{j}\begin{pmatrix}\alpha-1\\ n-j\end{pmatrix} \\ &+(-1)^{n}\begin{pmatrix}\alpha-1\\ n\end{pmatrix}(M(\alpha)+M(\beta+n)-M(n+1))+o(1) \end{aligned} \tag{51}$$

となるが、この定数部分は M の拡張を用いれば、さらに少しまとめられることを以下に示す。

補題 5

非整数の α、および自然数 n に対し、

$$(-1)^n\begin{pmatrix}\alpha-1\\ n\end{pmatrix}(M(\alpha)-M(\alpha-n)) = \sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{n-j}}{j}\begin{pmatrix}\alpha-1\\ n-j\end{pmatrix} \tag{52}$$

が成り立つ。

証明

補題 4 の 1. より

$$M(\alpha)-M(\alpha-n) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha-k}$$

となるので、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha-k} = \sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\frac{\begin{pmatrix}\alpha-1\\ n-j\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\alpha-1\\ n\end{pmatrix}}$$

を示せばよい。さらに、

$$\frac{\dbinom{\alpha-1}{n-j}}{\dbinom{\alpha-1}{n}} = \frac{n!}{(n-j)!}\frac{1}{\begin{bmatrix}\alpha-n+j-1\\ j\end{bmatrix}} = \frac{\dbinom{n}{j}}{\dbinom{\alpha-n+j-1}{j}}$$

と書けるので、

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}\dbinom{n}{j}}{j\dbinom{\alpha-n+j-1}{j}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha-k} \tag{53}$$

を示せばよい。$n=1$ のときは、(53) の左辺は $1/(\alpha-1)$ となるので成立する。

$n\geq 2$ とし、$n-1$ までは (53) が成立するとする。このとき、(53) の左辺を D_1 とし、分子を 2 つに分けて

$$\begin{aligned}
D_1 &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\dbinom{n-1}{j-1}+\dbinom{n-1}{j}}{j\dbinom{\alpha-n+j-1}{j}}\\
&= \frac{1}{\alpha-n}+\sum_{j=2}^{n}\frac{(-1)^{j-1}\dbinom{n-1}{j-1}}{j\dbinom{\alpha-n+j-1}{j}}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-1)^{j-1}\dbinom{n-1}{j}}{j\dbinom{\alpha-n+j-1}{j}}\\
&= \frac{1}{\alpha-n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k}\dbinom{n-1}{k}}{(k+1)\dbinom{\alpha-n+k}{k+1}}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-1)^{j-1}\dbinom{n-1}{j}}{j\dbinom{\alpha-n+j-1}{j}}\\
&= \frac{1}{\alpha-n}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k}D_2(k)
\end{aligned}$$

とすると、$D_2(k)$ は、

$$D_2(k) = -\frac{1}{(k+1)\dbinom{\alpha-n+k}{k+1}}+\frac{1}{k\dbinom{\alpha-n+k-1}{k}}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{k!}{\begin{bmatrix}\alpha-n+k\\ k+1\end{bmatrix}}+\frac{(k-1)!}{\begin{bmatrix}\alpha-n+k-1\\ k\end{bmatrix}}\\
&= \frac{(k-1)!(-k+\alpha-n+k)}{\begin{bmatrix}\alpha-n+k\\ k+1\end{bmatrix}} = \frac{(k-1)!(\alpha-n)}{\begin{bmatrix}\alpha-n+k\\ k+1\end{bmatrix}}\\
&= \frac{(k-1)!}{\begin{bmatrix}\alpha-n+k\\ k\end{bmatrix}} = \frac{1}{k\begin{pmatrix}\alpha-n+k\\ k\end{pmatrix}}
\end{aligned}
$$

となるので、よって、

$$
D_1=\frac{1}{\alpha-n}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{\begin{pmatrix}n-1\\ k\end{pmatrix}}{k\begin{pmatrix}\alpha-n+k\\ k\end{pmatrix}}
$$

となる。この右辺の和の部分は、(53) の左辺の $n-1$ の式に等しいので、帰納法の仮定により、

$$
D_1=\frac{1}{\alpha-n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\alpha-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha-k}
$$

