2007 年 10 月 09 日
(2009 年 01 月 18 日 引用論文の訂正)

Glimm 差分法解説

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/conser.html

目 次

1 はじめに **2**

2 基礎事項 **4**

2.1 用語等 4

2.2 基本波 6

2.3 Riemann 問題の解 8

2.4 Riemann 問題の解の評価 9

3 差分近似解 **13**

3.1 Glimm 差分の構成法 13

3.2 確率変数の必要性 17

4 相互作用評価 **20**

4.1 相互作用評価の定理 20

4.2 相互作用がない場合 23

4.3 相互作用がある場合 26

5 近似解の評価 **28**

5.1 I-曲線 28
5.2 L と全変動の関係 30
5.3 L,Q の評価 32
5.4 収束性のための評価 38

6 収束性 43

6.1 各 t に対する極限 43
6.2 (t, x) に対する極限 46

7 誤差評価とエントロピー条件 48

7.1 誤差評価 48
7.2 エントロピー条件 58

8 最後に 60

A 有界変動関数の性質 60

B Helly の選出定理 69

1 はじめに

本稿では、双曲型保存則方程式系

$$U_t + F(U)_x = 0 \tag{1.1}$$

$(U = U(t, x) \in R^N,\ F(U) \in R^N,\ t > 0,\ x \in R^1)$ の弱解の存在を示す、最も代表的な方法である Glimm の差分法を紹介する。

Glimm の差分法 ([Glimm]) は、Riemann 問題と呼ばれる (1.1) の初期値問題

$$U(0,x) = \begin{cases} U_L & (x<0), \\ U_R & (x>0) \end{cases} \tag{1.2}$$

(U_L, U_R は定ベクトル) の単純な波による解 ([Lax]) に基づく近似解で、その波を煉瓦のように積み上げて作った近似解の有界変動評価を求め、一様有界変動関数列に対する Helly の選出定理を用いて、それが弱解に収束する (部分列を持つ) ことを示す方法である。

$N = 1$、すなわち単独の方程式の場合には、いわゆる Lax-Friedrichs の差分法による近似解、および人工粘性近似解が有界変動評価を持ち、よって Helly の選出定理によりその極限として弱解が得られることが先に示されている ([Oleinik])。Glimm の証明では、近似解の収束性の証明はそれと同じ手法を使っているので、連立方程式の場合に同様の評価を示すことを目標とする点は単純なのであるが、それ以外の部分である近似解の作り方、有界変動評価を示すための種々の補題、誤差評価に対する考察等が、当時 (1965 年) のこの分野の状況からして極めて独創的な手法であり、まさに無から有を生み出したごとき論文で[1]、そして保存則方程式では基本的で非常に重要な結果でもある。保存則方程式の数少ない日本語の解説記事である [西田-川島] には、

> 「グリムの差分法は、方程式系の弱解の構成およびその性質を知るための現在あるほぼ唯一の手段であり、それと同時に方程式系を理解するための一つの関門になっている。この方面を勉強しようと思う読者は是非とも [Glimm] に挑戦していただきたい。」

と書かれている。ただ、この [Glimm] は短い論文でそれなりに難しく、初学者にはやはり大変なのではないかと思う。

しばらくの間、この保存則方程式の分野の教科書は [Smoller] (初版は 1983 年出版) しかなかったが、近年次々と教科書風の本が出版されてきているし (例えば、[Serre], [Dafermos], [Bressan], [Zheng], [LeFloch], [Perthame], [Holden-Risebro], [Lu])、Glimm の差分法も、元々の [Glimm] の証明はよりわかりやすく改良され、説明されるようになってきている。

よって本稿では、連立の保存則方程式に対する Glimm の証明を、それら改良された方法を導入しながら解説することを目標とする。ほぼ [Dafermos] に書かれている内容に

[1] Glimm は元々他分野の専門家だった人なので、もしかしたらそちらの分野ではよく使われる方法も中には含まれているのかもしれない。

沿った形で紹介するが、[Dafermos] には [Young] 等により追加された結果なども含まれているので、本稿では必要最小限に説明していきたい。

2 基礎事項

2.1 用語等

まずこの節では、双曲型保存則方程式に関する基礎的な事柄について簡単に紹介する。詳しくは、[竹野], [Smoller], [Dafermos], [西田-川島], [浅倉] などを参照のこと。

(1.1) の U は N 次元ベクトル

$$U = {}^T(u_1, u_2, \ldots, u_N) \quad ({}^T \text{は転置})$$

で、$F(U)$ はある領域 $\Omega(\ni U)$ 上の滑らかな既知関数

$$F(U) = {}^T(f_1(U), f_2(U), \ldots, f_N(U))$$

であるとする。方程式 (1.1) では、$U = U(t, x)$ が未知関数 (N 次元ベクトル値) である。

$F(U)$ が U に関して 1 次式なら (1.1) は線形の方程式となるが、ここでは主に非線形の方程式を扱う。

(1.1) が 双曲型 であるとは、行列

$$\nabla_U F(U) = \begin{bmatrix} \nabla_U f_1(U) \\ \vdots \\ \nabla_U f_N(U) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_N}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_N}{\partial u_N} \end{bmatrix}$$

が、$U \in \Omega$ に対して N 個の異なる実数の固有値

$$\lambda_1(U) < \lambda_2(U) < \cdots < \lambda_N(U)$$

を持つことを言う。固有値 $\lambda_j(U)$ に対する $\nabla_U F(U)$ の右固有ベクトル (でかつ U に関して滑らかなもの) を $r_j(U)$ とする:

$$\nabla_U F(U) r_j(U) = \lambda_j(U) r_j(U) \quad (r_j(U) \neq 0)$$

これに対し、Ω 上で恒等的に

$$\nabla_U \lambda_j(U) \cdot r_j(U) = \left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial u_1}(U), \ldots, \frac{\partial \lambda_j}{\partial u_N}(U) \right) \cdot r_j(U) = 0$$

となるとき、j-特性方向は 線形退化 であるといい、Ω 上のすべての U に対し

$$\nabla_U \lambda_j(U) \cdot r_j(U) \neq 0$$

であるとき、j-特性方向は 真性非線形 であるという。この場合、必要なら $r_j(U)$ の代わりに $-r_j(U)$ を取ることにより、

$$\nabla_U \lambda_j(U) \cdot r_j(U) > 0$$

であるとする。

本稿では、初期値 $U_0(x) \in L^1_{loc}(R)$ に対する初期値問題:

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = 0 \quad (t > 0, \ \ x \in R), \\ U(0, x) = U_0(x) \quad (x \in R) \end{cases} \tag{2.1}$$

を考える。

$U(t, x) \in L^1_{loc}((0, \infty) \times R)$ $(U(t, x) \in \Omega)$ が (2.1) の 弱解 であるとは、任意の $\phi(t, x) \in C^1_0([0, \infty) \times R)$ に対し

$$\iint_{t>0} \{\phi_t U + \phi_x F(U)\} dt dx + \int_R \phi(0, x) U_0(x) dx = 0 \tag{2.2}$$

を満たすことを言う。

弱解は一般に一意的ではないから、弱解は次の エントロピー条件 を満たすことも要請される:

$\eta(U)$ が凸なエントピー対 $(\eta(U), q(U))$ に対して、不等式

$$\iint_{t>0} \{\phi_t \eta(U) + \phi_x q(U)\} dt dx \geq 0 \tag{2.3}$$

が、任意の非負な $\phi \in C_0^1((0,\infty) \times R)$ に対して成り立つこと。

ここで、Ω 上のスカラー関数の組 $(\eta(U), q(U))$ がエントロピー対 であるとは、

$$\nabla_U q(U) = \nabla_U \eta(U) \nabla_U F(U) \tag{2.4}$$

を満たすことをいう。

もし $U(t,x)$ が (1.1) の滑らかな解であれば、

$$\begin{aligned} &\eta(U(t,x))_t + q(U(t,x))_x = \nabla_U \eta U_t + \nabla_U q U_x = \nabla_U \eta (U_t + \nabla_U F U_x) \\ &= \quad \nabla_U \eta (U_t + F_x) = 0 \end{aligned}$$

となるので、これは 追加保存則 と呼ばれることもある。

(2.4) は N 本の方程式なので、これは $N \geq 3$ のときは η, q に対する過剰決定系となり一般にはエンロピー対があるかどうかは自明ではないが、物理的に意味を持つ保存則方程式系はそのようなエントロピー対を持つことが多い。

2.2 基本波

Riemann 問題 とは、初期値 (1.2) に対する初期値問題 (2.1) のことをいう。Riemann 問題の解は、[竹野] で見たように次の基本波 (エントロピー条件を満たす弱解) によって構成される:

1. j-特性方向が真性非線形の場合の j-膨張波:

$$U(t,x) = \begin{cases} U_1 & (x < \lambda_j(U_1)t), \\ V(x/t) & (\lambda_j(U_1)t \leq x \leq \lambda_j(U_2)t), \\ U_2 & (\lambda_j(U_2)t < x) \end{cases} \tag{2.5}$$

ここで、U_1, U_2 は定ベクトル、$V = V(\xi)$ は、

$$\begin{cases} V'(\xi) \mathbin{/\!/} r_j(V(\xi)) & (\xi \geq \lambda_j(U_1)), \\ \lambda_j(V(\xi)) = \xi & (\xi \geq \lambda_j(U_1)), \\ V(\lambda_j(U_1)) = U_1 \end{cases} \tag{2.6}$$

を満たす関数。各 U_1 に対して、Ω 内での U_2 の取りうる集合 (Ω 上の U_1 から始まる半曲線) を、$R_j(U_1)$ $(\ni U_2)$ と書き、膨張波曲線 と呼ぶ。

$R_j(U_1)$ は、(2.6) を満たす $V(\xi)$ の値の集合でもあり、ベクトル場 $r_j(U)$ の積分曲線 (の一部) でもあり、また、x を左から右に見ていくと、膨張波解の値がこの $R_j(U_1)$ 上を連続的に移動することもわかる。

2. j-特性方向が真性非線形の場合の j-衝撃波:

$$U(t,x) = \begin{cases} U_1 & (x < st), \\ U_2 & (x > st) \end{cases}$$

ここで、U_1, U_2 は定ベクトルで、これらと s は **Rankine-Hugoniot** 条件:

$$s(U_2 - U_1) = F(U_2) - F(U_1) \tag{2.7}$$

と **Lax** 条件:

$$\begin{cases} \lambda_{j-1}(U_1) < s < \lambda_j(U_1), \\ \lambda_j(U_2) < s < \lambda_{j+1}(U_2) \end{cases} \tag{2.8}$$

(ただし、$j = 1$、または $j = N$ のときは、それぞれ λ_{j-1}, λ_{j+1} に関する不等式部分は無条件) を満たすもの。

U_1 に対し、この U_2 の取りうる集合 (U_1 から始まる半曲線) を $S_j(U_1)$ と書いて衝撃波曲線 と呼ぶ。

$R_j(U_1)$ と $S_j(U_1)$ は $U = U_1$ で C^2 級でつながり、1 パラメータ ε を使って、以下のものを満たすものとして $U = \hat{U}_j(\varepsilon) = \hat{U}_j(\varepsilon; U_1)$ と書ける:

$$R_j(U_1) = \{\hat{U}_j(\varepsilon);\ \varepsilon > 0\}, \quad S_j(U_1) = \{\hat{U}_j(\varepsilon);\ \varepsilon < 0\}$$

$$\begin{cases} \hat{U}_j(0) = U_1, \\ \hat{U}_j'(\varepsilon) = r_j(\hat{U}_j(\varepsilon)) & (\varepsilon \geq 0), \\ \hat{U}_j''(\varepsilon) = \nabla_U r_j(\hat{U}_j(\varepsilon)) \cdot r_j(\hat{U}_j(\varepsilon)) & (\varepsilon \geq 0) \end{cases} \tag{2.9}$$

(詳しくは、例えば [竹野] 参照)。

3. j-特性方向が線形退化の場合の j-接触不連続:

$$U(t,x) = \begin{cases} U_1 & (x < st), \\ U_2 & (x > st) \end{cases}$$

ここで、U_1, U_2, s は Rankine-Hugoniot 条件 (2.7) と

$$s = \lambda_j(U_1) = \lambda_j(U_2) \tag{2.10}$$

を満たすもの。U_1 に対して U_2 の取りうる集合 (U_1 を通る曲線) を $C_j(U_1)$ と書いて接触不連続曲線 と呼ぶ。これは、1 パラメータ ε を使って、

$$U = \hat{U}_j(\varepsilon) = \hat{U}_j(\varepsilon; U_1), \quad C_j(U_1) = \{\hat{U}_j(\varepsilon)\}$$

$$\begin{cases} \hat{U}_j(0) = U_1, \\ \hat{U}_j'(\varepsilon) = r_j(\hat{U}_j(\varepsilon)), \\ \hat{U}_j''(\varepsilon) = \nabla_U r_j(\hat{U}_j(\varepsilon)) \cdot r_j(\hat{U}_j(\varepsilon)) \end{cases} \tag{2.11}$$

を満たすものと書ける。j-特性方向が真性非線形の場合は、$\hat{U}_j(\varepsilon)$ は U_1 から出る j-衝撃波曲線と j-膨張波曲線の 2 本の半曲線をつないだものであるのに対し、j-特性方向が線形退化の場合は、$\hat{U}_j(\varepsilon)$ は U_1 を通る j-接触不連続曲線だけであり、$r_j(U)$ の積分曲線そのものとなっている。

(2.9), (2.11) より、線形退化、真性非線形、いずれの場合も、$\hat{U}_j(\varepsilon)$ は、

$$\hat{U}_j(\varepsilon) = \hat{U}_j(\varepsilon; U_1) = U_1 + \varepsilon r_j(U_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} \nabla_U r_j(U_1) \cdot r_j(U_1) + O(\varepsilon^3)$$

と書けることになる。

2.3 Riemann 問題の解

膨張波、衝撃波、接触不連続は、その波と特性速度との関係 (2.5), (2.8), (2.10) から、次のことがわかる:

$t = 0$ で $x = x_1$ から出る i-波 (i-膨張波、i-衝撃波、i-接触不連続) と、定ベクトル U_M をはさんで右に $x = x_2$ $(x_1 < x_2)$ から出る j-波を並べたとき、

- $i < j$ ならば i-波と j-波は遠ざかる
- $i > j$ ならば i-波と j-波は近づいて、ある時刻でぶつかる
- $i = j$ のときは、i-波と j-波の少なくとも一方が衝撃波のときは近づいてぶつかり、いずれも衝撃波でないとき (両方が膨張波、または両方が接触不連続) は、両者の波の間隔は一定のままで、近づきもしないし、離れもしない。

そして、これにより、一般の Riemann 問題 (1.1), (1.2) の解は、1-波、2-波、...、N-波を左から右に順に並べて作れること、すなわち、$U_0 = U_L$, $U_N = U_R$ に対し

$$U_j = \hat{U}_j(\varepsilon_j; U_{j-1}) \quad (j = 1, 2, \ldots, N)$$

となる ε_j $(1 \le j \le N)$ を求めることで、U_1 から U_{N-1} までの定ベクトル状態を扇型で挟むような N 個の波により作られることがわかる (図 2.1,2.2)。 U_L, U_R が十分近

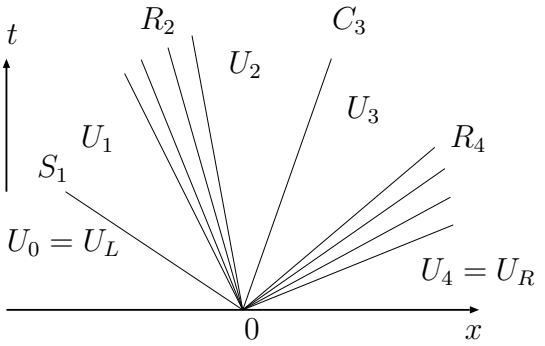

図 2.1: (t, x) 平面での解の表現

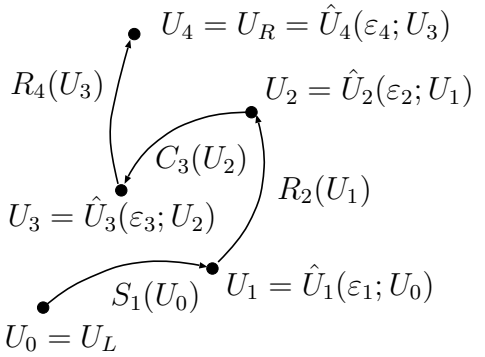

図 2.2: $\Omega(\subset R^4)$ での各曲線

ければ、その Rimann 問題の解は、このような形としては一意的に解が求まる。

2.4 Riemann 問題の解の評価

後で必要となる、Riemann 問題の解の評価をここで行っておく。

今、$T(\varepsilon; U) = T(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N; U)$ を、

$$T(\varepsilon; U) = \hat{U}_N(\varepsilon_N; \hat{U}_{N-1}(\varepsilon_{N-1}; \cdots (\hat{U}_1(\varepsilon_1; U)) \cdots))$$

と書くこととすれば、Riemann 問題は、

$$T(\varepsilon; U_L) = U_R \tag{2.12}$$

を満たす $\varepsilon = {}^T(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ を求めることに帰着される。それは陰関数定理によるのであるが、$T(0;U) = U$ であり、また $\nabla_\varepsilon T(0;U)$ は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_j} T(\varepsilon; U)\bigg|_{\varepsilon=0} &= \lim_{\varepsilon_j \to 0} \frac{T(0, \cdots, \varepsilon_j, \cdots, 0; U) - T(0;U)}{\varepsilon_j} \\ &= \lim_{\varepsilon_j \to 0} \frac{\hat{U}_j(\varepsilon_j; U) - U}{\varepsilon_j} = \frac{\partial \hat{U}_j}{\partial \varepsilon_j}(0;U) = r_j(U) \end{aligned}$$

より、

$$\nabla_\varepsilon \{T(\varepsilon; U_L) - U_R\}|_{\varepsilon=0, U_L = U_R = \bar{U}} = [r_1(\bar{U}), \ldots, r_N(\bar{U})]$$

となる。この右辺は正則行列だから、陰関数定理により方程式 (2.12) を $\bar{U} \in \Omega$ の近傍で ε について解くことができる。具体的には、ある正数 $\hat{\delta}_1 > 0$ が存在して、

$$|U_L - \bar{U}| < \hat{\delta}_1, \quad |U_R - \bar{U}| < \hat{\delta}_1$$

に対して、(2.12) を

$$\varepsilon = \alpha(U_L, U_R)$$

の形に書き表すことができる。これは C^2 級であり、$\alpha(U,U) = 0$ を満たす。必要なら、$\hat{\delta}_1$ を少し小さく取って、

$$\sup_{U_L, U_R \in B_{\hat{\delta}_1}(\bar{U})} (|\nabla_{U_L} \alpha(U_L, U_R)| + |\nabla_{U_R} \alpha(U_L, U_R)|) \le M_1 \tag{2.13}$$

とすることもできる。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \alpha(U_L, U_R) = \alpha(U_L, U_R) - \alpha(U_L, U_L) \\ &= \int_0^1 \nabla_{U_R} \alpha(U_L, U_L + \theta(U_R - U_L)) \cdot (U_R - U_L) d\theta \end{aligned}$$

であるから、(2.13) より、$|U_L - \bar{U}| < \hat{\delta}_1$, $|U_R - \bar{U}| < \hat{\delta}_1$ に対して

$$|\varepsilon| = |\alpha(U_L, U_R)| \leq M_1 |U_R - U_L| \tag{2.14}$$

と、$|\varepsilon|$ を $|U_R - U_L|$ で評価できる。

逆に、$U_R = T(\varepsilon; U_L)$ を考えると、ある $\hat{\delta}_2 > 0$ を取って

$$\sup_{|\varepsilon| < \hat{\delta}_2, U_L \in B_{\hat{\delta}_1}(\bar{U})} |\nabla_\varepsilon T(\varepsilon; U_L)| \leq M_2 \tag{2.15}$$

とできるので、

$$U_R - U_L = T(\varepsilon; U_L) - T(0; U_L) = \int_0^1 \nabla_\varepsilon T(\theta\varepsilon; U_L) \cdot \varepsilon d\theta$$

より、$|\varepsilon| < \hat{\delta}_2$, $|U_L - \bar{U}| < \hat{\delta}_1$ に対して

$$|U_R - U_L| = |T(\varepsilon; U_L) - U_L| \leq M_2 |\varepsilon| \tag{2.16}$$

となる。

しかし、$U_L, U_R \in B_{\hat{\delta}_1}(\bar{U})$ でも、Riemann 問題の解 (の途中の値) は $B_{\hat{\delta}_1}(\bar{U})$ の中に収まるとは限らない。解の途中の値は、

$$\tilde{\varepsilon} = {}^T(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{j-1}, \theta\varepsilon_j, 0, \ldots, 0) \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

に対して

$$\tilde{U} = T(\tilde{\varepsilon}; U_L)$$

と表すことができる[2]。このとき、(2.14), (2.16) により、

$$\begin{aligned} |\tilde{U} - \hat{U}| &\leq |T(\tilde{\varepsilon}; U_L) - U_L| + |U_L - \bar{U}| \leq M_2 |\tilde{\varepsilon}| + |U_L - \bar{U}| \\ &\leq M_2 |\varepsilon| + |U_L - \bar{U}| = M_2 |\alpha(U_L, U_R)| + |U_L - \bar{U}| \\ &\leq M_2 M_1 |U_L - U_R| + |U_L - \bar{U}| \\ &\leq (1 + M_1 M_2) |U_L - \bar{U}| + M_1 M_2 |U_R - \bar{U}| \end{aligned}$$

[2] ε_j が不連続解のときには、解の途中の値以外のものも表していることになる。

となるので、

$$(1 + 2M_1M_2)\hat{\delta}_3 \leq \hat{\delta}_1 \tag{2.17}$$

となる $\hat{\delta}_3$ を取れば、$U_L, U_R \in B_{\hat{\delta}_3}(\bar{U})$ に対し途中の解の値 $\tilde{U} = T(\tilde{\varepsilon}; U_L)$ はすべて $B_{\hat{\delta}_1}(\bar{U})$ に収まることになる。よって、その途中の値を初期値とするような Riemann 問題を再び解くことができることになる。

しかし、今度はその解が $B_{\hat{\delta}_1}(\bar{U})$ に収まる保証はないので、これを繰り返していくには (実際に Glimm の差分ではそのようなことを繰り返すのであるが)、このような局所的な逐次評価だけでは無理で、より大域的な評価、アプリオリな評価が必要になる。

また、$U_R = T(\varepsilon; U_L)$ は $|U_L - \bar{U}| < \hat{\delta}_1$, $|\varepsilon| < \hat{\delta}_2$ のとき、$|U_R - \bar{U}| < \hat{\delta}_1$ であるとは限らないので、$\hat{\delta}_2$ を少し小さくして、

$$|U_L - \bar{U}| < \hat{\delta}_3, \quad |\varepsilon| < \hat{\delta}_2 \quad \Rightarrow \quad |U_R - \bar{U}| = |T(\varepsilon; U_L) - \bar{U}| < \hat{\delta}_1$$

が成り立つようにしておく。これは (2.16) より、

$$|U_R - \bar{U}| \leq |U_R - U_L| + |U_L - \bar{U}| < M_2|\varepsilon| + \hat{\delta}_3$$

であるので、例えば

$$0 < \hat{\delta}_2 \leq \frac{\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_3}{M_2} \tag{2.18}$$

としておけば可能である。

さらに、

$$U_L, U_R \in B_{\hat{\delta}_3}(\bar{U}) \quad \Rightarrow \quad |\varepsilon| = |\alpha(U_L, U_R)| < \hat{\delta}_2$$

となるように $\hat{\delta}_3$ を取ることにする。これは、(2.14) より、

$$|\varepsilon| \leq M_1|U_R - U_L| \leq M_1(|U_R - \bar{U}| + |U_L - \bar{U}|) < 2M_1\hat{\delta}_3$$

であるから、

$$2M_1\hat{\delta}_3 \leq \hat{\delta}_2 \tag{2.19}$$

であればよい。

ここで、(2.18) と (2.19) とから自然に (2.17) が導かれるので、結局 $\hat{\delta}_2$, $\hat{\delta}_3$ は (2.18) と (2.19) とを満たすように取ればよいことがわかる。

3 差分近似解

3.1 Glimm 差分の構成法

この節では、Glimm 差分近似解の作り方について説明する。

Glimm 差分は、基本的には初期値を階段関数で近似して、それに対する複数個の Riemann 問題を解くことで短い時間の解 (局所解) を作り、ある時間でまたそれを階段関数で近似してそれを初期値とする局所解を作る、ということを繰り返す。

この構成法の中で、階段関数への近似の際に確率変数を利用するので、この Glimm 差分は ランダム選択法 (random choice method) とも呼ばれる。

非線形の方程式なので、厳密には局所解を作ることができるための条件や近似解の評価も近似解の 1 ステップ毎に変化し、本当はそれを検証しつつ近似解を構成していく必要があるが、それらは後回しにしてこの節では近似解の構成法のみを扱うことにする。

まず、初期値 $U_0(x)$ は有界変動関数であるとする:

$$\mathrm{TV}_R U_0 < \infty$$

なお、TV_R は、R 上の全変動を表す (詳しくは、A 節参照)。

この初期値に対して、空間方向 (x) の差分幅 Δx、時間方向 (t) の差分幅 Δt の、初期値問題 (2.1) に対する差分近似解 $U^{\Delta}(t,x)$ を構成する。

今、これから構成する $U^{\Delta}(t,x)$ に対する特性速度 $\lambda_j(U^{\Delta})$ の値は一様に有界であるとする:

$$\sup_{1\leq j\leq N,\ t>0,\ x\in R} |\lambda_j(U^{\Delta}(t,x))| = \Lambda_0 < \infty \tag{3.1}$$

本来は、これは示すべき事柄であるが、証明は後回しとする。

1. Λ を、$\Lambda > \Lambda_0$ なる定数とし、小さい正数 Δx に対し、

   $$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \Lambda > \Lambda_0 \tag{3.2}$$

   となるように取る。

   なお、この条件 (3.2) は、**Courant-Friedrichs-Lewy** 条件 (CFL 条件) とも呼ばれ、Δt は Δx と解 (波の速度) に応じて小さく取らなければならないことを意味している。

2. まずは初期値を階段関数で近似する。

   奇数でかつ

   $$(|m|+1)\Delta x \leq \frac{1}{\Delta x} \tag{3.3}$$

   を満たすすべての m に対して、

   $$U^0_m = U_0(m\Delta x)$$

   とし、この値を $2\Delta x$ 幅で持つ階段関数を $U^{\Delta}(0,x)$ とする:

   $$U^{\Delta}(0,x) = U^0_m \quad ((m-1)\Delta x \leq x < (m+1)\Delta x) \tag{3.4}$$

   大きい x に対しては、次のように $U^{\Delta}(0,x)$ は定ベクトルとする: (3.3) を満たす最大の奇数を m_0 とするとき、$U^{\Delta}(0,x)$ は (3.4) によって $(-m_0-1)\Delta x \leq x < (m_0+1)\Delta x$ で定義されることになるが、その外では、

   $$U^{\Delta}(0,x) = \begin{cases} U^0_{\infty} & (x \geq (m_0+1)\Delta x), \\ U^0_{-\infty} & (x < (-m_0-1)\Delta x) \end{cases}$$

   と定める。ここで、$U^0_{\pm\infty}$ は

   $$U^0_{\pm\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} U_0(x)$$

とする。$U_0(x)$ は R 上の有界変動関数なので、この極限は確かに存在する (詳しくは A 節参照)。

階段部分は、$2(m_0+1)\Delta x$ 幅であり、この幅も段差の個数も有限なので、この $U^\Delta(0,x)$ はせいぜいこの幅でしか $U_0(x)$ を近似しないように見える。しかし、(3.3) よりこの幅はほぼ $2/\Delta x$ 幅に等しく、よって Δx が 0 に近くなるとだんだんこの幅が広くなり、最終的には $U_0(x)$ 全体を近似していくことになる。

なお、このような有限範囲への切り捨ては、[Glimm], [Smoller], [Dafermos] 等には書かれていないが、その方が後の説明にも都合がいいし、これにより近似作業の手続きの有限性も保証されるので、ここではこのようにすることにする。

3. この階段関数 $U^\Delta(0,x)$ を初期値とみて、初期値問題 (2.1) の解を作る。$U^\Delta(0,x)$ は階段関数なので、その段差のところで丁度 Riemann 問題となる。つまり、奇数の m $(-m_0-2 \le m \le m_0)$ に対し、

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = 0 \quad (0 < t < \Delta t, \quad m\Delta x \le x < (m+2)\Delta x), \\ U(0,x) = \begin{cases} U^0_m & (m\Delta x \le x < (m+1)\Delta x), \\ U^0_{m+2} & ((m+1)\Delta x \le x < (m+2)\Delta x) \end{cases} \end{cases}$$

のような、$x = (m+1)\Delta x$ 中心の Riemann 問題を解いて、その解をその範囲での $U^\Delta(t,x)$ とする (図 3.1)。

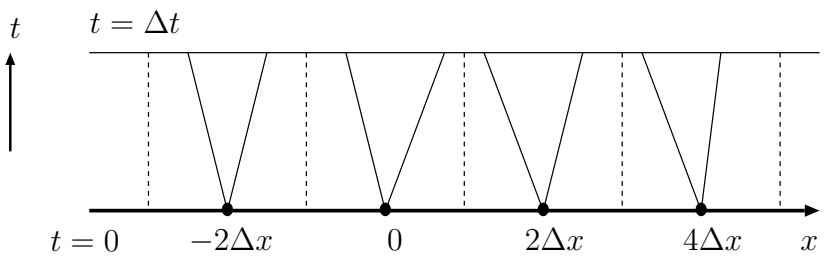

図 3.1: $0 < t < \Delta t$ での $U^\Delta(t,x)$

Riemann 問題の波の速度 (dx/dt) は、いずれの波もその両側の状態の特性速度でおさえられ、Λ_0 を越えることはない。よって、CFL 条件 (3.2) により、その波は時間 Δt までの間に Δx 幅までは広がらず、よって隣り合う波がぶつかることはない。

なお、2. で、$t = 0$ での値は $(-m_0-1)\Delta x \le x < (m_0+1)\Delta x$ の外では定ベクトルとしたので、そこでは段差はなく、その定ベクトル値がそのまま解となるので、$0 < t < \Delta t$ では $(-m_0-2)\Delta x \le x < (m_0+2)\Delta x$ の外ではその定ベクトルの値が $U^\Delta(t,x)$ となる。

4. $t = \Delta t$ での U^{Δ} の値 (階段関数) は、すべての偶数の m に対して

$$U_m^1 = U^{\Delta}(\Delta t - 0, (m + \theta_1)\Delta x)$$

とし、

$$U^{\Delta}(\Delta t, x) = U_m^1 \quad ((m-1)\Delta x \le x < (m+1)\Delta x) \tag{3.5}$$

と定める。ここで、θ_1 は $-1 < \theta_1 < 1$ である値で、これを後で確率変数と考えることになる。

$U^{\Delta}(t, x)$ の段差は、$t = 0$ では偶数の k に対して $x = k\Delta x$ のところにあったが、$t = \Delta t$ では奇数の k に対して $x = k\Delta x$ のところにできることになる。

また、$t = \Delta t$ ではすべての x に対し (3.5) で $U^{\Delta}(\Delta t, x)$ を決めるが、実際には $(-m_0 - 2)\Delta x \le x < (m_0 + 2)\Delta x$ の外では定ベクトルとなることになる。

5. 以下この 3., 4. を繰り返して先に進めていく。

$t_n = n\Delta t$ とし、$n + m$ が奇数であるような $n(\ge 1)$, m に対し

$$\mathrm{Cell}_m^n = \{(t, x);\ t_{n-1} \le t < t_n,\ (m-1)\Delta x \le x < (m+1)\Delta x\}$$

と書くことにするとき、$t_{n-1} < t < t_n$ では $t = t_{n-1}$ での階段関数の値 $U^{\Delta}(t_{n-1}, x)$ に対して、各セル Cell_m^n 内で Riemann 問題を解くことで $U^{\Delta}(t, x)$ を作り、$t = t_n$ では、

$$U_m^n = U^{\Delta}(t_n - 0, (m + \theta_n)\Delta x)$$

とし、

$$U^{\Delta}(t_n, x) = U_m^n \quad ((m-1)\Delta x \le x < (m+1)\Delta x)$$

によって $t = t_n$ で、有限段で $2\Delta x$ 幅の段を持つ階段関数を作る。ここで、θ_n は $-1 < \theta_n < 1$ とする。

以後、この階段関数の値 U_m^n を作るために代表値を取る点を、

$$a_m^n = (t_n, (m + \theta_n)\Delta x) \quad (n + m \text{ は奇数})$$

のように書くことにする。

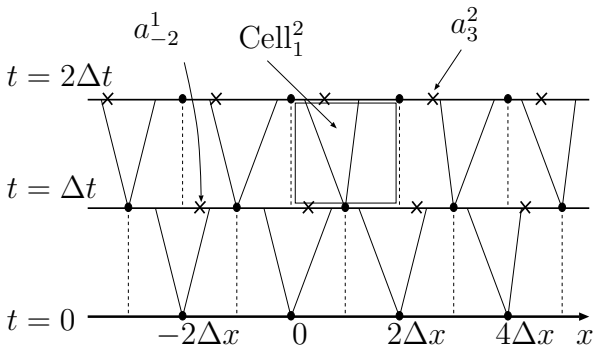

図 3.2: $0 < t < 2\Delta t$ での $U^{\Delta}(t, x)$

この構成法では、このようにして近似解が作り続けていけるかどうかは考えていなかったが、そのためには次のようなことを考える必要がある。

- Riemann 問題は、一般には十分近い定ベクトル値 (ある小さい近傍内の値) についてしか解の存在が保証されず、先の方に進んでいくにつれて、その階段値がそのような近傍から出てしまうかもしれない。そうなってしまうとその先に進めなくなる。
- 先の方に進んでいくにつれて、(3.1) が満たされなくなってしまうかもしれない。これが崩れると、一定の Δt では差分を作り続けられなくなる。

3.2 確率変数の必要性

3.1 節で説明した Glimm 差分の構成で、θ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ は確率変数と考える、と書いたが、この節ではその理由について簡単に説明する。ここでは、[Smoller] に書かれている話を紹介する。

今、例えば初期値 $U_0(x)$ 自体が Riemann 問題の初期値 (1.2) の形であり、しかも $U_R \in S_{j_0}(U_L)$、すなわちこの U_0 に対する解が単なる j_0-衝撃波

$$U(t, x) = \begin{cases} U_L & (x < st), \\ U_R & (x > st) \end{cases} \tag{3.6}$$

である場合を考えてみる。今、s は $s > 0$ であるとする。

Glimm 差分でこの $U_0(x)$ に対する近似解を作ってみよう。もちろん $0 < s < \Lambda_0 < \Lambda$ である。

もし、θ_1,θ_2,... が何でもよいならば、例えばそれを全部 0 にしてみるとどうなるであろうか。

まず、$t = 0$ では、

$$U_m^0 = \begin{cases} U_L & (m = -1, -3, \ldots), \\ U_R & (m = 1, 3, \ldots) \end{cases}$$

であるので、段差は $t = 0$ のみに現れ、$0 < t < \Delta t$ では、(Cell_0^1 での) j_0-衝撃波

$$U^\Delta(t, x) = \begin{cases} U_L & (x < st), \\ U_R & (x > st) \end{cases}$$

となる。次に $t = \Delta t$ では、$s > 0$ より $\theta_1 = 0$ ならば

$$\begin{aligned} U_0^1 &= U^\Delta(\Delta t, \theta_1 \Delta x) = U^\Delta(\Delta t, 0) = U_L, \quad (= U_{-2}^1 = U_{-4}^1 = \cdots) \\ U_2^1 &= U_R \quad (= U_4^1 = U_6^1 = \cdots) \end{aligned}$$

となるので、段差は $x = \Delta x$ に現れる。よって、$\Delta t < t < 2\Delta t$ では、(Cell_1^2 での) j_0-衝撃波

$$U^\Delta(t, x) = \begin{cases} U_L & (x - \Delta x < s(t - \Delta t)), \\ U_R & (x - \Delta x > s(t - \Delta t)) \end{cases}$$

が得られ、同様に $t = 2\Delta t$ では、段差は $x = 2\Delta x$ に出ることになる (図 3.3)。

つまり、U_L, U_R の段差は、この近似解では Δt 毎に Δx ずつ右にずれてしまうので、$\Delta x \to +0$ の極限では、段差は

$$\frac{x}{t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \Lambda$$

上に現れることになり、

$$U(t, x) = \begin{cases} U_L & (x < \Lambda t), \\ U_R & (x > \Lambda t) \end{cases}$$

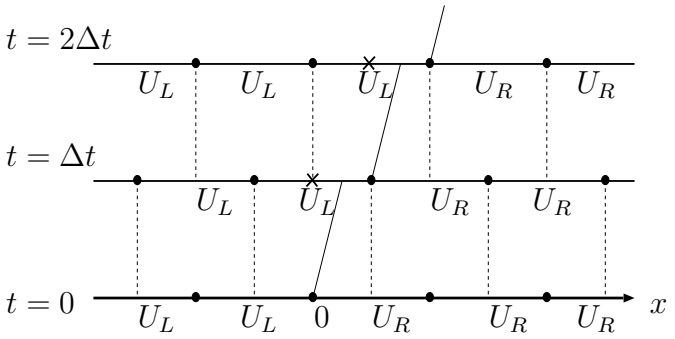

図 3.3: $\theta_n = 0$ の場合

に収束することになるので、正しい弱解 (3.6) にはならない。

これは、$\theta_n = 0$ でなくても、常に

$$-\Delta x < \theta_n \Delta x < s\Delta t$$

の範囲に取ってしまえば、上と全く同じ近似解になってしまうことがわかる。

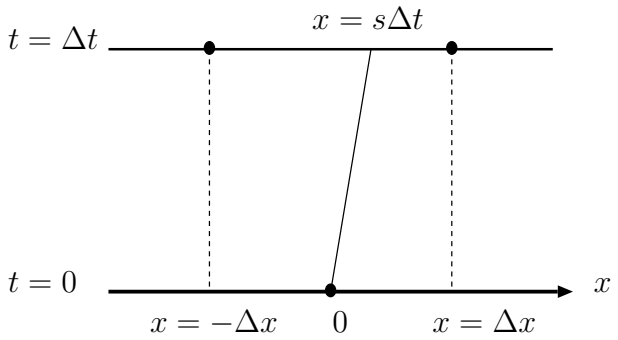

図 3.4: $x = s\Delta t$

逆に、θ_n を常に

$$s\Delta t < \theta_n \Delta x < \Delta x$$

と取ってしまうと、今度は $x = st$ の不連続線が 1 ステップ毎に $-\Delta x$ ずつづれてしまうので、その極限は $x = -\Lambda t$ で段差を持つものになってしまい、やはり正しい弱解 (3.6) にはならない。