となって、n のときにも (53) が成り立つ。■

この補題 5 により、H_+ の $x=1+\varepsilon$ に関する展開式 (51) は結局以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&H_+(1+\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta-n)\\
&\quad= \sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{n-j}}{j}\frac{\begin{pmatrix}\alpha-1\\ n-j\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\beta+n-1\\ j\end{pmatrix}}\frac{1}{\varepsilon^j}+(-1)^{n+1}\begin{pmatrix}\alpha-1\\ n\end{pmatrix}\log\varepsilon\\
&\qquad+(-1)^n\begin{pmatrix}\alpha-1\\ n\end{pmatrix}(M(\alpha-n)+M(\beta+n)-M(n+1))+o(1) \qquad (54)\\
&\qquad(\alpha>0,\ \beta>0,\ n\geq 0,\ \alpha,\beta\notin \boldsymbol{Z}, n\in\boldsymbol{Z})
\end{aligned}
$$

なお、これは (43) の $n=0$ の式も含んでいることに注意する。

9 $x \to 1-0$ の評価の精密化

最後に、$H_-(1-\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta-n)$ の $\varepsilon\to+0$ の評価の精密化を行う。これは、実は H_+ の展開式 (54) に近い形になる。

この場合も、(41) により、

$$H_-(1-\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta-n)=\begin{cases}(-\log\varepsilon)(1+o(1) & (n=0)\\ \varepsilon^{-n}(B(\gamma+1,n)+o(1)) & (n\geq 1)\end{cases} \tag{55}$$

は得られていたが、$n=0$ のときは、反転公式 (18) と (43) により、$\gamma=-\beta>-1$ のときは

$$\begin{aligned}H_-(1-\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta) &= (1-\varepsilon)^{\alpha-1}H_+\left(1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon};\alpha,1-\beta,\beta-1\right)\\ &= (1-\varepsilon)^{\alpha-1}\left(-\log\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}+M(\alpha)+M(1-\beta)+o(1)\right)\\ &= -\log\varepsilon+M(\alpha)+M(1-\beta)+o(1)\end{aligned} \tag{56}$$

が得られる。これが $\gamma<-1$ でも成立すること、および $n=-\beta-\gamma\geq 1$ の場合の展開式

$$H_-(1-\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta-n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j^-}{\varepsilon^j}+B^-\log\varepsilon+A_0^-+o(1) \tag{57}$$

を $\gamma>-1$ で得て、かつそれが $\gamma<-1$ の場合にも成立することを示すことが本節の目標である。先に $\gamma>-1$ の (57) を考え、そのあとで $\gamma<-1$ に対する (56) と (57) を考えることにする。

なお、(57) を求めるには、上の (56) と同じように反転公式 (18) と (54) を用いる方法もあるが、実はそれだと $\gamma>-1$ の場合でも簡単には式が得られない。それは、$\gamma=-\beta-n>-1$ ($\beta<1-n$) のとき、反転公式 (18) と (44) を用いて書き表してみると、

$$\begin{aligned}H_-(1-\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta-n) &= (1-\varepsilon)^{\alpha-n-1}H_+\left(1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon};\alpha,1-\beta-n,\beta-1\right)\\ &= (1-\varepsilon)^{\alpha-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j^+(1-\varepsilon)^j}{\varepsilon^j}+B^+\log\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}+A_0^-+o(1)\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j^+(1-\varepsilon)^{\alpha+j-1}}{\varepsilon^j}+B^+\log\varepsilon+A_0^-+o(1)\end{aligned} \tag{58}$$

となるが、問題は $(1-\varepsilon)^{\alpha+j-1}$ が残る和の部分で、

$$\frac{(1-\varepsilon)^{\alpha+j-1}}{\varepsilon^j} = \frac{1}{\varepsilon^j}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{\alpha+j-1}{k}\varepsilon^k + o(1)$$

より

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j^+(1-\varepsilon)^{\alpha+j-1}}{\varepsilon^j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{\alpha+j-1}{k}\frac{A_j^+}{\varepsilon^{j-k}} + o(1)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{\alpha+j-1}{j-i}\frac{A_j^+}{\varepsilon^i} + o(1)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{\varepsilon^i}\sum_{j=i}^{n}(-1)^j\binom{\alpha+j-1}{j-i}A_j^+ + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{\alpha+j-1}{j}A_j^+ + o(1)\end{aligned}$$

となり、$1/\varepsilon^i$ の係数が A_j^+ と二項係数の積の和になって、それを求めるのが容易でないからである。もちろん、最終形を予想した上で帰納法を用いる手段もあるが、むしろ積分に戻って、H_+ と同様の計算により導く方が早いので、ここではその方針で考える。

$\beta+\gamma=-n\le -1, \gamma=-n-\beta>-1$ とする。この場合、H_- は、

$$H_-(1-\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta-n) = \int_\varepsilon^1 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}(t-\varepsilon)^{-\beta-n}dt \tag{59}$$