よって、正しく $x = st$ で段差ができるようにするには「適当に」θ_n を散らす必要があり、そこで確率を用いるわけである。

例えば θ_1 が $(-1, 1)$ 内の一様な確率変数であるとすると、$t = \Delta t$ での U_0^1 の決定において、$-\Delta x < \theta_1 \Delta x < s\Delta t$ である確率 P_1 は

$$P_1 = \frac{s\Delta t + \Delta x}{2\Delta x} \tag{3.7}$$

であり、$s\Delta t < \theta_1 \Delta x < \Delta x$ である確率 P_2 は

$$P_2 = \frac{\Delta x - s\Delta t}{2\Delta x} \tag{3.8}$$

となる。前者の場合は、$U_0^1 = U_L$, $U_2^1 = U_R$ なので、$t = \Delta t$ での段差の位置 x_s は $x_s = \Delta x$ であり、後者の場合は $U_0^1 = U_R$, $U_{-2}^1 = U_L$ なので、x_s は $x_s = -\Delta x$ となる。

よって、(3.7), (3.8) により、θ_1 が $(-1, 1)$ を一様に変化する場合の $t = \Delta t$ での段差の位置 x_s の平均値 (期待値) $\bar{x}_s$ は、

$$\bar{x}_s = P_1 \Delta x + P_2(-\Delta x) = \frac{s\Delta t + \Delta x}{2} - \frac{\Delta x - s\Delta t}{2} = s\Delta t$$

となり、正しい衝撃波の位置になる。

もちろん、$t = \Delta t$ では、段差の位置は実際には Δx か $(-\Delta x)$ のいずれかにしかならないのであるが、θ_1,θ_2,... の一様な確率変数により、その段差は $x = st$ の周辺に集まることになり、平均的に $x = st$ を再現することになる (図 3.5)。

これにより、$\Delta x \to +0$ によって正しい解 (3.6) が得られるのである。

このように、階段関数を作るときの代表値の位置は、確率的に一様に散らして取ることが必要であることになる。

4 相互作用評価

4.1 相互作用評価の定理

Glimm 差分に関する、基本的で重要な評価に、「相互作用評価」というものがある。この相互作用評価の Glimm の証明 ([Glimm]) はやや煩雑なので、ここでは Yong ([Yong])

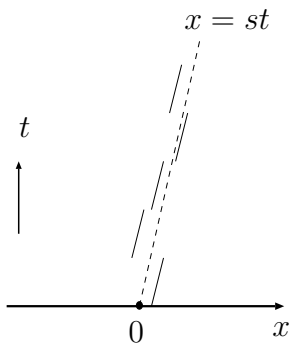

図 3.5: 確率変数により $x = st$ の周囲に集まる

による比較的やさしい証明を紹介する。

定理 4.1 (相互作用評価)

任意の $U_L, U_M, U_R \in B_{\hat{\delta}_3}(\bar{U})$ に対し、$\gamma = \alpha(U_L, U_M)$, $\delta = \alpha(U_M, U_R)$, $\varepsilon = \alpha(U_L, U_R)$ とすると、

$$|\varepsilon - \gamma - \delta| \leq M_3 D(\gamma, \delta) \tag{4.1}$$

となる、$\hat{\delta}_3$ にのみ依存する正の定数 M_3 が取れる。

ここで、$D(\gamma, \delta)$ は、

$$D(\gamma, \delta) = \sum_{\gamma_i \text{ と } \delta_j \text{ は近づく}} |\gamma_i|\,|\delta_j|$$

であり、この和は γ_i と δ_j が近づく波、すなわち、

- $i > j$
- $i = j$ でかつ γ_i か δ_j の少なくとも一方が衝撃波

であるものすべてに対する和である。

この定理は、U_M を挟んで 2 つの Riemann 問題の波 γ, δ があるとき、この U_M を取りはらってできる波 ε とそれらとの関係を意味する (図 4.1, 4.2)。

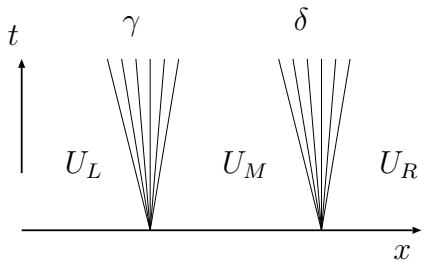

図 4.1: γ と δ

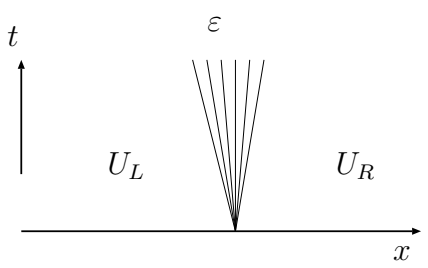

図 4.2: ε

初期値

$$U_0(x) = \begin{cases} U_L & (x < -a), \\ U_M & (-a < x < a), \\ U_R & (a < x) \end{cases} \tag{4.2}$$

に対する解 (図 4.1) は、小さい t に関しては Riemann 問題の解 γ と δ を 2 つ並べたものであるが、ある時刻でその波はぶつかり相互作用する。

一方、方程式 (1.1) はスケール変換 $(t, x) \mapsto (at, ax)$ に関して不変なので、この初期値 (4.2) に対する解 $U_a(t, x)$ は、$a = 1$ に対する解 $U_1(t, x)$ に対するスケール変換

$$U_a(t, x) = U_1\left(\frac{t}{a}, \frac{x}{a}\right) \tag{4.3}$$

で表される。この a を 0 に近づけていくと、初期値 (4.2) は、Riemann 問題の初期値 (1.2) に近づいていくから、$U_a(t, x)$ の $a \to +0$ の極限は、Riemann 問題の解だろうと予想される。

$a \to +0$ のとき (4.3) の $U_a(t, x)$ は、$U_1(t, x)$ をスケール変換して段々遠くの方から見たようなものになっていくので、その極限は $U_1(t, x)$ の漸近的な解の様子を表すことになる。

結局、(4.2) に対する解 (図 4.1) の波 γ, δ がぶつかって相互作用をした後の漸近的な様子が、Riemann 問題 (1.2) の解 ε (図 4.2) であることになるので、それでこの ε と γ, δ の関係を示す定理 4.1 は「相互作用評価」の定理と呼ばれるのである。

4.2 相互作用がない場合

まず、相互作用がない場合、すなわち $D(\gamma, \delta) = 0$ である場合を考えるが、その前に ε を γ, δ の式として表しておく。

今、

$$\varepsilon = \alpha(U_L, U_R), \quad \gamma = \alpha(U_L, U_M), \quad \delta = \alpha(U_M, U_R)$$

なので、

$$U_M = T(\gamma; U_L), \quad U_R = T(\delta; U_M)$$

となり、よって

$$\varepsilon = \alpha(U_L, T(\delta; T(\gamma; U_L))) = \beta(\gamma, \delta; U_L)$$

と書ける。しかも、$U_L, U_M, U_R \in B_{\hat{\delta}_3}(\bar{U})$ であるから、その途中の解はすべて $B_{\hat{\delta}_1}(\bar{U})$ に入っている。

補題 4.2

γ_j, δ_j がどちらも衝撃波でない場合は

$$\hat{U}_j(\delta_j; \hat{U}_j(\gamma_j; U_0)) = \hat{U}_j(\delta_j + \gamma_j; U_0) \tag{4.4}$$

となる。

証明

$V(\xi) = \hat{U}_j(\xi; U_0)$ とすると、これが衝撃波ではない、つまり膨張波か接触不連続の場合は

$$\begin{cases} \dfrac{dV(\xi)}{d\xi} = r_j(V(\xi)), \\ V(0) = U_0 \end{cases} \tag{4.5}$$

を満たす。今、

$$\hat{V}(\xi) = \hat{U}_j(\xi + \gamma_j; U_0) \quad (\xi \text{ は } 0 \text{ と } \delta_j \text{ の間}) \tag{4.6}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \hat{V}'(\xi) &= \hat{U}_j'(\xi + \gamma_j; U_0) = r_j(\hat{U}_j(\xi + \gamma_j; U_0)) = r_j(\hat{V}(\xi)), \\ \hat{V}(0) &= \hat{U}_j(\gamma_j; U_0) \end{aligned}$$

を満たすので、微分方程式 (4.5) の解の一意性により、

$$\hat{V}(\xi) = \hat{U}_j(\xi; \hat{U}_j(\gamma_j; U_0)) \tag{4.7}$$

となる。よって、(4.6), (4.7) より (4.4) が得られる。■

補題 4.3

γ, δ に近づく波が含まれない場合、すなわち 0 でない γ_i と δ_j は、すべて $i < j$ か、または $i = j$ でかついずれも衝撃波ではない場合は

$$\varepsilon = \gamma + \delta$$

となる。

証明

この場合、γ, δ は

$$\begin{cases} \gamma = {}^T(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}, \gamma_k, 0, \ldots, 0), \\ \delta = {}^T(0, \ldots, 0, \delta_k, \delta_{k+1}, \ldots, \delta_N) \end{cases}$$

の形であり、U_L から U_M, U_M から U_R の途中の状態を

$$\begin{cases} U_1 = \hat{U}_1(\gamma_1; U_L), \ldots, U_{k-1} = \hat{U}_{k-1}(\gamma_{k-1}; U_{k-2}), U_k = \hat{U}_k(\gamma_k; U_{k-1}) = U_M, \\ \tilde{U}_k = \hat{U}_k(\delta_k; U_M), U_{k+1} = \hat{U}_{k+1}(\delta_{k+1}; \tilde{U}_k), \ldots, U_N = \hat{U}_N(\delta_N; U_{N-1}) = U_R \end{cases}$$

とすると、例えば $\delta_k = 0$ の場合は、$\tilde{U}_k = U_M$ であり左から $(k+1)$ 番目の状態を $U_k = U_M$ として U_L から U_R までそのまま

$$\varepsilon = {}^T(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}, \gamma_k, \delta_{k+1}, \ldots, \delta_N)$$

という波でつながる。$\gamma_k = 0$ の場合も $U_k = U_M$ で、左から $(k+1)$ 番目の状態が $\tilde{U}_k$ で

$$\varepsilon = {}^T(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}, \delta_k, \delta_{k+1}, \ldots, \delta_N)$$

という波で U_L から U_R までつながる。

γ_k と δ_k が 0 でない場合も、仮定によりその両方が衝撃波ではないので、補題 4.2 により、

$$\tilde{U}_k = \hat{U}_k(\delta_k; U_M) = \hat{U}_k(\delta_k; \hat{U}_k(\gamma_k; U_{k-1})) = \hat{U}_k(\gamma_k + \delta_k; U_{k-1})$$

となり、よって U_{k-1} と $\tilde{U}_k$ を k 番目の波で $\gamma_k + \delta_k$ としてつなげることができ、

$$\varepsilon = {}^T(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}, \gamma_k + \delta_k, \delta_{k+1}, \ldots, \delta_N)$$

となる。

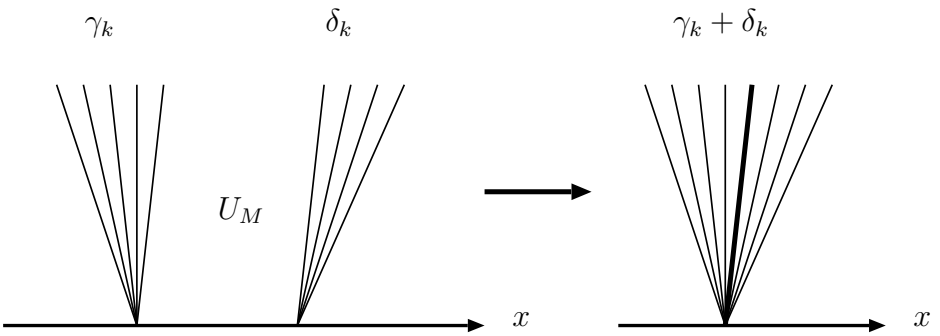

図 4.3: $\gamma_k + \delta_k$

よって、いずれの場合も $\varepsilon = \gamma + \delta$ が成り立つ。■

この補題 4.3 は、近づかない波には相互作用が起こらず、そのまま平行移動して並べればそれでつながるということを意味している。

4.3 相互作用がある場合

次は近づく波が含まれ、相互作用がある場合を考える。以後、この節では簡単のため、$N = 2$ の場合に限定して証明を行う。一般の N の場合の証明は、[Yong], [Dafermos] などを参照のこと。

$N = 2$ の場合は、

$$\varepsilon = \beta(\gamma, \delta; U_L) = \beta(\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2; U_L) \tag{4.8}$$

であり、これを $\gamma = 0, \delta = 0$ に関してテイラー展開する。

まず、$\gamma = 0$ のときは $U_M = T(0; U_L) = U_L$ なので、$\delta = \alpha(U_M, U_R) = \alpha(U_L, U_R)$ となり、よって、

$$\beta(0, \delta; U_L) = \delta \tag{4.9}$$

となる。また、$\delta = 0$ のときは、$U_R = T(0; U_M) = U_M$ なので、$\gamma = \alpha(U_L, U_M) = \alpha(U_L, U_R)$ より

$$\beta(\gamma, 0; U_L) = \gamma \tag{4.10}$$

であることがわかる。よって、(4.8) を展開するとその 1 次の項は $\gamma + \delta$ となる。そして、(4.9), (4.10) より

$$\varepsilon - \gamma - \delta = \beta(\gamma, \delta; U_L) - \beta(\gamma, 0; U_L) - \beta(0, \delta; U_L)$$

と書けるが、この右辺を次のように分ける:

$$\varepsilon - \gamma - \delta = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \tag{4.11}$$

$$A_1 = \beta(\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2) - \beta(\gamma_1, \gamma_2, 0, \delta_2) - \beta(\gamma_1, 0, \delta_1, \delta_2) + \beta(\gamma_1, 0, 0, \delta_2), \tag{4.12}$$

$$A_2 = \beta(\gamma_1, \gamma_2, 0, \delta_2) - \beta(\gamma_1, \gamma_2, 0, 0) - \beta(\gamma_1, 0, 0, \delta_2) + \beta(\gamma_1, 0, 0, 0), \tag{4.13}$$

$$A_3 = \beta(\gamma_1, 0, \delta_1, \delta_2) - \beta(\gamma_1, 0, 0, \delta_2) - \beta(0, 0, \delta_1, \delta_2) + \beta(0, 0, 0, \delta_2), \tag{4.14}$$

$$A_4 = \beta(\gamma_1, 0, 0, \delta_2) - \beta(\gamma_1, 0, 0, 0) - \beta(0, 0, 0, \delta_2) + \beta(0, 0, 0, 0) \tag{4.15}$$

しかし、$\beta(\gamma_1, 0, 0, \delta_2)$ の波はすべて近づかないので、補題 4.3 より、

$$\beta(\gamma_1, 0, 0, \delta_2) = {}^T(\gamma_1, \delta_2)$$

となり、よって (4.9), (4.10) より A_4 は

$$A_4 = {}^T(\gamma_1, \delta_2) - {}^T(\gamma_1, 0) - {}^T(0, \delta_2) + 0 = 0 \tag{4.16}$$

となる。

A_1 は、

$$\begin{aligned} A_1 &= [\beta(\gamma_1, \gamma_2, \tau\delta_1, \delta_2) - \beta(\gamma_1, 0, \tau\delta_1, \delta_2)]_{\tau=0}^{\tau=1} \\ &= \Big[[\beta(\gamma_1, \sigma\gamma_2, \tau\delta_1, \delta_2)]_{\sigma=0}^{\sigma=1}\Big]_{\tau=0}^{\tau=1} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial\sigma\partial\tau}\beta(\gamma_1, \sigma\gamma_2, \tau\delta_1, \delta_2) d\sigma d\tau \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2\beta}{\partial\gamma_2\partial\delta_1}(\gamma_1, \sigma\gamma_2, \tau\delta_1, \delta_2) d\sigma d\tau\gamma_2\delta_1 \end{aligned}$$

と変形できるので、$U_L, U_M, U_R \in B_{\hat{\delta}_3}(\bar{U})$ に対して、

$$\sup_{U_L, U_M, U_R \in B_{\hat{\delta}_3}(\bar{U}),\ 0 \le a_j \le 1} \left|\nabla^2_{(\gamma,\delta)}\beta(a_1\gamma_1, a_2\gamma_2, a_3\delta_1, a_4\delta_2; U_L)\right| \le M_3$$

とすると、

$$|A_1| \le M_3|\gamma_2|\,|\delta_1| \tag{4.17}$$

と評価できる。

A_2 は、γ_2 と δ_2 が近づかなければ、補題 4.3 より

$$A_2 = {}^T(\gamma_1, \gamma_2 + \delta_2) - {}^T(\gamma_1, \gamma_2) - {}^T(\gamma_1, \delta_2) + {}^T(\gamma_1, 0) = 0 \tag{4.18}$$

であり、近づく場合は A_1 と同様に

$$|A_2| = \left|\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2\beta}{\partial\gamma_2\partial\delta_2}(\gamma_1, \sigma\gamma_2, 0, \tau\delta_2) d\sigma d\tau\gamma_2\delta_2\right| \le M_3|\gamma_2|\,|\delta_2| \tag{4.19}$$

となる。同様に A_3 も、γ_1 と δ_1 が近づかなければ、

$$A_3 = {}^T(\gamma_1+\delta_1,\delta_2) - {}^T(\gamma_1,\delta_2) - {}^T(\delta_1,\delta_2) + {}^T(0,\delta_2) = 0 \tag{4.20}$$

近づく場合は、A_1 と同様に

$$|A_3| = \left| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \beta}{\partial\gamma_1 \partial\delta_1}(\sigma\gamma_1, 0, \tau\delta_1, \delta_2) d\sigma d\tau \gamma_1 \delta_1 \right| \leq M_3 |\gamma_1|\,|\delta_1| \tag{4.21}$$

となるので、(4.11),(4.16), (4.17), (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) により、結局定理 4.1 が得られることになる。

なお、[Yong] には $\nabla^2\beta(0,0)$ を求めることにより、(4.1) よりも詳しい評価式

$$\begin{aligned} \varepsilon \;\; = \;\; & \gamma + \delta + \sum_{i>j} \gamma_i \delta_j A_0(U_L)^{-1}(\nabla_U r_i \cdot r_j - \nabla_U r_j \cdot r_i)(U_L) \\ & + D(\gamma,\delta) O(|\gamma| + |\delta|) \quad (A_0(U) = [r_1, \ldots, r_N](U)) \end{aligned} \tag{4.22}$$

が示されている。この (4.22) によれば、2 次の項は $i > j$ の波の相互作用のみであり、$i = j$ で近づく波 (同じ特性方向の波) の相互作用の影響は実際には 3 次以上の項であることがわかる。

5 近似解の評価

5.1 I-曲線

[Glimm] では、Glimm 差分近似解の評価を行うために、I-曲線というものを導入し、近似解の横断的な評価を説明している。

I-曲線 は、左から右に伸びる折れ線で、a_m^n の右隣りの頂点は、a_{m+1}^{n+1} か a_{m+1}^{n-1} であるものを言う。なお、$n = 0$ に対しては

$$a_m^0 = (0, m\Delta x) \quad (m \text{ は奇数})$$

とする。

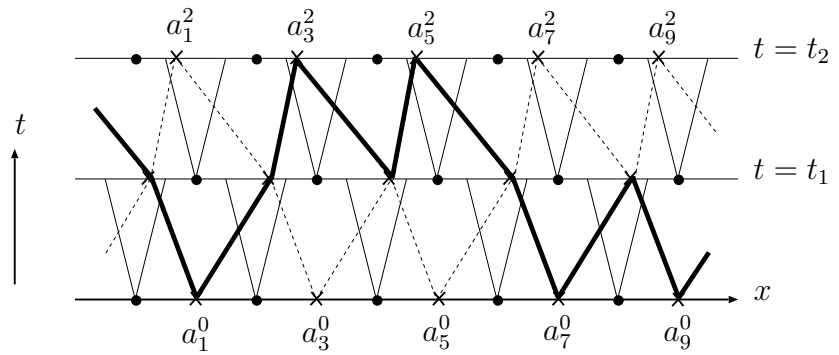

図 5.1: I-曲線

なお、[Glimm], [Smoller] などでは、I-曲線には特にこれ以外の制限を設けてはいないが、しばらくは $t_{n-1} \leq t \leq t_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ の $2\Delta t$ 幅に入り、左右の両方に無限に伸びるもののみを考えるが、のちほどそれとは別の、特別な I-曲線も使う。

I-曲線には、t 方向を上と見て自然な半順序関係を考えることができる。その順序に関する最小元、すなわち $0 \leq t \leq t_1$ の範囲に一意に決まる I-曲線を O と書くことにする。また、1 つの頂点のみが異なる $(a_m^{n+1}$ と $a_m^{n-1})$ I-曲線の組を、その大きい方 $(a_m^{n+1}$ を持つ方) を、小さい方 $(a_m^{n-1}$ を持つ方) に対する直後の I-曲線 と呼ぶ。一つの I-曲

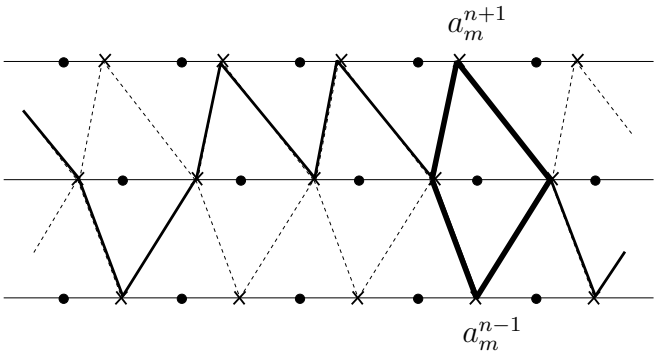

図 5.2: 直後の I-曲線

線に対して直後の I-曲線はもちろん一意には決まらず、たくさん存在する。

I-曲線は、近似解の波と交差しながら左から右へ伸びていくが、その交差する波に関して、次のような汎関数を定める:

$$L(J) \quad = \sum_{\alpha_j \text{ は } J \text{ と交差}} |\alpha_j| \tag{5.1}$$

$$Q(J) \quad = \sum_{\alpha_i \text{ と } \beta_j \text{ は } J \text{ と交差し近づく}} |\alpha_i|\,|\beta_j| \tag{5.2}$$

ここで、「交差する波」であるが、例えば a_m^n が膨張波 α_j の中間にあり、I-曲線 J は実際にはその膨張波の一部としか交わっていない場合 (図 5.3)、その交わっている部分 α_j^1 の大きさ $|\alpha_j^1|$ のみを和に加えることとする。

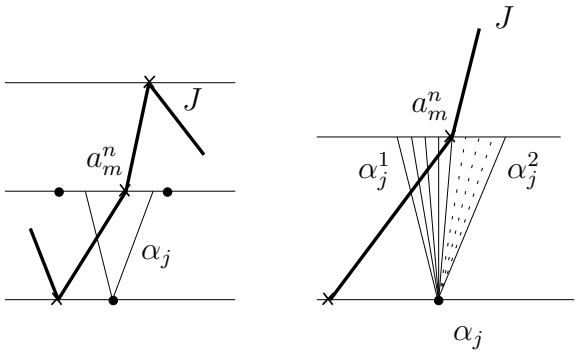

図 5.3: J が膨張波の一部とのみ交わる場合

また、$Q(J)$ の、α_i と β_j が「近づく」とは、α_i が β_j の左にある場合は $i > j$、または $i = j$ で α_i と β_j の少なくとも一方が衝撃波である場合を言う。この場合は、波の出発点が離れているもの、t が違うものなどもすべて考えることにする。

3 節の Glimm 差分の作り方によれば、I-曲線と交わる波は高々有限個であるから $L(J)$, $Q(J)$ は有限和としてちゃんと定義できる。また、$|x|$ の大きいところには波がなくて U^Δ は一定であるから、そのような波のない場所でのみ異なる I-曲線間の L, Q の値はそれぞれ同じものになる。その値の意味で考えれば (つまり、波と交わらない部分のみが異なる I-曲線を同一視して考えれば)、どの I-曲線 ($2\Delta t$ 幅に入るもの) も、O から有限個の直後の I-曲線をたどってたどりつくことができることになる。後で、そのような形での帰納法を用いて評価を求める。

5.2 L と全変動の関係

この節では、$L(J)$ や $Q(J)$ に現れるような波の評価と、U^Δ の変動との関係を考える。

今、ひとつの Riemann 問題の解

$$\varepsilon = \alpha(U_L, U_R) \quad (U_L, U_R \in B_{\hat{\delta}_3}(\bar{U}))$$

に対し、シュワルツの不等式、および (2.14) により、

$$\sum_{j=1}^{N}|\varepsilon_j| \le \sqrt{N}|\varepsilon| \le \sqrt{N}M_1|U_L - U_R| \le \sqrt{N}M_1\,\mathrm{TV}_R\,U(t,\cdot) \tag{5.3}$$

となる。逆に $\mathrm{TV}_R\,U(t,\cdot)$ は、連続波 (膨張波) の変動と不連続波 (衝撃波、および接触不連続) の段差からなり、

$$\mathrm{TV}_R\,U(t,\cdot) = \sum_{j\text{-膨張波}} \mathrm{TV}_{0\le\xi\le\varepsilon_j}\,\hat{U}_j(\xi;U_{j-1}) + \sum_{k\text{-不連続波}} |U_k - U_{k-1}| \tag{5.4}$$

と書けるが、膨張波は C^1 関数であるから、

$$\mathrm{TV}_{0\le\xi\le\varepsilon_j}\,\hat{U}_j(\xi;U_{j-1}) = \int_0^{\varepsilon_j} |\hat{U}_j'(\xi;U_{j-1})|d\xi$$

が言え (A 節参照)、$\hat{U}_j'$ は、(2.13) より $\nabla_\varepsilon T$ で表現され、それは (2.15) により M_2 で押さえられるから、

$$\mathrm{TV}_{0\le\xi\le\varepsilon_j}\,\hat{U}_j(\xi;U_{j-1}) \le M_2|\varepsilon_j| \tag{5.5}$$

と押さえられることになる。

k-不連続解に対しても、

$$\begin{aligned} |U_k - U_{k-1}| &= |\hat{U}_k(\varepsilon_k;U_{k-1}) - U_{k-1}| = \left|\int_0^{\varepsilon_k} \hat{U}_k'(\xi;U_{k-1})d\xi\right| \\ &\le \int_0^{\varepsilon_k} \left|\hat{U}_k'(\xi;U_{k-1})\right| d\xi \end{aligned}$$

より、

$$|U_k - U_{k-1}| \le M_2|\varepsilon_k| \tag{5.6}$$

と評価できる。よって、(5.4), (5.5), (5.6) により、Riemann 問題の解 $U(t,x)$ に対して、

$$\mathrm{TV}_R\,U(t,\cdot) \le M_2\sum_{j=1}^{N}|\varepsilon_j| \le M_2\sqrt{N}|\varepsilon| \tag{5.7}$$

が成り立つ。

(5.3), (5.7) により、Riemann 問題の解に対し、$\mathrm{TV}_R U(t,\cdot)$ と $\sum|\varepsilon_j|$ と $|\varepsilon|$ は同等であることがわかり、よって、$L(J)$ は、J 上での U^Δ の全変動を評価していることになる。例えば、$L(O)$ は、(5.3) により

$$\begin{aligned} L(O) &\leq \sqrt{N}M_1 \sum_{(|m|+1)\Delta x \leq 1/\Delta x,\ m \text{ は奇数}} |U^0_{m+1} - U^0_{m-1}| \\ &= \sqrt{N}M_1 \sum_{(|m|+1)\Delta x \leq 1/\Delta x,\ m \text{ は奇数}} |U_0((m+1)\Delta x) - U_0((m-1)\Delta x)| \end{aligned}$$

であるので、明らかに

$$L(O) \leq \sqrt{N}M_1 \,\mathrm{TV}_R U_0 \tag{5.8}$$

が言える。

5.3 L,Q の評価

この節では、以下の定理 5.1 を示す。

定理 5.1

Δx には無関係な正の定数 $\hat{\delta}_4$, $\hat{\delta}_5$, K を取って、以下を満たすようにすることができる:

$\mathrm{TV}_R U_0 < \hat{\delta}_4$, $U_0(x) \in B_{\hat{\delta}_5}(\bar{U})$ であれば次が成り立つ。

1. すべての $t > 0$, x に対し、$U^\Delta(t,x) \in B_{\hat{\delta}_3}(\bar{U})$ となる。
2. $Q(J)$ と $L(J) + KQ(J)$ は J に関して単調減少。

この定理 5.1 を満たす $\hat{\delta}_4$, $\hat{\delta}_5$ であるが、まず、$\hat{\delta}_5$ はとりあえず $\hat{\delta}_5 \leq \hat{\delta}_3$ であるとすれば、$0 \leq t < t_1$ での Riemann 問題の解の値 $U^\Delta(t,x)$ は $B_{\hat{\delta}_1}(\bar{U})$ に入ることになるが、これが $B_{\hat{\delta}_3}(\bar{U})$ に入るように $\hat{\delta}_5$ を取る。(2.17) より、それには

$$(1 + 2M_1M_2)\hat{\delta}_5 \leq \hat{\delta}_3 \tag{5.9}$$

であるように取ればよい。

今、$U^{\Delta}(t,x) \in B_{\hat{\delta}_3}(\bar{U})$ である範囲の I-曲線を I を一つとり ($\hat{\delta}_5$ の定義より O は少なくともそれを満たす)、その直後の I-曲線 J を一つとる。この I と J の共通部分を I_0、異なる部分は、I, J に属する部分をそれぞれ I', J' とする (図 5.4)。また、I', J'

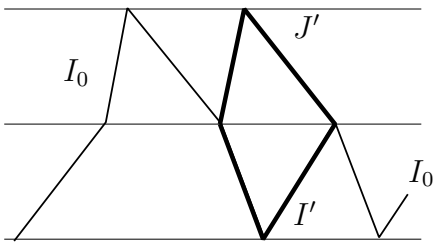

図 5.4: I と J

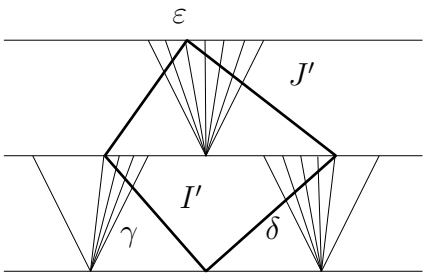

図 5.5: γ, δ, ε

の作る四角形のうち、I' の南西線分と交わる波を γ, I' の南東線分と交わる波を δ, J' と交わる波を ε とする (図 5.5)。

このとき、$L(I)$ は、

$$L(I) = L(I_0) + L(I') = L(I_0) + \sum_i |\gamma_i| + \sum_i |\delta_i| \tag{5.10}$$

と書くことができる。ただし、$L(I_0)$, $L(I')$ 等はそれぞれの部分に交わる波に関する和であるとする。

同様に $L(J)$ は、

$$L(J) = L(I_0) + L(J') = L(I_0) + \sum_i |\varepsilon_i| \tag{5.11}$$

となるが、I' での U^{Δ} は $B_{\hat{\delta}_3}(\bar{U})$ に入っているので、相互作用評価の定理 4.1 により、

$$|\varepsilon - \gamma - \delta| \leq M_3 D(\gamma, \delta)$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} \sum_i |\varepsilon_i| &\leq \sum_i |\gamma_i| + \sum_i |\delta_i| + N M_3 D(\gamma, \delta) \\ &\leq \sum_i |\gamma_i| + \sum_i |\delta_i| + N M_3 Q(I') \end{aligned} \tag{5.12}$$

となるので、(5.10), (5.11), (5.12) より、

$$L(J) \leq L(I) + NM_3Q(I') \tag{5.13}$$

が成り立つ。

また、記号 $Q(I_0, I')$ で、$Q(I)$ のうち I_0 と交わる波と I' と交わる波同士で近づくものに関する和を表すことにすると、$Q(I)$, $Q(J)$ は

$$Q(I) = Q(I_0) + Q(I') + Q(I_0, I'), \tag{5.14}$$
$$Q(J) = Q(I_0) + Q(I_0, J') \tag{5.15}$$

と書ける。ここで、この $Q(I_0, J')$ は、

$$Q(I_0, J') = \sum_{\alpha_j \text{ は } I_0 \text{ と交わり } \varepsilon_i \text{ と近づく}} |\alpha_j|\,|\varepsilon_i|$$

であり、この和の各項を場合分けして考える。

1. $i < j$ のとき
   このときは、α_j は J' より左の I_0 に交わらないといけないが、その場合 α_j は γ_i, δ_i とも近づくことになり、よって $|\alpha_j|\,|\gamma_i|$, $|\alpha_j|\,|\delta_i|$ が $Q(I_0, I')$ に含まれ、かつ

   $$|\alpha_j\,|\varepsilon_i| \leq |\alpha_j|\,|\gamma_i| + |\alpha_j|\,|\delta_i| + M_3D(\gamma, \delta)|\alpha_j| \tag{5.16}$$

   が成り立つ。

2. $i > j$ のとき
   この場合は 1. と同様であり、$|\alpha_j|\,|\gamma_i|$, $|\alpha_j|\,|\delta_i|$ は $Q(I_0, I')$ に含まれ、(5.16) も成り立つ。

3. $i = j$ でかつ α_j が j-衝撃波のとき
   この場合も $\alpha_j(= \alpha_i)$ は γ_i, δ_i とも近づくので 1. と同様で、$|\alpha_j|\,|\gamma_i|$, $|\alpha_j|\,|\delta_i|$ は $Q(I_0, I')$ に含まれ、(5.16) が成り立つ。

4. $i = j$ でかつ α_j が j-衝撃波でない場合
   この場合は ε_i が衝撃波でなければいけない。よって、i-特性方向は真性非線形であり、$\alpha_j(= \alpha_i) > 0$, $\varepsilon_i < 0$ となる。

いま、もし γ_i と δ_i がともに衝撃波であれば、やはり 1. と同じであるが、γ_i が衝撃波で、δ_i が衝撃波でない (膨張波か 0 の) 場合は、

$$\varepsilon_i < 0, \quad \gamma_i < 0, \quad \delta_i \geq 0$$

となるので、

$$\begin{aligned} |\varepsilon_i| &= -\varepsilon_i = (-\varepsilon_i + \gamma_i + \delta_i) - \gamma_i - \delta_i \\ &\leq |\varepsilon_i - \gamma_i - \delta_i| + |\gamma_i| \leq M_3 D(\gamma, \delta) + |\gamma_i| \end{aligned}$$

が成り立ち、よってこの場合は

$$|\alpha_j|\,|\varepsilon_i| \leq |\alpha_j|\,|\gamma_i| + M_3 D(\gamma, \delta)|\alpha_j|$$

となり、そしてこの $|\alpha_j|\,|\gamma_i|$ は $Q(I_0, I')$ に含まれる。

$\gamma_i \geq 0$, $\delta_i < 0$ の場合も同様で、

$$|\alpha_j|\,|\varepsilon_i| \leq |\alpha_j|\,|\delta_i| + M_3 D(\gamma, \delta)|\alpha_j|$$

となり、$|\alpha_j|\,|\delta_i|$ は $Q(I_0, I')$ に含まれる。

最後に、$\gamma_i \geq 0$ かつ $\delta_i \geq 0$ の場合は、

$$|\varepsilon_i| = -\varepsilon_i = (-\varepsilon_i + \gamma_i + \delta_i) - \gamma_i - \delta_i \leq |\varepsilon_i - \gamma_i - \delta_i| \leq M_3 D(\gamma, \delta)$$

なので、

$$|\alpha_j|\,|\varepsilon_i| \leq M_3 D(\gamma, \delta)|\alpha_j|$$

となる。

結局、以上の考察により、

$$\begin{aligned} Q(I_0, J') &\leq Q(I_0, I') + N M_3 D(\gamma, \delta) \sum_{\alpha_j \text{ は } I_0 \text{ に交わる}} |\alpha_j| \\ &\leq Q(I_0, I') + N M_3 Q(I') L(I_0) \end{aligned} \tag{5.17}$$

が得られることになる。よって、もし

$$L(I) N M_3 \leq \frac{1}{2} \tag{5.18}$$

であれば、

$$L(I_0)NM_3 \leq L(I)NM_3 \leq \frac{1}{2}$$

なので、(5.14), (5.15), (5.17) より、

$$Q(J) \leq Q(I_0) + Q(I_0, I') + \frac{1}{2}Q(I') = Q(I) - \frac{1}{2}Q(I') \tag{5.19}$$

となるので、

$$Q(J) \leq Q(I) \tag{5.20}$$

が従う。さらに、$K = 2NM_3$ とすれば、同じ仮定 (5.18) の下、(5.13), (5.19) により、

$$\begin{aligned} L(J) + KQ(J) &\leq L(I) + NM_3Q(I') + 2NM_3\left(Q(I) - \frac{1}{2}Q(I')\right) \\ &= L(I) + 2NM_3Q(I) \end{aligned}$$

となり、

$$L(J) + KQ(J) \leq L(I) + KQ(I) \tag{5.21}$$

が従うことになる。

5.1 節の最後に述べたように、U^{Δ} が定ベクトルである部分以外では O から直後の I-曲線を一つ一つたどって J までたどりつくことが可能であるから、この (5.20), (5.21) は、(5.18) がその途中の I-曲線すべてに成り立つという仮定の下で O から J まで成り立ち、

$$Q(J) \leq Q(O), \quad L(J) + KQ(J) \leq L(O) + KQ(O) \tag{5.22}$$

が言える。

ここで、一般に

$$\begin{aligned} Q(I) &= \sum_{\alpha_i \text{ と } \beta_j \text{ は } I \text{ と交差し近づく}} |\alpha_i|\,|\beta_j| \leq \sum_{\alpha_i \text{ は } I \text{ と交差}} |\alpha_i| \sum_{\beta_j \text{ は } I \text{ と交差}} |\beta_j| \\ &= L(I)^2 \end{aligned}$$