となるが、これを (46) 同様に $J(t)$ を用いて 2 つに分ける。

$$\begin{aligned}&H_-(1-\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta-n)\\ &= \int_\varepsilon^1 J(t)t^{\beta-1}(t-\varepsilon)^{-\beta-n}dt + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}\int_\varepsilon^1 t^{\beta+k-1}(t-\varepsilon)^{-\beta-n}dt\\ &= I_8 + I_9\end{aligned} \tag{60}$$

I_9 の積分のうち、$k\le n-1$ のものについては、$t\to\infty$ で可積分なので、

$$\int_\varepsilon^1 t^{\beta+k-1}(t-\varepsilon)^{-\beta-n}dt = \int_\varepsilon^\infty - \int_1^\infty = I_{9,k,1} - I_{9,k,2}$$

に分け、$I_{9,k,1}$ は $t=\varepsilon/s$ と置換すると、

$$I_{9,k,1} = \varepsilon^{k-n}\int_0^1 s^{n-k-1}(1-s)^{-\beta-n}ds = \frac{B(n-k,1-\beta-n)}{\varepsilon^{n-k}}$$

となるが、

$$
B(n-k, 1-\beta-n) = \frac{\Gamma(n-k)\,\Gamma(1-\beta-n)}{\Gamma(1-\beta-k)} = \frac{(n-k-1)!}{\begin{bmatrix} -\beta-k \\ n-k \end{bmatrix}}
$$

$$
= \frac{(n-k-1)!}{(-1)^{n-k}\begin{bmatrix} \beta+n-1 \\ n-k \end{bmatrix}} = \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)\begin{pmatrix} \beta+n-1 \\ n-k \end{pmatrix}}
$$

より

$$
I_{9,k,1} = \frac{1}{(n-k)\begin{pmatrix} \beta+n-1 \\ n-k \end{pmatrix}} \frac{1}{(-\varepsilon)^{n-k}}
$$

となる。また、$I_{9,k,2}$ は、ルベーグ収束定理により

$$
I_{9,k,2} = \int_1^\infty t^{\beta+k-1}(t-\varepsilon)^{-\beta-n}dt = \int_1^\infty t^{k-n-1}dt + o(1) = \frac{1}{n-k} + o(1)
$$

となる。

$k=n$ に対しては、$t=\varepsilon/s$ と置換すると、

$$
\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 t^{\beta+n-1}(t-\varepsilon)^{-\beta-n}dt &= \int_\varepsilon^1 s^{-1}(1-s)^{-\beta-n}ds \\
&= \int_\varepsilon^1 \frac{(1-s)^{-\beta-n}-1}{s}ds + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{s}ds \\
&= M(1-\beta-n) - \log\varepsilon + o(1) \quad (= M(\gamma+1) - \log\varepsilon + o(1))
\end{aligned}
$$

となる。

また、I_8 については、$0 \le t \le 1/2$ では $J(t) = O(t^{n+1})$ なので、

$$
\begin{aligned}
I_8 &= \left(\int_\varepsilon^{1/2} + \int_{1/2}^1\right) J(t)t^{\beta-1}(t-\varepsilon)^{-\beta-n}dt \\
&= \int_0^{1/2-\varepsilon} J(s+\varepsilon)(s+\varepsilon)^{\beta-1}s^{-\beta-n}ds + \int_{1/2}^1 J(t)t^{\beta-1}(t-\varepsilon)^{-\beta-n}dt
\end{aligned}
$$

と分けると、前者においては、

$$
|J(s+\varepsilon)(s+\varepsilon)^{\beta-1}| \le C_1(s+\varepsilon)^{n+\beta} \le \begin{cases} C_2 & (0 \le n+\beta < 1) \\ C_1 s^{n+\beta} & (n+\beta < 0) \end{cases}
$$