となるので、

$$L(O) + KQ(O) \leq L(O) + KL(O)^2 = L(O)(1 + KL(O)) \tag{5.23}$$

となる。よって、もし

$$L(O) \leq \frac{1}{2K} = \frac{1}{4NM_3} \tag{5.24}$$

であれば、O はまず (5.18) を満たし、よって O の直後の I-曲線 J は (5.22) を満たすので、

$$L(J) \leq L(O)(1 + KL(O)) \leq \frac{1}{2K}\frac{3}{2} \leq \frac{1}{K} \tag{5.25}$$

となり、$L(J)$ は (5.22) を満たすことになる。それにより J の直後の I-曲線に再び (5.22) が使えることになり、これを繰り返すことができることになる。この (5.24) が成り立つようにするには、(5.8) より

$$\mathrm{TV}_R\, U_0 \leq \frac{1}{\sqrt{N}M_1}\frac{1}{2K} = \frac{1}{4N\sqrt{N}M_1M_3} \tag{5.26}$$

であればよい。これで定理 5.1 の (1) が成り立てば、定理 5.1 の (2) は成立することになる。

定理 5.1 の (1) の方は、(5.7), (5.8), (5.9), (5.23), (5.24) より、I 上の (t, x) に対して、

$$\begin{aligned}
|U^\Delta(t,x) - \bar{U}| &\leq |U^\Delta(t,x) - U_{-\infty}| + |U_{-\infty} - \bar{U}| \leq \mathrm{TV}_I\, U^\Delta + |U_{-\infty} - \bar{U}| \\
&\leq M_2 L(I) + |U_{-\infty} - \bar{U}| \leq M_2 L(O)(1 + KL(O)) + |U_{-\infty} - \bar{U}| \\
&\leq \frac{3}{2} M_2\sqrt{N}M_1\, \mathrm{TV}_R\, U_0 + |U_{-\infty} - \bar{U}| < \frac{3}{2}\sqrt{N}M_1M_2\hat{\delta}_4 + \hat{\delta}_5 \\
&\leq \frac{3}{2}\sqrt{N}M_1M_2\hat{\delta}_4 + \frac{\hat{\delta}_3}{1 + 2M_1M_2}
\end{aligned}$$

であるので、

$$\frac{3}{2}\sqrt{N}M_1M_2\hat{\delta}_4 \leq \frac{2M_1M_2}{1 + 2M_1M_2}\hat{\delta}_3 \tag{5.27}$$

であれば、$|U^{\Delta} - \bar{U}| < \hat{\delta}_3$ もアプリオリに得られることになる。

結局、(5.9), (5.26), (5.27) により、$\hat{\delta}_4$, $\hat{\delta}_5$ は

$$\hat{\delta}_4 \leq \min\left\{\frac{4\hat{\delta}_3}{3\sqrt{N}(1+2M_1M_2)}, \frac{1}{4N\sqrt{N}M_1M_3}\right\}, \quad \hat{\delta_5} \leq \frac{\hat{\delta}_3}{1+2M_1M_2}$$

を満たせばよいことになる。これで定理 5.1 が証明された。

この証明より、この定理 5.1 は、(5.22) から得られる (5.25) の形の不等式が重要な役割を果たしていることがわかるが、この式が Glimm の差分近似解のすべての評価を支えるアプリオリ評価である。

双曲型保存則の非線形相互作用により、$L(J)$ をそのまま $L(O)$ でおさえることはできず、相互作用も考慮した $KQ(J)$ の項がつくことでようやく単調性が導かれて、初期値で評価できることになる。このような相互作用項 $KQ(J)$ の必要性は、相互作用評価の定理 4.1 から予言されるものであり、ここが Glimm 差分の評価の重要なポイントであると言える。

なお、通常のエネルギー汎関数が時刻に関して単調減少することになぞらえて、(5.20), (5.21) のように I-曲線に関する単調性を持つ汎関数 (Q や $L+KQ$) のことを、**Glimm ポテンシャル** と呼ぶことがある。

5.4 収束性のための評価

この節では、Glimm 差分近似解の収束性を示すのに必要な評価を定理 5.1 より導く。

定理 5.2

U_0 に関する定理 5.1 の仮定の下、Δx には無関係なある正の定数 C_1, C_2 が存在して、次が成り立つ。

$$\mathrm{TV}_R\, U^{\Delta}(t,\cdot) \leq C_1\, \mathrm{TV}_R\, U_0 \quad (t>0), \tag{5.28}$$

$$\sup_{x\in R} |U^{\Delta}(t,x) - \bar{U}| \leq \hat{\delta}_3 \quad (t>0), \tag{5.29}$$

$$\int_R |U^{\Delta}(t,x) - U^{\Delta}(s,x)|dx \leq C_2(\Lambda|t-s| + 2\Delta x)\, \mathrm{TV}_R\, U_0 \quad (t,s>0) \tag{5.30}$$

(5.29) は、定理 5.1 の 1. より OK. また (5.28) は、$t_{n-1} \le t \le t_n$ に横たわる唯一の I-曲線 J_n を考えれば、(5.7) より $t_{n-1} < t < t_n$ に対して

$$\mathrm{TV}_R\, U^\Delta(t,\cdot) \le M_2 L(J_n)$$

であるが、(5.8), (5.25) より

$$L(J_n) \le \frac{3}{2} L(O) \le \frac{3}{2}\sqrt{N} M_1\, \mathrm{TV}_R\, U_0$$

なので、よって、

$$\mathrm{TV}_R\, U^\Delta(t,\cdot) \le \frac{3}{2}\sqrt{N} M_1 M_2\, \mathrm{TV}_R\, U_0$$

が得られる。なお、差分の形より、明らかに

$$\mathrm{TV}_R\, U^\Delta(t_{n-1},\cdot) \le \mathrm{TV}_R\, U^\Delta(t,\cdot)$$

であるので、結局 (5.28) には $C_1 = 3\sqrt{N} M_1 M_2/2$ とすればよいことになる。よってあとは (5.30) を示せばよい。

(5.30) は、おおまかには以下の方針に従って証明する:

1. $0 < s < t$, $X = \Lambda(t-s)$ に対して

$$\begin{aligned} & |U^\Delta(t,x) - U^\Delta(s,x)| \\ &\le |U^\Delta(t,x) - U^\Delta(s,x-X)| + |U^\Delta(s,x-X) - U^\Delta(s,x)| \\ &\le C_4\, \mathrm{TV}_{[x-X,x+X]}\, U^\Delta(s,\cdot) \end{aligned} \tag{5.31}$$

   を示す (図 5.6)。

2. 一般に、$A > 0$ に対して

$$\int_R \mathrm{TV}_{[x-A,x+A]}\, f dx \le 2A\, \mathrm{TV}_R\, f \tag{5.32}$$

   なので、(5.28), (5.31) より

$$\begin{aligned} \int_R |U^\Delta(t,x) - U^\Delta(s,x)| dx &\le 2C_4 X\, \mathrm{TV}_R\, U^\Delta(s,\cdot) \\ &\le 2C_1 C_4 \Lambda(t-s)\, \mathrm{TV}_R\, U_0 \end{aligned} \tag{5.33}$$

   が得られる。

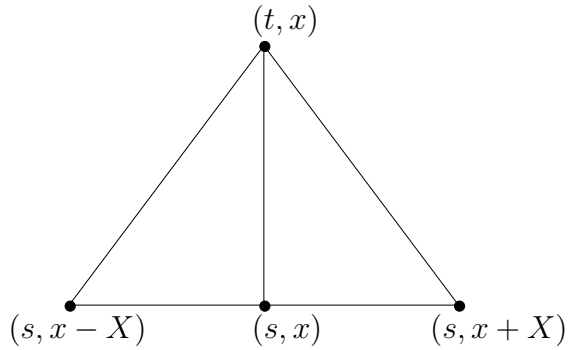

図 5.6: 差分の依存領域

ただし、(5.30) と (5.33) には少し違いがあるが、実際にはこの方針は離散的に少し修正すべきところがあり、正確には (5.30) のようになる。なお、この方針の 1. の部分については [Glimm] (および [Smoller]) のやり方ではなく、[Dafermos] による少し特別な I-曲線を用いた方法を紹介する。また、(5.32) は、ここでは実際にはこれとは少し異なるその離散バージョンを用いるのであるが、ここでの証明の参考になると思うので (5.32) の証明も A 節で紹介する。

方針 1. を示すために、ここでは今までとは異なる、$2\Delta t$ 幅にとどまらない有限長の I-曲線を考える。

$0 < s < t$ として構わないのでそのようにし、しばらく x は固定して考える。今 $(t, x) \in \mathrm{Cell}^{n_1}_{m_1}$, $(s, x) \in \mathrm{Cell}^{n_2}_{m_2}$ ($n_1 + m_1$, $n_2 + m_2$ は奇数) とすると、$n_1 \geq n_2$ で、m_1 は m_2, $m_2 \pm 1$ のいずれかになる。

まず $n_1 > n_2$ の場合を考える。このとき、(t, x) を含むセル $\mathrm{Cell}^{n_1}_{m_1}$ 内の $a^{n_1}_{m_1}$ を頂上に持ち、そこから山型に $t = t_{n_2-1}$ まで降ろした有限長の I-曲線を J とし、$t_{n_2-1} \leq t \leq t_{n_2}$ の範囲のこの山型の J の内側にある I-曲線 (J のギザギザな底辺) を I とする (図 5.7)。この I 曲線を左右に無限に延長して $t_{n_2-1} \leq t \leq t_{n_2}$ 内に入る I-曲線 J_{n_2} に対し、(5.18) より

$$L(I) \leq L(J_{n_2}) \leq \frac{1}{K}$$

であり、また I から J へは一つ一つ直後の有限な I-曲線を取って有限回でたどりつくことができる。しかも、その直後の I-曲線に対しては、これまでの I-曲線に関する議論がそのまま成り立ち、よって、この I と J に対しても単調性 (5.20), (5.21) が成り立つことが示される。

Riemann 問題の解の値は、原点を出る半直線上では一定であるから、$\mathrm{Cell}^{n_1}_{m_1}$ 内での U^{Δ}

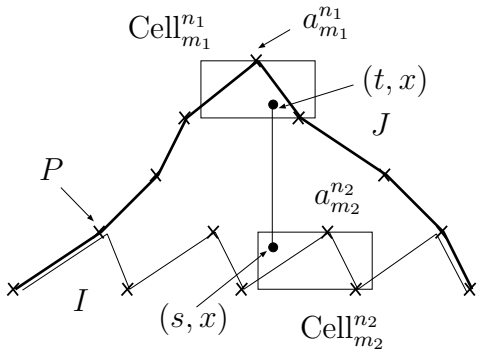

図 5.7: 有限な I-曲線 I と J

の値も底辺の中点 $(t_{n_1-1}, m_1\Delta x)$ から出る線分上一定であり、よって、この点と (t,x) とを結ぶ直線と J との $\mathrm{Cell}_{m_1}^{n_1}$ 内の交点を (t',x') とすれば、$U^\Delta(t,x) = U^\Delta(t',x')$ となる。

同様に、(s,x) と $(t_{n_2-1}, m_2\Delta x)$ を結ぶ直線と I との $\mathrm{Cell}_{m_2}^{n_2}$ 内の交点を (s',y') とすれば、$U^\Delta(s,x) = U^\Delta(s',y')$ となる。

$(t',x'), (s',y')$ はそれぞれ J, I 上にあり、また J と I の共通の左端の一つ右隣りの頂点を $P = a_{m_1-(n_1-n_2)}^{n_2}$ とすれば、(5.7) より、

$$\begin{aligned} |U^\Delta(t,x) - U^\Delta(s,x)| &= |U^\Delta(t',x') - U^\Delta(s',y')| \\ &\le |U^\Delta(t',x') - U^\Delta(P)| + |U^\Delta(P) - U^\Delta(s',y')| \\ &\le \mathrm{TV}_J U^\Delta + \mathrm{TV}_I U^\Delta \le M_2 L(J) + M_2 L(I) \end{aligned}$$

となる。ここで、(5.18), (5.21) より

$$L(J) \le L(I) + KL(I)^2 \le 2L(I)$$

となるから、結局

$$|U^\Delta(t,x) - U^\Delta(s,x)| \le 3M_2 L(I) \tag{5.34}$$

が成り立つ。

次に、x を動して考えてみると、この (5.34) は $(t,x) \in \mathrm{Cell}_{m_1}^{n_1}$ である間は同じ式が成り立ち、(t,x) が隣りのセルに移れば (m_1 が一つ変われば) この式の I もこの形のま

ま横に $2\Delta x$ 平行移動したものになる。よって、今 m_1, n_1, n_2 によって決定する (5.34) の I-曲線 I を $I(m_1; n_1, n_2)$ と書くことにすると、(5.34) は

$$|U^{\Delta}(t,x) - U^{\Delta}(s,x)| \leq 3M_2 L(I(m_1; n_1, n_2)) \tag{5.35}$$

となる。

次は、$n_1 = n_2$ のときを考える。この場合は (t,x) も (s,x) も同じセル $\mathrm{Cell}_{m_1}^{n_1}$ 内に入り、$I(m_1; n_1, n_2) = I(m_1; n_1, n_1)$ は、$a_{m_1-1}^{n_1-1}$ と $a_{m_1}^{n_1}$ と $a_{m_1+1}^{n_1-1}$ とを結ぶ 2 本の線分からなる有限 I-曲線となる。これに対して、

$$\begin{aligned} |U^{\Delta}(t,x) - U^{\Delta}(s,x)| &= |U^{\Delta}(t',x') - U^{\Delta}(s',y')| \\ &\leq \mathrm{TV}_{I(m_1;n_1,n_1)} U^{\Delta} \leq M_2 L(I(m_1; n_1, n_1)) \end{aligned}$$

となるので、(5.35) は $n_1 = n_2$ のときも成り立つと見ることができる。この (5.35) が方針 1. の (5.31) に対応する。

次は、方針 2. であるが、(5.35) を x で積分すると、

$$\begin{aligned} &\int_R |U^{\Delta}(t,x) - U^{\Delta}(s,x)| dx = \sum_{n_1+m \text{ は奇数}} \int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x} |U^{\Delta}(t,x) - U^{\Delta}(s,x)| dx \\ &\leq 3M_2 \sum_{n_1+m \text{ は奇数}} \int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x} L(I(m; n_1, n_2)) dx \\ &= 6M_2 \Delta x \sum_{n_1+m \text{ は奇数}} L(I(m; n_1, n_2)) \end{aligned}$$

となるが、ギザギザの有限な I-曲線 $I(m; n_1, n_2)$ の山の数は $(n_1 - n_2 + 1)$ 個で、よって、$(n_1 - n_2 + 1)$ 個おきの m に対して $I(m; n_1, n_2)$ をつなげるとこれは J_{n_2} になる。つまり、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} L(I(k(n_1 - n_2 + 1) + r; n_1, n_2)) = L(J_{n_2})$$

が言えるので、よって、

$$\sum_{n_1+m \text{ は奇数}} L(I(m; n_1, n_2)) = (n_1 - n_2 + 1) L(J_{n_2})$$

となる。結局、

$$\int_R |U^\Delta(t,x) - U^\Delta(s,x)|dx \le 6M_2\Delta x(n_1 - n_2 + 1)L(J_{n_2})$$

が言えることになる。これが方針 2. の (5.33) の最初の不等式に相当する。ここで $t_{n_1} - \Delta t \le t,\ s < t_{n_2}$ より

$$\begin{aligned}\Delta x(n_1 - n_2 + 1) &= \frac{\Delta x}{\Delta t}(n_1\Delta t - n_2\Delta t) + \Delta x = \Lambda(t_{n_1} - t_{n_2}) + \Delta x \\ &< \Lambda(t + \Delta t - s) + \Delta x = \Lambda(t-s) + 2\Delta x, \\ L(J_{n_2}) &\le \frac{3}{2}L(O) \le \frac{3}{2}\sqrt{N}M_1\,\mathrm{TV}_R\,U_0\end{aligned}$$

であるので、結局

$$\int_R |U^\Delta(t,x) - U^\Delta(s,x)|dx \le 9\sqrt{N}M_1M_2\{\Lambda(t-s) + 2\Delta x\}\,\mathrm{TV}_R\,U_0$$

となって (5.30) が示されたことになる。

6 収束性

6.1 各 t に対する極限

この節では、定理 5.2 で得た評価から、Glimm 差分近似解の収束性について考える。一般に定理 5.2 の評価では、$\Delta x \to +0$ のときに $U^\Delta(t,x)$ が強い意味で収束することまでは言えないが、0 に収束するある部分列 Δx_n を取って、それに対する近似解 $U^{\Delta_n}(t,x)$ をある意味で収束させることはできる。そこで使われるのが、次の Helly の選出定理である。

定理 6.1 (Helly の選出定理)

$\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ が R 上の有界変動関数列で、$f_n(x)$ の値とその全変動が一様有界、すなわち

$$\mathrm{TV}_R\,f_n \le A_1 < \infty, \quad \sup_{x\in R}|f_n(x)| \le A_2 < \infty$$

となるような定数 A_1, A_2 が存在するならば、$\{f_n(x)\}_n$ のある部分列 $\{f_{n_j}(x)\}_j$ と、ある有界変動関数 $f(x)$ が存在して、次を満たす:

$$\begin{cases} f_{n_j}(x) \to f(x) & (\text{各点収束}), \\ \mathrm{TV}_R\, f \le 2A_1, & \sup_x |f(x)| \le A_2, \end{cases}$$

この定理の証明はそれほど難しいものではないが、有界変動関数の性質がいくつか使われるので、証明は B 節で紹介する。

定理 5.2 の (5.28), (5.29) より、$U^\Delta(t,x)$ は t を固定して x の関数と見ると、この Helly の定理 6.1 の条件を満たしていることがわかる。よって、各 t に対して、U^Δ のある部分列が x に関して各点収束することになる。しかし、その部分列は t 毎に異なる可能性があり、共通に取れるとは限らないので、それを定理 5.2 の (5.30) と対角線論法によって結びつける。

まず、$(0,\infty)$ の、稠密で可算な部分集合 $\{t_k\}_{k=1,2,\dots}$ を取る (例えば正の有理数全体とすればよい)。Helly の定理 6.1 により、$t = t_1$ に対して、0 に収束する列 $\{\Delta x_n(1)\}_n$ を取り、それに対する近似解 $U^{\Delta_n(1)}$ がある有界変動関数 $p_{t_1}(x)$ に収束するようにできる:

$$\lim_{n\to\infty} U^{\Delta_n(1)}(t_1,x) = p_{t_1}(x) \quad (\text{各点収束})$$

そして、$t = t_2$ に対しては、再び Helly の定理 6.1 によりこの $\{\Delta x_n(1)\}_n$ の部分列 $\{\Delta x_n(2)\}_n \subset \{\Delta x_n(1)\}_n$ を取って、

$$\lim_{n\to\infty} U^{\Delta_n(2)}(t_2,x) = p_{t_2}(x) \quad (\text{各点収束})$$

とすることができる。以下同様にして、

$$\{\Delta x_n(1)\}_n \supset \{\Delta x_n(2)\}_n \supset \dots$$

のように部分列を取って、すべての k に対して

$$\lim_{n\to\infty} U^{\Delta_n(k)}(t_k,x) = p_{t_k}(x) \quad (\text{各点収束})$$

となるようにすることができる (p_{t_k} は Helly の定理 6.1 にあるような有界変動関数)。

このとき、$\{\Delta x_k(k)\}_k$ という列を考えると、$k \geq m$ に対しては

$$\{\Delta x_k(k)\}_{k\geq m} \subset \{\Delta x_n(m)\}_n$$

であるので、よってこの列に対してはすべての t_m に対して

$$\lim_{k\to\infty} U^{\Delta_k(k)}(t_m, x) = p_{t_m}(x) \tag{6.1}$$

となることが言える (いわゆる対角線論法)。

次に、$t \in (0,\infty) \setminus \{t_k\}$ に対する収束性を考える。定理 5.2 の (5.30) より、任意の正数 M に対して、

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\leq M} |U^{\Delta_n(n)}(t,x) - U^{\Delta_m(m)}(t,x)|dx \\
&\leq \int_{|x|\leq M} |U^{\Delta_n(n)}(t,x) - U^{\Delta_n(n)}(t_k,x)|dx \\
&\quad + \int_{|x|\leq M} |U^{\Delta_n(n)}(t_k,x) - U^{\Delta_m(m)}(t_k,x)|dx \\
&\quad + \int_{|x|\leq M} |U^{\Delta_m(m)}(t_k,x) - U^{\Delta_m(m)}(t,x)|dx \\
&\leq C_2(\Lambda|t-t_k| + 2\Delta x_n(n))\,\mathrm{TV}_R\, U_0 \\
&\quad + \int_{|x|\leq M} |U^{\Delta_n(n)}(t_k,x) - U^{\Delta_m(m)}(t_k,x)|dx \\
&\quad + C_2(\Lambda|t-t_k| + 2\Delta x_m(m))\,\mathrm{TV}_R\, U_0
\end{aligned} \tag{6.2}$$

となる。この式 (6.2) で $n, m \to \infty$ に関する上極限を取ると、$\Delta x_n(n)$, $\Delta x_m(m)$、および右辺の積分項は、(6.1) と U^Δ の一様有界性により 0 に収束するので、

$$\limsup_{n,m\to\infty} \int_{|x|\leq M} |U^{\Delta_n(n)}(t,x) - U^{\Delta_m(m)}(t,x)|dx \leq 2C_2\Lambda|t-t_k|\,\mathrm{TV}_R\, U_0 \tag{6.3}$$

となる。$\{t_k\}_k$ は $(0,\infty)$ 内で稠密であるから、(t_k を含む) 任意の $t \in (0,\infty)$ に対し (6.3) の右辺はいくらでも小さくできる。ゆえに

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_{|x|\leq M} |U^{\Delta_n(n)}(t,x) - U^{\Delta_m(m)}(t,x)|dx = 0$$

が成り立つ。これは、任意の M に対して $U^{\Delta_n(n)}(t,\cdot)$ が $L^1(-M,M)$ の Cauchy 列であることを意味するので、

$$U^{\Delta_n(n)}(t,\cdot) \to q_t \quad \text{in } L^1(-M,M) \tag{6.4}$$

となるような (M によらない) $g_t(x) \in L^1_{loc}(R)$ が取れることが容易に示される。

さらに、$\{U^{\Delta_n(n)}(t,x)\}$ は、各 t に関して Helly の定理 6.1 の条件を満たすから、$\{\Delta x_n(n)\}_n$ のある部分列 $\{\Delta x'_n(t)\}_n$ (t 毎に変わりうる) と、ある有界変動関数 $p_t(x)$ が取れて

$$U^{\Delta'_n(t)}(t,x) \to p_t(x) \quad (\text{各点収束}) \tag{6.5}$$

とできる ((6.1) より $\{t_k\}$ に対しては部分列を取る必要はない) ので、(6.4), (6.5) より、この $p_t(x)$ と $q_t(x)$ はすべての $t(>0)$ に対して

$$p_t(x) = q_t(x) \quad \text{a.e. in } R \tag{6.6}$$

を満たすことになる。

6.2 (t,x) に対する極限

(6.4) と Lebesgue 有界収束定理を用いれば、任意の正数 T, M に対して、

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^T \int_{|x|\le M} |U^{\Delta_n(n)}(t,x) - U^{\Delta_m(m)}(t,x)| dxdt = 0$$

も言えるので、ある $V(t,x) \in L^1_{loc}((0,\infty)\times R)$ が存在して、任意の正数 T, M に対して、

$$U^{\Delta_n(n)} \to V \quad \text{in } L^1((0,T)\times(-M,M))$$

が言える。よって、(必要ならば対角線論法を用いて) $\{\Delta x_n(n)\}_n$ のある部分列 $\{\Delta x''_n\}_n$ を取って、

$$U^{\Delta''_n} \to V \quad \text{a.e. in } (0,\infty)\times R \tag{6.7}$$

とできるので、(6.5), (6.6), (6.7) より、$(0,\infty)$ のある 0 集合 D に対して、$t \notin D$ ならば

$$V(t,x) = p_t(x) = q_t(x) \quad \text{a.e. } x \text{ in } R$$

となることが言える。よって $U(t,x)$ を、

$$U(t,x) = \begin{cases} V(t,x) & (t \notin D), \\ p_t(x) & (t \in D) \end{cases}$$

と定義すれば、U は 0 集合 $D \times R$ 以外では V に等しいから U は (t,x) に関する可測関数であり、すべての t に対し、

$$U(t,x) = p_t(x) = q_t(x) \quad \text{a.e. } x \text{ in } R \tag{6.8}$$

を満たすことになる。さらにこの $U(t,x)$ は、定理 5.2 と Helly の定理 6.1 により、次も満たすことになる:

$$\mathrm{TV}_R\, U(t,\cdot) \le 2C_1\, \mathrm{TV}_R\, U_0 \quad (t>0), \tag{6.9}$$

$$\|U(t,\cdot) - \bar{U}\|_{L^\infty(R)} \le \hat{\delta}_3 \quad (t>0), \tag{6.10}$$

$$\int_R |U(t,x) - U(s,x)|dx \le C_2\Lambda|t-s|\, \mathrm{TV}_R\, U_0 \quad (t,s>0) \tag{6.11}$$

ただし、この (6.9) のように $U(t,\cdot)$ を有界変動関数と見るときは、ここでは (6.8) により $U(t,\cdot)$ の代わりに $p_t(\cdot)$ を考えることを意味するものとする[3]。

Helly の定理 6.1、および $p_t(x)$ の定義により、

$$\mathrm{TV}_R\, p_t \le 2C_1\, \mathrm{TV}_R\, U_0, \quad |p_t(x) - \bar{U}| \le \hat{\delta}_3$$

であるから、(6.8) により (6.9), (6.10) が得られるので、最後に (6.11) を示す。

(5.30) より、任意の M に対して

$$\int_{-M}^{M} |U^{\Delta_n(n)}(t,x) - U^{\Delta_n(n)}(s,x)|dx \le C_2(\Lambda|t-s| + 2\Delta x_n(n))\, \mathrm{TV}_R\, U_0$$

[3]ほとんどいたるところ有界変動関数に等しい関数に対する、「本質的な全変動」を考えることもできるのであるが、ここではこのような素朴な意味に考えておく。本質的な全変動に関しては、例えば [Ziemer] を参照のこと。

であり $n \to \infty$ とすれば、(6.4) より

$$\int_{-M}^{M} |q_t(x) - q_s(x)| dx \leq C_2 \Lambda |t-s| \operatorname{TV}_R U_0$$

となり、よって (6.8) により

$$\int_{-M}^{M} |U(t,x) - U(s,x)| dx \leq C_2 \Lambda |t-s| \operatorname{TV}_R U_0$$

となる。M は任意なので、よって (6.11) が得られる。

以上をまとめると、以下のようになる。

定理 6.2

U_0 に関する定理 5.1 の仮定の下、0 に収束するある列 $\{\Delta x''_n\}_n$ に対して、これに対する近似解 $U^{\Delta''_n}$ はほとんどいたるところある関数 $U(t,x) \in L^1((0,\infty) \times R)$ に収束し、この $U(t,x)$ は (6.9), (6.10), (6.11) を満たす。

ただし、$L^1((0,\infty) \times R)$ の元 $U(t,x)$ の t での値 $U(t,\cdot)$ というのは、本来はほとんどいたるところの t にしか意味はないが、この定理での U の値に関する性質に関しては、上に述べてきたように、すべての t (および s) に対してこれらの性質 (6.9), (6.10), (6.11) が意味を持つような $L^1((0,\infty) \times R)$ の代表元を取ることができる、といったような意味合いであることに注意する。

7 誤差評価とエントロピー条件

7.1 誤差評価

6 節で見たように、Glimm 差分近似解はある関数 $U(t,x)$ に収束する部分列を持つが、この $U(t,x)$ が弱解であるかどうかは自明ではない。この節では、それが弱解、すなわち積分による関係式 (2.2) を満たすかどうかを考える。

各 $\phi(t,x) \in C_0^1([0,\infty) \times R)$ に対し、$\operatorname{supp}\phi \subset [0,T) \times (-M,M)$ となる正数 T, M を取れば、定理 6.2 により、

$$\iint_{[0,T)\times(-M,M)} |U^{\Delta_n''}(t,x) - U(t,x)|dtdx \to 0$$

であり、よって

$$\begin{aligned}
&\iint_{[0,T)\times(-M,M)} |F(U^{\Delta_n''}(t,x)) - F(U(t,x))|dtdx \\
&\quad\leq \sup_{U\in B_{\delta_3}(\bar{U})} |\nabla_U F(U)| \iint_{[0,T)\times(-M,M)} |U^{\Delta_n''} - U|dtdx \\
&\quad\to 0
\end{aligned}$$

となるので、まず

$$\iint_{t>0} \{\phi_t U^{\Delta_n''} + \phi_x F(U^{\Delta_n''})\}dtdx \to \iint_{t>0} \{\phi_t U + \phi_x F(U)\}dtdx$$

は成り立つ。

また、Δx を十分小さくして、$1/\Delta x > M + 2\Delta x$ であるとすれば、$\phi(0,x)$ が 0 でない範囲では $U^\Delta(0,x) = U_0(m\Delta x)$ となるので、

$$\begin{aligned}
&\left|\int_R \phi(0,x)U^\Delta(0,x)dx - \int_R \phi(0,x)U_0(x)dx\right| \\
&\quad\leq \sum_{m \text{ は奇数}} \int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x} |\phi(0,x)|\,|U_0(m\Delta x) - U_0(x)|dx \\
&\quad\leq \sum_{m \text{ は奇数}} \|\phi(0,\cdot)\|_C 2\Delta x \operatorname{TV}_{[(m-1)\Delta x,(m+1)\Delta x]} U_0 \\
&\quad= \|\phi(0,\cdot)\|_C 2\Delta x \operatorname{TV}_R U_0
\end{aligned}$$

なので、$\Delta x \to +0$ のときに、

$$\int_R \phi(0,x)U^\Delta(0,x)dx \to \int_R \phi(0,x)U_0(x)dx$$

が成り立つ。よって、後は、

$$E(\Delta x) = \iint_{t>0} \{\phi_t U^\Delta + \phi_x F(U^\Delta)\}dtdx + \int_R \phi(0,x)U^\Delta(0,x)dx \tag{7.1}$$

が、$\Delta x = \Delta x''_n$ のとき、あるいはその部分列に対して 0 に収束することを言えばよい。

なお、逆にこれが成り立たなければ、近似解はたとえ収束したとしてもそれは解ではないことを意味し、すなわち「近似解」が近似になっていないことになる。その意味で、(7.1) (またはその部分列) が 0 に収束することは、近似解がちゃんと解を近似しているかどうかを示すことにもなるので、この $E(\Delta x)$ の評価は 誤差評価 と呼ばれる。ただし、「誤差」とは言っても、実際に真の解との差を意味するわけではなく、あくまで解の弱形式 (2.2) の意味での誤差であるから、この値が小さいからといって近似解が真の解に近い状態であるとは限らない。

3.2 節で説明したように、Glimm の差分においては無限個の確率変数の組 $\theta = (\theta_n)_n$ が意味を持ち、これをランダムに取ることによってこの近似解が弱解に近づき、よってこの誤差 E が 0 に近づくことが期待される。その意味で、E は

$$E = E(\Delta x) = E(\Delta x, \theta, \phi)$$

と書いて考える方が適切となる。

また、6 節で考えた部分列や極限 (定理 6.2) では θ のことを考慮してはいなかったから、各 θ 毎に近似解を収束させる列や極限が取れたことになり、つまりそれらの列や極限も θ に依存していることになる。この節では、さらにその極限が弱解となるような「適切な」θ を取れることを示すことが目標となる。

まず、この E を変形する。$U^\Delta(t,x)$ は、$t = t_n$ 上、及び Riemann 問題の波のつなぎ目 (衝撃波や接触不連続の波の上、あるいは膨張波の端) を除いては滑らかで方程式 (1.1) を満たす。よって

$$U^\Delta_t + F(U^\Delta)_x = 0 \quad \text{a.e. in } (0,\infty)\times R$$

が成り立つので、これに $\phi(t,x)$ をかけて積分すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{t>0} \phi\{U^\Delta_t + F(U^\Delta)_x\}dtdx \\ &= \iint_{t>0} \{(\phi U^\Delta)_t + (\phi F(U^\Delta))_x\}dtdx - \iint_{t>0} \{\phi_t U^\Delta + \phi_x F(U^\Delta)\}dtdx \end{aligned} \tag{7.2}$$

となるが、この第 1 項は Green の定理により、

$$\iint_{t>0} \{(\phi U^\Delta)_t + (\phi F(U^\Delta))_x\}dtdx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_R \{(\phi U^\Delta)_t + (\phi F(U^\Delta))_x\}dxdt$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_R \left[\phi U^{\Delta}(t,x)\right]_{t=t_{n-1}+0}^{t=t_n-0} dx \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\sigma(t)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(- \left[\phi F(U^{\Delta})\right]_{x=\sigma(t)-0}^{x=\sigma(t)+0} + \sigma'(t) \left[\phi U^{\Delta}\right]_{x=\sigma(t)-0}^{x=\sigma(t)+0} \right) dt \qquad (7.3)
\end{aligned}
$$

と変形できる。ここで、$\sum_{\sigma(t)}$ は、$t_{n-1} < t < t_n$ 内の不連続波 $x = \sigma(t)$ すべてに渡る和である。しかし、それに関する積分は、Rankine-Hugoniot 条件 (2.7) により、

$$
- \left[\phi F(U^{\Delta})\right] + \sigma'(t) \left[\phi U^{\Delta}\right] = (\sigma'(t) \left[U^{\Delta}\right] - \left[F(U^{\Delta})\right])\phi(t, \sigma(t)) = 0
$$

となるので、結局 (7.3) の式は、

$$
\begin{aligned}
&\iint_{t>0} \{(\phi U^{\Delta})_t + (\phi F(U^{\Delta}))_x\} dt dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_R \phi(t_n, x) \left[U^{\Delta}\right]_{t=t_n+0}^{t=t_n-0} dx - \int_R \phi(0,x) U^{\Delta}(+0, x) dx \qquad (7.4)
\end{aligned}
$$

となる。よって、(7.2), (7.4) より、

$$
\begin{aligned}
E &= \iint_{t>0} \{\phi_t U^{\Delta} + \phi_x F(U^{\Delta})\} dt dx + \int_R \phi(0,x) U^{\Delta}(0,x) dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_R \phi(t_n, x) \left[U^{\Delta}\right]_{t=t_n+0}^{t=t_n-0} dx \qquad (7.5)
\end{aligned}
$$

が得られることになる。

今、この (7.5) の右辺の和の各項を E_n と書くことにする:

$$
\begin{aligned}
E_n &= E_n(\Delta x, \theta, \phi) = \int_R \phi(t_n, x) \left[U^{\Delta}\right]_{t=t_n+0}^{t=t_n-0} dx, \qquad (7.6) \\
E &= E(\Delta x, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\Delta x, \theta, \phi) \qquad (7.7)
\end{aligned}
$$

[Glimm], [Smoller] では、ϕ を一旦階段関数で近似してから、それに対する E_n の n に関する直交性を示して、そこからその近似に関する評価を行っているが、ここでは [Dafermos] に従ってそのままの $\phi \in C_0^1([0,\infty) \times R)$ に対して誤差評価を行う方法で話を進めることにする。

$E(\Delta x, \theta, \phi)$ は、直接これが 0 に収束することを示すことができるわけではなく、確率変数 θ に関する平均が 0 に収束することを示すことができるのみである。よってそれを示すために、まずこの E の「θ に関する積分」を考える。

各 θ_n は $-1 < \theta_n < 1$ であるので、この範囲を確率測度空間にするために $\mu(d\theta_n) = (1/2)dx$, すなわち

$$E \subset (-1,1) \text{ に対して } \mu(E) = \frac{1}{2}m(E) \quad (m \text{ は Lebesgue 測度})$$

と定め、

$$X = \prod_{n=1}^{\infty}(-1,1) \ni \theta = (\theta_n)_n$$

に対して、この $\mu(d\theta_n)$ から導かれる無限直積測度 $\nu(d\theta)$ を入れる。例えば、$X \supset \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ に対しては、

$$\nu\left(\prod_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}m(A_n)$$

となる。詳しくは確率論の本、例えば [西尾] を参照のこと。

まずは、$|E_n|$ の評価を考える。

$$\begin{aligned}
|E_n(\Delta x, \theta, \phi)| &\le \|\phi(t_n,\cdot)\|_C \int_R \left|\left[U^\Delta\right]_{t_n+0}^{t_n-0}\right| dx \\
&= \|\phi(t_n,\cdot)\|_C \sum_{m+n \text{ は奇数}} \int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x} \left|\left[U^\Delta(t_n-0,\xi)\right]_{\xi=(m+\theta_n)\Delta x}^{\xi=x}\right| dx \\
&\le \|\phi(t_n,\cdot)\|_C \sum_m 2\Delta x \,\mathrm{TV}_{[(m-1)\Delta x,(m+1)\Delta x]} U^\Delta(t_n-0,\cdot) \\
&= 2\Delta x \|\phi(t_n,\cdot)\|_C \,\mathrm{TV}_R U^\Delta(t_n-0,\cdot)
\end{aligned}$$

となるので、(5.28) より

$$|E_n(\Delta x, \theta, \phi)| \le 2C_1\Delta x \|\phi(t_n,\cdot)\|_C \,\mathrm{TV}_R U_0 \tag{7.8}$$

が得られる。

また、E_n を θ_n で積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} E_n(\Delta x,\theta,\phi)\mu(d\theta_n) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} E_n(\Delta x,\theta,\phi)d\theta_n \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_R \phi(t_n,x)\left[U^{\Delta}\right]_{t=t_n+0}^{t=t_n-0} dxd\theta_n \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m+n\ \text{は奇数}}\int_{-1}^{1}\int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x} \phi(t_n,x)\left[U^{\Delta}(t_n-0,\cdot)\right]_{(m+\theta_n)\Delta x}^{x} dxd\theta_n\end{aligned}$$

ここで、θ_n に関する積分を $y=(m+\theta_n)\Delta x$ と置換すれば、

$$\int_{-1}^{1} E_n(\Delta x,\theta,\phi)\mu(d\theta_n) \tag{7.9}$$

$$= \frac{1}{2\Delta x}\sum_m \int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x}\int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x} \phi(t_n,x)\left[U^{\Delta}(t_n-0,\cdot)\right]_y^x dxdy \tag{7.10}$$