なので、$-\beta - n > -1$ よりルベーグ収束定理が使えて、

$$\int_0^{1/2} J(s)s^{-1-n}ds = \int_0^{1/2} \frac{J(s)}{s^{n+1}}\,ds$$

に収束し、後者はそのままルベーグ収束定理が使えて、同じ関数の $[1/2, 1]$ での積分に収束する。よって、

$$I_8 = \int_0^1 \frac{J(t)}{t^{n+1}}\,dt + o(1)$$

となる。この積分は (48) の $I_7(n, \alpha)$ に等しいので、補題 4 の 4. により

$$I_8 = (-1)^n \binom{\alpha - 1}{n} (M(\alpha) - M(n+1)) + o(1)$$

となる。結局、(60) は、$\gamma > -1$ に対して、補題 5 より、

$$\begin{aligned}
&H_-(1-\varepsilon; \alpha, \beta, -\beta - n)\\
&\quad= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\alpha-1}{k} \left\{ \frac{1}{(n-k)\binom{\beta+n-1}{n-k}} \frac{1}{(-\varepsilon)^{n-k}} - \frac{1}{n-k} \right\}\\
&\qquad +(-1)^n \binom{\alpha-1}{n} (M(1-\beta-n) - \log\varepsilon)\\
&\qquad +(-1)^n \binom{\alpha-1}{n} (M(\alpha) - M(n+1)) + o(1)\\
&\quad= \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{j} \frac{\binom{\alpha-1}{n-j}}{\binom{\beta+n-1}{j}} \frac{1}{(-\varepsilon)^j} + (-1)^{n+1} \binom{\alpha-1}{n} \log\varepsilon\\
&\qquad +(-1)^n \binom{\alpha-1}{n} (M(\alpha-n) + M(1-\beta-n) - M(n+1)) + o(1) \qquad (61)\\
&\qquad (\alpha > 0,\ -\beta - n > -1,\ n \geq 0,\ \alpha, \beta \notin \boldsymbol{Z}, n \in \boldsymbol{Z})
\end{aligned}$$

となることがわかる。なおこれは、$n = 0$ の (56) も含んでいる。

この H_- の展開式 (61) と H_+ の展開式 (54) を比較すると、ε の負の巾の項が $-\varepsilon$ になっていることと、定数項の部分の $M(\beta+n)$ が $M(1-\beta-n)$ になっているところが違うだけで、他は全く同じ形になっていることがわかる。

次は、この (61) が H_- の $\gamma < -1$ への拡張に対しても成り立つことを示す。以後、(61) の係数を、(57) のように

$$\begin{aligned} & H_-(1-\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta-n) \\ = & \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j^-(\alpha,\beta,n)}{\varepsilon^j} + B^-(\alpha,\beta,n)\log\varepsilon + A_0^-(\alpha,\beta,n) + o(1) \end{aligned} \tag{62}$$

と書くことにする。

まずは $n=0$ の場合、すなわち (56) が $\gamma=-\beta<-1$、すなわち $\beta>1$ でも成立することを示す。それには、(10) のリフティングと、(41) の $\beta+\gamma>0$ の評価を用いて、$m=-[\gamma]$ に関する帰納法により証明すればよい。

$\gamma>-1$、すなわち $m\leq 1$ では (56) が成り立っているので、$m\geq 2$ に対して (56) を示せばよい。今、$-[\gamma]=m-1$ までは (56) が成り立つとする。$-[\gamma]=m$ に対しては、(10) を用いて γ を一つ大きいもので表すと、

$$\begin{aligned} H_-(1-\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta) &= \frac{1}{1-\varepsilon}\left\{\frac{\alpha+\gamma+1}{\gamma+1}H_-(1-\varepsilon;\alpha,\beta,1-\beta)\right. \\ & \left. -\frac{\beta-1}{\gamma+1}H_-(1-\varepsilon;\alpha+1,\beta-1,1-\beta)\right\} \end{aligned} \tag{63}$$

となるが、右辺の前者は (41) より

$$H_-(1-\varepsilon;\alpha,\beta,1-\beta) = B(\alpha,1)+o(1) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}+o(1) = \frac{1}{\alpha}+o(1)$$

であり、後者は帰納法の仮定により

$$H_-(1-\varepsilon;\alpha+1,\beta-1,1-\beta) = -\log\varepsilon + M(\alpha+1) + M(2-\beta) + o(1)$$

が成り立つ。よって、(63) は

$$\begin{aligned} H_-(1-\varepsilon;\alpha,\beta,-\beta) &= \frac{1}{1-\varepsilon}\left\{\frac{\alpha-\beta+1}{-\beta+1}\frac{1}{\alpha}\right. \\ & \left. -\frac{\beta-1}{-\beta+1}(-\log\varepsilon + M(\alpha+1) + M(2-\beta)) + o(1)\right\} \\ &= \frac{1}{1-\varepsilon}\left\{-\log\varepsilon + M(\alpha+1) + M(2-\beta)) + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{\alpha} + o(1)\right\} \\ &= -\log\varepsilon + M(\alpha+1) + M(2-\beta)) + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{\alpha} + o(1) \end{aligned} \tag{64}$$