となるが、

$$\begin{aligned}&\int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x}\int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x}\left[U^{\Delta}(t_n-0,\cdot)\right]_y^x dxdy \\ &= 2\Delta x\int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x} U^{\Delta}(t_n-0,x)dx - 2\Delta x\int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x} U^{\Delta}(t_n-0,y)dy \\ &= 0\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}&\int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x}\int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x} \phi(t_n,x)\left[U^{\Delta}(t_n-0,\cdot)\right]_y^x dxdy \\ &= \int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x}\int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x} \{\phi(t_n,x)-\phi(t_n,m\Delta x)\}\left[U^{\Delta}(t_n-0,\cdot)\right]_y^x dxdy\end{aligned} \tag{7.11}$$

と変形できる。$(m-1)\Delta x \le x \le (m+1)\Delta x$ では、

$$|\phi(t_n,x)-\phi(t_n,m\Delta x)| \le \|\phi_x(t_n,\cdot)\|_C\Delta x \tag{7.12}$$

と評価できるので、よって (7.10), (7.11), (7.12) により、

$$\left|\int_{-1}^{1} E_n(\Delta x,\theta,\phi)\mu(d\theta_n)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2\Delta x}\sum_m \|\phi_x(t_n,\cdot)\|_C \Delta x \int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x}\int_{(m-1)\Delta x}^{(m+1)\Delta x} \left|\left[U^\Delta\right]_y^x\right| dxdy \\
&\leq \frac{1}{2}\|\phi_x(t_n,\cdot)\|_C \sum_m (2\Delta x)^2 \,\mathrm{TV}_{[(m-1)\Delta x,(m+1)\Delta x]}\, U^\Delta(t_n-0,\cdot) \\
&\leq 2(\Delta x)^2\|\phi_x(t_n,\cdot)\|_C \,\mathrm{TV}_R\, U^\Delta(t_n-0,\cdot)
\end{aligned}
$$

となる。よって、

$$
\left|\int_{-1}^{1} E_n(\Delta x,\theta,\phi)\mu(d\theta_n)\right| \leq 2C_1(\Delta x)^2\|\phi_x(t_n,\cdot)\|_C \,\mathrm{TV}_R\, U_0 \tag{7.13}
$$

となる。

自然数 n_0 を、$n_0\Delta t < T \leq (n_0+1)\Delta t$ なるものとすると $n > n_0$ に対して $\phi(t_n,x)\equiv 0$ であり、そのような n に対しては $E_n = 0$ となるので、

$$
E(\Delta x,\theta,\phi) = \sum_{n=1}^{n_0} E_n(\Delta x,\theta,\phi)
$$

であり、よって $n > n_0$ に対する θ_n は $E(\Delta x,\theta,\phi)$ の中には現れない。よって、$|E|^2$ を X で積分すると、

$$
\begin{aligned}
&\int_X |E(\Delta x,\theta,\phi)|^2\nu(d\theta) \\
&= \int_{\prod_{n=1}^{n_0}(-1,1)} \left|\sum_{n=1}^{n_0} E_n(\Delta x,\theta,\phi)\right|^2 \mu(d\theta_1)\cdots\mu(d\theta_{n_0}) \\
&= \frac{1}{2^{n_0}}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\left|\sum_{n=1}^{n_0} E_n(\Delta x,\theta,\phi)\right|^2 d\theta_1\cdots d\theta_{n_0}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
\left|\sum_{n=1}^{n_0} E_n\right|^2 = \left(\sum_{n=1}^{n_0} E_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{n_0} E_n\right) = \sum_{n=1}^{n_0}|E_n|^2 + 2\sum_{n_1<n_2\leq n_0} E_{n_1}\cdot E_{n_2} \tag{7.14}
$$

と分けると、$n > k$ のとき E_k は θ_n に関しては定数なので、この $|E_n|^2$ の和に関する積分は (7.8) より、

$$
\frac{1}{2^{n_0}}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\sum_{n=1}^{n_0}|E_n|^2 d\theta_1\cdots d\theta_{n_0} = \sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}|E_n|^2 d\theta_1\cdots d\theta_n
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 4C_1^2(\Delta x)^2 \sum_{n=1}^{n_0} \|\phi(t_n,\cdot)\|_C^2 (\mathrm{TV}_R\, U_0)^2 \frac{1}{2^n} \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} d\theta_1 \cdots d\theta_n \\
&\leq 4C_1^2(\Delta x)^2 n_0 \|\phi\|_{C([0,\infty)\times R)}^2 (\mathrm{TV}_R\, U_0)^2
\end{aligned}
$$

と評価できる。ここで、$n_0\Delta x = n_0\Delta t\Lambda \leq T\Lambda$ なので、結局

$$
\frac{1}{2^{n_0}} \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} \sum_{n=1}^{n_0} |E_n|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_{n_0} \leq 4C_1^2 T\Lambda \Delta x \|\phi\|_{C([0,\infty)\times R)}^2 (\mathrm{TV}_R\, U_0)^2 \tag{7.15}
$$

となる。一方、$E_{n_1} \cdot E_{n_2}$ の和の積分は、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{n_0}} \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} 2 \sum_{n_1 < n_2 \leq n_0} E_{n_1} \cdot E_{n_2} d\theta_1 \cdots d\theta_{n_0} \\
&= 2 \sum_{n_1 < n_2 \leq n_0} \frac{1}{2^{n_2}} \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} E_{n_1} \cdot E_{n_2} d\theta_{n_2} \cdots d\theta_1
\end{aligned}
$$

と書け、$n_1 < n_2$ なので、(7.8), (7.13) より、

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} E_{n_1} \cdot E_{n_2} d\theta_{n_2} \right| = \frac{1}{2} \left| E_{n_1} \cdot \int_{-1}^{1} E_{n_2} d\theta_{n_2} \right| \leq \frac{1}{2} |E_{n_1}| \left| \int_{-1}^{1} E_{n_2} d\theta_{n_2} \right| \\
&\leq C_1 \Delta x \|\phi(t_{n_1},\cdot)\|_C \,\mathrm{TV}_R\, U_0 \cdot 2C_1 (\Delta x)^2 \|\phi_x(t_{n_2},\cdot)\|_C \,\mathrm{TV}_R\, U_0 \\
&= 2C_1^2 (\Delta x)^3 (\mathrm{TV}_R\, U_0)^2 \|\phi(t_{n_1},\cdot)\|_C \|\phi_x(t_{n_2},\cdot)\|_C
\end{aligned}
$$

となるので、よって、

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2^{n_0}} \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} 2 \sum_{n_1 < n_2 \leq n_0} E_{n_1} \cdot E_{n_2} d\theta_1 \cdots d\theta_{n_0} \right| \\
&\leq 2 \sum_{n_1 < n_2 \leq n_0} 2C_1^2 (\Delta x)^3 (\mathrm{TV}_R\, U_0)^2 \|\phi(t_{n_1},\cdot)\|_C \|\phi_x(t_{n_2},\cdot)\|_C \\
&= 4C_1^2 (\Delta x)^3 (\mathrm{TV}_R\, U_0)^2 \sum_{n_1=1}^{n_0-1} \sum_{n_2=n_1+1}^{n_0} \|\phi(t_{n_1},\cdot)\|_C \|\phi_x(t_{n_2},\cdot)\|_C \\
&\leq 4C_1^2 (\Delta x)^3 \|\phi\|_C \|\phi_x\|_C (\mathrm{TV}_R\, U_0)^2 \sum_{n_1=1}^{n_0-1} (n_0 - n_1) \\
&= 2n_0(n_0-1) C_1^2 (\Delta x)^3 \|\phi\|_C \|\phi_x\|_C (\mathrm{TV}_R\, U_0)^2
\end{aligned}
$$

となるので、$n_0\Delta x \le T\Lambda$ より

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2^{n_0}}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1} 2\sum_{n_1<n_2\le n_0} E_{n_1}\cdot E_{n_2} d\theta_1\cdots d\theta_{n_0}\right| \\ &\quad\le\ 2C_1^2(T\Lambda)^2\Delta x\|\phi\|_C\|\phi_x\|_C(\mathrm{TV}_R U_0)^2 \end{aligned} \tag{7.16}$$

となる。よって、(7.14), (7.15), (7.16) より、

$$\begin{aligned}&\int_X |E(\Delta x,\theta,\phi)|^2\nu(d\theta) \\ &\quad\le\ 4T\Lambda(C_1\,\mathrm{TV}_R U_0\|\phi\|_C)^2\Delta x + 2(C_1T\Lambda\,\mathrm{TV}_R U_0)^2\|\phi\|_C\|\phi_x\|_C\Delta x \end{aligned} \tag{7.17}$$

が得られるから、$\Delta x \to +0$ のとき

$$\int_X |E(\Delta x,\theta,\phi)|^2\nu(d\theta) \to 0$$

となることがわかる。つまり、$E(\Delta x,\theta,\phi)$ は、$L^2(X;\nu(d\theta))$ で 0 に収束することになるので、通常の Lebesgue 積分の理論により、0 に a.e. 収束する $E(\Delta x,\theta,\phi)$ の部分列が存在することが示される。つまり、ある $N_\phi \subset X$ と 0 に収束する列 $\{\Delta\bar{x}_n(\phi)\}_n$ (それぞれ ϕ に依存するが θ にはよらない) がとれて、$\nu(N_\phi)=0$ で、かつ $\theta \in X\setminus N_\phi$ に対して

$$E(\Delta\bar{x}_n(\phi),\theta,\phi) \to 0$$

となる。この N や部分列の ϕ への依存性をなくすために次の事実を用いる。

補題 7.1

$C_0^\infty([0,\infty)\times R)$ のある可算部分集合列 $\{\phi_n\}_n$ があって、任意の $\phi \in C_0([0,\infty)\times R)$ に対し、ある部分列 $\{\phi_{n_j}\}_j$ が取れて次を満たす。

1. j によらないある正数 $T_0,\ M_0$ が存在して、

$$\mathrm{supp}\,\phi_{n_j}, \mathrm{supp}\,\phi \subset [0,T_0)\times(-M_0,M_0)$$

2. $j \to \infty$ のとき、

$$\|\phi_{n_j} - \phi\|_C \to 0$$

これは、任意の連続関数がコンパクト集合上多項式で一様近似できること(Weierstrass の定理) と、$[0,n] \times [-m,m]$ 上 1 で C_0^∞ の元であるような関数列 $\psi_{n,m}(t,x)$ を使えば容易に示せるので証明は省略する。

この補題 7.1 の ϕ_k に対する N_{ϕ_k} を考えると、その和 $N = \bigcup_k N_{\phi_k}$ も 0 集合 $(\nu(N) = 0)$ であり、一方部分列の方は、この $\{\phi_k\}$ に関して次のような部分列の列を作る:

$$\{\Delta\bar{x}'_n(1)\} \supset \{\Delta\bar{x}'_n(2)\} \supset \{\Delta\bar{x}'_n(3)\} \supset \dots$$

で、任意の k と $\theta \in X \setminus N_{\phi_k}$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} E(\Delta\bar{x}'_n(k), \theta, \phi_k) = 0$$

となるものとする。対角線論法を用いれば、$\theta \in X \setminus N = \bigcap_k (X \setminus N_{\phi_k})$ に対しては任意の k に対して

$$\lim_{n\to\infty} E(\Delta\bar{x}'_n(n), \theta, \phi_k) = 0 \tag{7.18}$$

となることが言える。

このとき、任意の $\phi \in C_0^1([0,\infty) \times R)$ に対して、補題 7.1 の $\{\phi_{n_j}\}_j$ と T_0, M_0 を取れば、(7.8) により、

$$\begin{aligned}
&|E(\Delta\bar{x}'_n(n), \theta, \phi)| \le |E(\Delta\bar{x}'_n(n), \theta, \phi - \phi_{n_j})| + |E(\Delta\bar{x}'_n(n), \theta, \phi_{n_j})| \\
&\le \sum_{k=1}^{[T_0/\Delta\bar{t}'_n(n)]} 2C_1\Delta\bar{x}'_n(n)\|(\phi - \phi_{n_j})(t_k, \cdot)\|_C \,\mathrm{TV}_R\, U_0 + |E(\Delta\bar{x}'_n(n), \theta, \phi_{n_j})| \\
&\le 2C_1\Lambda T_0 \,\mathrm{TV}_R\, U_0 \|\phi - \phi_{n_j}\|_C + |E(\Delta\bar{x}'_n(n), \theta, \phi_{n_j})|
\end{aligned}$$

となるので、$n \to \infty$ の上極限を取れば、(7.18) より

$$\limsup_{n\to\infty} |E(\Delta\bar{x}'_n(n), \theta, \phi)| \le 2C_1\Lambda T_0 \,\mathrm{TV}_R\, U_0 \|\phi - \phi_{n_j}\|_C$$

となるが、$j \to \infty$ とすれば右辺は 0 に収束するので、結局 $\theta \in X \setminus N$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} E(\Delta\bar{x}'_n(n), \theta, \phi) = 0$$

となる。

この $\{\Delta\bar{x}'_n(n)\}_n$ に対し、6 節の議論を用いてある $U(t,x)$ に収束する部分列 $\{\Delta\tilde{x}_n\}_n$ を取れば、$\theta \in X \setminus N$ に対してはその極限 U が弱解になることが言えたことになる。

7.2 エントロピー条件

最後に、エントロピー条件 (2.3) を考える。7.1 節と同様にして、

$$\eta(U^\Delta)_t + q(U^\Delta)_x = 0 \quad \text{a.e. in } (0,\infty)\times R$$

であるので、$\phi \in C_0^1([0,\infty)\times R),\ \phi \geq 0$ に対し、

$$\begin{aligned}
0 &= \iint_{t>0} \{\eta(U^\Delta)_t + q(U^\Delta)_x\}\phi dtdx \\
&= \iint_{t>0} \{(\phi\eta^\Delta)_t + (\phi q^\Delta)_x\}dtdx - \iint_{t>0} (\phi_t\eta^\Delta + \phi_x q^\Delta)dtdx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_R \phi(t_n,x)\left[\eta(U^\Delta)\right]_{t_n+0}^{t_n-0} dx - \int_R \phi(0,x)\eta(U^\Delta(+0,x))dx \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sum_{\sigma(t)} \phi([q^\Delta] - \sigma'[\eta^\Delta])dt - \iint_{t>0} (\phi_t\eta^\Delta + \phi_x q^\Delta)dtdx
\end{aligned}$$

ここで、[竹野] にあるように、不連続波に対する $[q^\Delta] - \sigma'[\eta^\Delta]$ の値は、

- 衝撃波に対しては $[q^\Delta] - \sigma'[\eta^\Delta] \leq 0$
- 接触不連続に対しては $[q^\Delta] - \sigma'[\eta^\Delta] = 0$

であるので、

$$\iint_{t>0} (\phi_t\eta^\Delta + \phi_x q^\Delta)dtdx + \int_R \phi(0,x)\eta(U^\Delta(+0,x))dx \quad \geq \quad \hat{E}(\Delta x, \theta, \phi)$$

が言えることになる。ここで、

$$\hat{E}(\Delta x, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_R \phi(t_n, x) \left[\eta^{\Delta}\right]_{t_n+0}^{t_n-0} dx$$

である。

今、Δx を $\Delta \bar{x}_n(n)$ と取れば、7.1 節と同様にして、

$$\begin{aligned} &\iint_{t>0} (\phi_t \eta^{\Delta} + \phi_x q^{\Delta}) dt dx + \int_R \phi(0,x)\eta(U^{\Delta}(+0,x))dx \\ &= \iint_{t>0} (\phi_t \eta + \phi_x q) dt dx + \int_R \phi(0,x)\eta(U_0(x))dx + o(1) \end{aligned}$$

であることが言えるから、よって後は $\hat{E}(\Delta x, \theta, \phi)$ が 0 になるようにすればよい。しかし、これに対しては、$E(\Delta x, \theta, \phi)$ と全く同じ議論を繰り返すことにより、$\{\Delta \tilde{x}_n\}_n$ の部分列 $\{\Delta \hat{x}_n\}_n$ と、ν に関する 0 集合 $N' \supset N$ が取れて、$\theta \in X \setminus N'$ に対し、任意の $\phi \in C_0^1([0,\infty) \times R)$ に対して

$$\hat{E}(\Delta \hat{x}_n, \theta, \phi) \to 0$$

となることを言うことができる。

よって、その $\{\Delta \hat{x}_n\}_n$ と $\theta \in X \setminus N'$ に対する極限は、弱解でかつエントロピー条件

$$\iint_{t>0} (\phi_t \eta + \phi_x q) dt dx + \int_R \phi(0,x)\eta(U_0(x))dx \geq 0 \tag{7.19}$$

を満たすことが言える $(\phi \geq 0)$。なお、この (7.19) は、初期値の項がついているので、その分だけ (2.3) よりも強い条件になっているが、もちろん (2.3) も成立する。

定理 7.2

定理 5.1 の仮定の下で構成した Glimm 差分近似解 U^{Δ} に対し、0 に収束する列 $\{\Delta \hat{x}_n\}_n$ と ν に関する 0 集合 $N'(\subset X)$ が存在して、$\theta \in X \setminus N'$ に対する $U^{\hat{\Delta}_n}$ の極限は、エントロピー条件 (7.19) を満たす弱解であり、(6.9), (6.10), (6.11) を満たす。

8 最後に

双曲型保存則方程式 (1.1) の初期値問題の弱解の存在証明法としては、現在は Glimm の差分近似以外にも、波面追跡法 (front tracking method)、補完測度法 (compensated compactness) などの方法が知られていて、特に最近はこれらの方法による研究が盛んに行われている。

波面追跡法は、相互作用評価も Glimm 差分ほど詳しいものは必要とはせず、解の適切性を保証する Bressan 理論にもつながる話であるし、また補完測度法は、Glimm の差分が、特別な場合を除いては全変動が十分小さい初期値にしか適用できないのに対し、ある種の方程式に対してはより一般的な初期値に対しても弱解の存在を示すことができる、というメリットがある。

しかし、Glimm 差分の解の性質との密接な関連や、初期値に対する制限を除けば適用できる方程式の範囲が広いこと (補完測度法は適用できる方程式が制限される)、そして Glimm 差分に関する色々な拡張、改良が行われてきたことからすれば、現在でも保存則方程式の研究者にとっては必須の道具であり、重要な方法であることには変わりがない。

本稿が、それを学ぶための一助となれば幸いである。

A 有界変動関数の性質

この節では、有界変動関数に関するの性質のうち、Glimm の差分法に必要なものを簡単に紹介する。

Δ を閉区間 $[a,b]$ の分割、すなわち、

$$\Delta:\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

とするとき、

$$V(\Delta, f) = \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|, \tag{A.1}$$

$$P(\Delta, f) = \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1}))_+, \tag{A.2}$$

$$N(\Delta, f) = \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1}))_- \tag{A.3}$$