となるが、補題 4 の 1. により確かにこれは (56) に一致することがわかる。

これで、帰納法により (56) がすべての $\gamma \notin \boldsymbol{Z}$ に対して成り立つことがわかる。

なお、この $n=0$ に対する証明を振り返ると、m は実質的には使っておらず、(63) の「m によらない」リフティングの式に、「m によらない」(41) の評価式と、(56) の α を $+1$、β を -1 した式を代入して整理するだけの計算を行っている。

(56) は $m\leq 1$ では成立することがわかっているが、上の計算が「m によらない」ので、それに対しても同じ計算を行うことができて、そして当然すでに成り立つことがわかっている結果が得られる。だから、前の $H_\pm$ に対する性質 [i]~[v] に対する証明と同じように、$m\leq 1$ で「m によらない計算」で成り立つことがわかることによって、$m\geq 2$ でも同じ計算によって成立することがわかることになる。

これは、$n\geq 1$ の場合の (62) でも同じ構造であり、よって、それがすでに $\gamma>-1$ $(m\leq 1)$ で成り立つことが示されていることによって、$\gamma<-1$ でも成り立つことが自然に示されることになるので、これで (62) がすべての $n\geq 1, \gamma\notin\boldsymbol{Z}$ で成り立つことが言えることになる。

なお、もちろん、帰納法で $n\geq 1$ の場合の (62) を直接証明することも可能であり、具体的には、A_j^-, B_j^- に対して、

$$\begin{aligned}A_j^-(\alpha,\beta,n)-A_{j+1}^-(\alpha,\beta,n) &= \frac{\alpha+\gamma+1}{\gamma+1}\,A_j^-(\alpha,\beta,n-1)\\ &\quad -\frac{\beta-1}{\gamma+1}\,A_j^-(\alpha+1,\beta-1,n)\quad (j=0,1,\ldots,n)\end{aligned}\tag{65}$$

$$B^-(\alpha,\beta,n) = \frac{\alpha+\gamma+1}{\gamma+1}\,B^-(\alpha,\beta,n-1)-\frac{\beta-1}{\gamma+1}\,B^-(\alpha+1,\beta-1,n)\tag{66}$$

が成り立つことを示すことで証明できる。ここで、(65) の左辺が差になっているのは、リフティング (63) の右辺の $1/(1-\varepsilon)$ のためであり、この右辺をそのまま評価すると右辺の $1/\varepsilon^j$ の係数は、(58) と同様の計算によりいくつかの項の和になってしまうが、逆に $1/(1-\varepsilon)$ を (63) の左辺に回して $(1-\varepsilon)$ 倍に変えてやると、左辺の $1/\varepsilon^j$ の同類項を 2 つの項だけの差にでき、それが (65) の左辺である。そしてそれにより証明を多少簡略化できる。

10 最後に

本稿では、整数の τ に対する [2] を非整数の τ に拡張するのに必要な $F_\ell(x)$ の評価を少し一般化して考察した。非整数の τ に対する証明では、本稿の内容がその前半の主要な部分であるが、むしろその全体の流れを見やすくするため、また式の処理をわかりやすくするために、本筋とはややずれる $H_\pm$ の変形や拡張、評価の部分を本稿として独立させた、ということになっている。

次は、本稿の結果を用いて [2] の方法の非整数の τ への拡張にとりかかることになるが、どうやら当初想定していたほどには [4] や [5],[6] の簡略化にはならなそうなので、それが既に得られている結果の別証明に過ぎないことも合わせて、それをまとめることの価値は、残念ながらますます低くなっているような気がしている。

参考文献

[1] 大槻義彦監修、室谷義昭訳「新数学公式集 I 初等関数」丸善、(1991)

[2] 竹野茂治: 1 次元等エントロピー流に対する Tartar 方程式の解法の改良; 新潟工科大学紀要, **27**, 2022.

[3] R.J.DiPerna: Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics; *Comm.Math.Phys.* **91**, 1–30, 1983.

[4] Ding Xiaxi, Chen Guiqiang, and Luo Peizhu: Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (I)–(III); *Acta Mathematica Scientia* **5**, 415–432, 1985, 433–472, 1985, **6**, 75–120, 1986.

[5] P.L.Lions, B.Perthame, and E.Tadmor: Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-systems; *Comm.Math.Phys.* **163**, 415–431, 1994.

[6] P.L.Lions, B.Perthame, and P.E.Souganidis: Existence and stability of entropy scheme for the hyperbolic system of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates; *Comm.Pure Appl.Math.* **49**, 599–638, 1996.