と定める。ここで、

$$a_+ = \max\{a, 0\}, \quad a_- = \min\{-a, 0\}$$

とする。これに対し、このような $[a, b]$ の分割すべてに対する上限を考え、

$$\mathrm{TV}_{[a,b]}\, f = \sup_{\Delta} V(\Delta, f), \tag{A.4}$$

$$P_{[a,b]} f = \sup_{\Delta} P(\Delta, f), \tag{A.5}$$

$$N_{[a,b]} f = \sup_{\Delta} N(\Delta, f) \tag{A.6}$$

とし、それぞれ f の全変動、正変動、負変動と呼ぶ。

開区間や半開区間 $I = (a, b)$, $[a, b)$, $(a, b]$ (無限区間 $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ も含む) に対しては、

$$\mathrm{TV}_I\, f = \sup_{[c,d] \subset I} \mathrm{TV}_{[c,d]}\, f$$

のように定義し、$P_I f$, $N_I f$ も同様に定義する。これらは、より広い区間に対するものの方が値が大きくなるから、例えば

$$\begin{cases} \mathrm{TV}_{(a,b]}\, f = \lim_{c \to a+0} \mathrm{TV}_{[c,b]}\, f, \\ \mathrm{TV}_{[a,b)}\, f = \lim_{d \to b-0} \mathrm{TV}_{[a,d]}\, f, \\ \mathrm{TV}_{(a,b)}\, f = \lim_{c \to a+0,\ d \to b-0} \mathrm{TV}_{[c,d]}\, f \end{cases} \tag{A.7}$$

等は容易にわかる。もちろんこれらは $P_I f$, $N_I f$ に対しても同様のことが言える。

$\mathrm{TV}_I\, f < \infty$ である関数 f を、I 上の 有界変動関数 と呼ぶ。

$[a, b]$ の分割 Δ に対して、その Δ の分点をすべて含む (よって Δ より細かい) $[a, b]$ の分割を Δ の 細分 と呼ぶ。

命題 A.1

$$\mathrm{TV}_{[a,b]}\, f = P_{[a,b]} f + N_{[a,b]} f \tag{A.8}$$

証明

まず、

$$|x| = x_+ + x_-, \quad x = x_+ - x_- \tag{A.9}$$

および、

$$|x+y| \le |x| + |y|, \quad (x+y)_+ \le x_+ + y_+, \quad (x+y)_- \le x_- + y_- \tag{A.10}$$

に注意する。$[a,b]$ の任意の分割 Δ に対し、(A.9) より、

$$V(\Delta, f) = P(\Delta, f) + N(\Delta, f) \le P_{[a,b]} f + N_{[a,b]} f$$

となるので、Δ の上限をとれば

$$\mathrm{TV}_{[a,b]}\, f \le P_{[a,b]} f + N_{[a,b]} f \tag{A.11}$$

が得られる。一方、$[a,b]$ の分割 Δ_1, Δ_2 に対し、その共通の細分である、Δ_1 と Δ_2 の分割点すべてからなる分割を $\Delta_1 \cup \Delta_2$ と書くことにすれば、(A.10) より

$$P(\Delta_1, f) \le P(\Delta_1 \cup \Delta_2, f), \quad N(\Delta_2, f) \le N(\Delta_1 \cup \Delta_2, f)$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} &P(\Delta_1, f) + N(\Delta_2, f) \le P(\Delta_1 \cup \Delta_2, f) + N(\Delta_1 \cup \Delta_2, f) = V(\Delta_1 \cup \Delta_2, f) \\ &\quad \le \ \mathrm{TV}_{[a,b]}\, f \end{aligned}$$

となる。よって、Δ_1, Δ_2 の上限を取れば

$$P_{[a,b]} f + N_{[a,b]} f \le \mathrm{TV}_{[a,b]}\, f \tag{A.12}$$

となるので、(A.11), (A.12) より (A.8) が成り立つ。■

系 A.2

開区間、半開区間に対しても以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\mathrm{TV}_{(a,b]}\, f &= P_{(a,b]}f + N_{(a,b]}f \quad (a = -\infty \text{ も含む}),\\
\mathrm{TV}_{[a,b)}\, f &= P_{[a,b)}f + N_{[a,b)}f \quad (b = \infty \text{ も含む}),\\
\mathrm{TV}_{(a,b)}\, f &= P_{(a,b)}f + N_{(a,b)}f \quad (a = -\infty,\, b = \infty \text{ も含む})
\end{aligned}$$

この系 A.2 は、(A.7) より容易に示される。

命題 A.3

$\mathrm{TV}_{[a,b]}\, f < \infty$ のとき、

$$P_{[a,b]}f - N_{[a,b]}f = f(b) - f(a) \tag{A.13}$$

証明

命題 A.1 より、$\mathrm{TV}_{[a,b]}\, f < \infty$ ならば $P_{[a,b]}f < \infty$, $N_{[a,b]}f < \infty$ となる。よって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$[a,b]$ のある分割 Δ_1, Δ_2 が存在して、

$$P_{[a,b]}f < P(\Delta_1, f) + \varepsilon, \quad N_{[a,b]}f < N(\Delta_2, f) + \varepsilon \tag{A.14}$$

とできる。今、(A.9) より、

$$P(\Delta, f) - N(\Delta, f) = \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1})) = f(b) - f(a)$$

なので、(A.14) より、

$$\begin{aligned} P_{[a,b]}f - N_{[a,b]}f &< P(\Delta_1, f) + \varepsilon - N(\Delta_1, f) = f(b) - f(a) + \varepsilon, \\ P_{[a,b]}f - N_{[a,b]}f &> P(\Delta_2, f) - (N(\Delta_2, f) + \varepsilon) = f(b) - f(a) - \varepsilon \end{aligned}$$

となる。ε は任意なので、よって (A.13) が成り立つ。■

命題 A.4

$\mathrm{TV}_{[a,b]}\, f < \infty$ のとき、$a \le x \le b$ に対して、

$$P_{[a,x]}f, \quad N_{[a,x]}f, \quad \mathrm{TV}_{[a,x]}\, f$$

はいずれも x に関して単調増加関数で、$x \pm 0$ への片側極限 (ただし $x = a$ では $x + 0$, $x = b$ では $x - 0$) が常に存在し、不連続点は高々可算個である。

証明

前半部分は明らか。後半部分は一般の単調増加関数に対して言える。今、$g(x)$ を $[a, b]$ 上単調増加な関数であるとすると、単調収束定理により $g(x \pm 0)$ (端点では片側のみ) の存在は明らか。よって、不連続点は

$$g(x - 0) < g(x + 0)$$

となる x であり、この間には有理数が少なくとも一つ存在する。つまり、不連続点の個数は $[g(a), g(b)]$ 内の有理数の個数以下であるから高々可算個。■

命題 A.3, A.4、および (A.7) より次の系も容易に得られる。

系 A.5

開区間、半開区間 (無限区間も含む) に対しても、命題 A.3 と同様に以下が成り立つ。

$$\mathrm{TV}_{(a,b]}\, f < \infty \quad \Rightarrow \quad P_{(a,b]}f - N_{(a,b]}f = f(b) - f(a + 0),$$

$$\mathrm{TV}_{[a,b)} f < \infty \;\Rightarrow\; P_{[a,b)}f - N_{[a,b)}f = f(b-0) - f(a),$$
$$\mathrm{TV}_{(a,b)} f < \infty \;\Rightarrow\; P_{(a,b)}f - N_{(a,b)}f = f(b-0) - f(a+0)$$

この系 A.5 も、(A.7) より容易に示される。

命題 A.6

$f(x) \in C^0([a,b]) \cap C^1((a,b))$ で、かつ

$$\sup_{x\in(a,b)} |f'(x)| \le M < \infty$$

のとき、$\mathrm{TV}_{[a,b]} f < \infty$ で、

$$\mathrm{TV}_{[a,b]} f = \int_a^b |f'(x)|dx \tag{A.15}$$

証明

平均値の定理により、任意の分割 Δ に対し、

$$\begin{aligned} V(\Delta, f) &= \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n} |f'(\xi_j)|(x_j - x_{j-1}) \quad (x_{j-1} < \xi_j < x_j) \\ &\le M\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1}) = M(b-a) \end{aligned}$$

となるので、

$$\mathrm{TV}_{[a,b]} f \le M(b-a) < \infty$$

が言える。また、この命題の仮定の元 $|f'(x)|$ はリーマン可積分であり、任意の分割 Δ に対し、

$$V(\Delta, f) = \sum_{j=1}^{n} |f'(\xi_j)|(x_j - x_{j-1}) \tag{A.16}$$

であるが、今

$$\|\Delta\| = \max_j \{x_j - x_{j-1}\}$$

と書くことにすると、$\|\Delta_n\| \to 0$ となる分割列 $\{\Delta_n\}_n$ を取ると、(A.16) とリーマン可積分性により、

$$V(\Delta_n, f) \to \int_a^b |f'(x)|dx \tag{A.17}$$

となる。よって、

$$V(\Delta_n, f) \leq \mathrm{TV}_{[a,b]}\, f$$

で $n \to \infty$ とすれば

$$\int_a^b |f'(x)|dx \leq \mathrm{TV}_{[a,b]}\, f \tag{A.18}$$

となる。逆に、$\mathrm{TV}_{[a,b]}\, f < \infty$ より、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\mathrm{TV}_{[a,b]}\, f < V(\Delta_\varepsilon, f) + \varepsilon$$

となる分割 Δ_ε が取れるが、これに対し $\|\Delta_n\| \to 0$ となる Δ_n に対し、$\Delta_\varepsilon \cup \Delta_n$ を考えれば、

$$\|\Delta_\varepsilon \cup \Delta_n\| \leq \|\Delta_n\| \to 0$$

となるので、

$$\mathrm{TV}_{[a,b]}\, f < V(\Delta_\varepsilon, f) + \varepsilon \leq V(\Delta_\varepsilon \cup \Delta_n, f) + \varepsilon$$

で $n \to \infty$ とすれば (A.17) より、

$$\mathrm{TV}_{[a,b]}\, f \leq \int_a^b |f'(x)|dx + \varepsilon \tag{A.19}$$

が得られる。よって、ε の任意性と (A.18), (A.19) により (A.15) が成り立つ。■

命題 A.7

$a < b < c$ に対し、

$$\mathrm{TV}_{[a,b]} f + \mathrm{TV}_{[b,c]} f = \mathrm{TV}_{[a,c]} f \tag{A.20}$$

証明

$[a, b]$ の分割 Δ_1, $[b, c]$ の分割 Δ_2 を取ると、これを合わせて $[a, c]$ の分割ができる。これを $\Delta_1 + \Delta_2$ と書くことにすると、

$$V(\Delta_1, f) + V(\Delta_2, f) = V(\Delta_1 + \Delta_2, f) \leq \mathrm{TV}_{[a,c]} f$$

となるので、Δ_1, Δ_2 の上限を取れば

$$\mathrm{TV}_{[a,b]} f + \mathrm{TV}_{[b,c]} f \leq \mathrm{TV}_{[a,c]} f \tag{A.21}$$

となる。一方、$[a, c]$ の分割 Δ に対し、Δ に b を分点として追加した細分を Δ' とし、Δ' を $[a, b]$ の分割 Δ_1 と $[b, c]$ の分割 Δ_2 に分けて $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta'$ とすると、

$$V(\Delta, f) \leq V(\Delta', f) = V(\Delta_1, f) + V(\Delta_2, f) \leq \mathrm{TV}_{[a,b]} f + \mathrm{TV}_{[b,c]} f$$

となるので、Δ に関する上限を取れば

$$\mathrm{TV}_{[a,c]} f \leq \mathrm{TV}_{[a,b]} f + \mathrm{TV}_{[b,c]} f \tag{A.22}$$

となるので、(A.21), (A.22) より (A.20) が成り立つ。■

命題 A.7 より、以下の 2 つの系も容易に得られる (よって証明は省略する)。

系 A.8

開区間、半開区間に対しても以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\mathrm{TV}_{(a,c]} f &= \mathrm{TV}_{(a,b]} f + \mathrm{TV}_{[b,c]} f \quad (a = -\infty \text{ も含む}), \\
\mathrm{TV}_{[a,c)} f &= \mathrm{TV}_{[a,b]} f + \mathrm{TV}_{[b,c)} f \quad (c = \infty \text{ も含む}), \\
\mathrm{TV}_{(a,c)} f &= \mathrm{TV}_{(a,b]} f + \mathrm{TV}_{[b,c)} f \quad (a = -\infty,\ c = \infty \text{ も含む})
\end{aligned}$$

系 A.9

任意の a と $b > 0$ に対して、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{TV}_{[a+(k-1)b,a+kb]} f = \mathrm{TV}_R f$$

命題 A.10

$\mathrm{TV}_R f < \infty$ のとき、任意の $A > 0$ に対し、

$$\int_R \mathrm{TV}_{[x-A,x+A]} f dx \leq 2A \,\mathrm{TV}_R f \tag{A.23}$$

証明

まず、$\mathrm{TV}_R f < \infty$ より、系 A.8 から $\mathrm{TV}_{[x-A,x+A]} f$ は

$$\mathrm{TV}_{[x-A,x+A]} f = \mathrm{TV}_{(-\infty,x+A]} f - \mathrm{TV}_{(-\infty,x-A]} f$$

と有界な単調増加関数の差と書けるので、これは x に関して Lebesgue 可測関数となる。任意の $B > 0$ に対して、

$$\int_R \mathrm{TV}_{[x-A,x+A]} f dx \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{mB}^{(m+1)B} \mathrm{TV}_{[x-A,x+A]} f dx$$

$$\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{mB}^{(m+1)B} \mathrm{TV}_{[mB-A,(m+1)B+A]}\, f dx = B \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{TV}_{[mB-A,(m+1)B+A]}\, f$$
$$= B \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{TV}_{[mB-A,mB-A+(2A+B)]}\, f$$

となるが、ここで

$$m_0 - 1 < \frac{2A+B}{B} \leq m_0 \tag{A.24}$$

となる自然数 m_0 を取ると、$2A + B \leq m_0 B$ より

$$\mathrm{TV}_{[mB-A,mB-A+(2A+B)]}\, f \leq \mathrm{TV}_{[mB-A,(m+m_0)B-A]}\, f$$

であり、よって、

$$\int_R \mathrm{TV}_{[x-A,x+A]}\, f dx \leq B \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{TV}_{[mB-A,(m+m_0)B-A]}\, f \tag{A.25}$$

となるが、系 A.9 より、

$$\sum_{m \equiv j \pmod{m_0}} \mathrm{TV}_{[mB-A,(m+m_0)B-A]}\, f = \mathrm{TV}_R\, f$$

であるので、(A.25) の右辺は、$m_0 B\, \mathrm{TV}_R\, f$ に等しく、(A.24) より $m_0 B < 2A + 2B$ となるので、結局、

$$\int_R \mathrm{TV}_{[x-A,x+A]}\, f dx \leq (2A + 2B)\, \mathrm{TV}_R\, f$$

となる。B は任意なので、よって (A.23) が成り立つ。■

B Helly の選出定理

この節では、Helly の選出定理 6.1 の証明を行う。

まず、系 A.2, A.5 より、

$$\begin{aligned} \mathrm{TV}_{(-\infty,x]}\, f_n &= P_{(-\infty,x]} f_n + N_{(-\infty,x]} f_n, && \text{(B.1)} \\ f_n(x) &= P_{(-\infty,x]} f_n - N_{(-\infty,x]} f_n + f_n(-\infty) && \text{(B.2)} \end{aligned}$$

となる。$\mathrm{TV}_R\, f_n \le A_1$ の仮定より、

$$0 \le P_{(-\infty,x]} f_n \le A_1, \quad 0 \le N_{(-\infty,x]} f_n \le A_1 \tag{B.3}$$

なので、まず一様有界な単調増加関数列 $\{g_n(x)\}_n$ に対して収束性を示し、それを $P_{(-\infty,x]} f_n$, $N_{(-\infty,x]} f_n$ に適用することで $f_n(x)$ に対して示す、という方針で証明する。

まず、$g_n(x)$ は

$$B_1 \le g_n(x) \le B_2 \quad (x \in R)$$

を満たし、かつ単調増加であるとする。今、有理数全体を $\{x_k\}_k$ とすると $\{g_n(x_k)\}_n$ は有界列だからその部分列を取ってある実数に収束させることができる。よって、対角線論法を使うことで、すべての x_k に対し収束するような $\{g_n(x)\}_n$ の部分列 $\{g_{n_j}(x)\}_j$ を取ることができる:

$$\lim_{j\to\infty} g_{n_j}(x_k) = \alpha_k$$

今、$h(x)$ を

$$h(x) = \begin{cases} \alpha_k & (x = x_k), \\ \sup_{x_k < x} \alpha_k & (x \notin \{x_k\}_k) \end{cases}$$

と定めると、g_n の単調性より $x_i < x_k$ ならば $\alpha_i \le \alpha_k$ なので、$h(x)$ は単調増加であり、かつ

$$B_1 \le h(x) \le B_2 \quad (x \in R)$$

を満たす。よって、命題 A.4 より $h(x)$ の不連続点の集合 P は高々可算な集合である。

今、$x \in R \setminus P$ とすると、$x \in \{x_k\}_k$ ならば $g_{n_j}(x) \to h(x)$ であるが、$x \notin \{x_k\}_k$ の場合も $g_{n_j}(x) \to h(x)$ となることを示そう。$x_i < x < x_k$ に対し、

$$g_{n_j}(x_i) \leq g_{n_j}(x) \leq g_{n_j}(x_k)$$

であるから、$j \to \infty$ とすれば

$$h(x_i) \leq \liminf_j g_{n_j}(x) \leq \limsup_j g_{n_j}(x) \leq h(x_k)$$

となるが、$\{x_k\}$ は稠密なので x_i, x_k を x に収束するように取ると、h は x で連続だから $h(x_i)$, $h(x_k)$ は $h(x)$ に収束し、

$$h(x) = \liminf_j g_{n_j}(x) = \limsup_j g_{n_j}(x)$$

となり、よって確かに $g_{n_j}(x) \to h(x)$ となる。

つまり、$x \in R \setminus P$ ならば $g_{n_j}(x) \to h(x)$ となるが、P は高々可算集合で g_{n_j} は一様有界なので、$\{g_{n_j}\}_j$ の部分列 $\{g_{n'_k}\}_k$ を取ることで P 上でも $g_{n'_k}$ を収束させることができる。よってその極限を $g(x) = \lim_{k\to\infty} g_{n'_k}(x)$ とすれば、すべての x に対して $g_{n'_k}(x)$ は $g(x)$ に収束することになる。これで g_n に対する収束性が示された。

この議論と (B.3) により、自然数列のある部分列 $\{n_j\}_j$ を取って、関数列 $\{P_{(-\infty,x]}f_{n_j}\}_j$, $\{N_{(-\infty,x]}f_{n_j}\}_j$ と数列 $\{f_{n_j}(-\infty)\}_j$ をすべての x に対し各点収束させることができる。その極限を、

$$\lim_{j\to\infty} P_{(-\infty,x]}f_{n_j} = g_1(x), \quad \lim_{j\to\infty} N_{(-\infty,x]}f_{n_j} = g_2(x), \quad \lim_{j\to\infty} f_{n_j}(-\infty) = \beta$$

とすると、(B.2) より、

$$\lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x) = g_1(x) - g_2(x) + \beta$$

となる。よってこの右辺を $f(x) = g_1(x) - g_2(x) + \beta$ とすると $\lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x) = f(x)$ であり、定理 6.1 の仮定より

$$-A_2 \leq f_{n_j}(x) \leq A_2$$

なので、

$$-A_2 \leq f(x) \leq A_2$$

が従う。最後に $f(x)$ の全変動であるが、これは (B.3) より

$$0 \leq g_1(x) \leq A_1, \quad 0 \leq g_2(x) \leq A_1$$

であり、かつ $g_1(x)$, $g_2(x)$ は単調なので、

$$\begin{aligned} \mathrm{TV}_R f &= \mathrm{TV}_R(g_1 - g_2 + \beta) = \mathrm{TV}_R(g_1 - g_2) \leq \mathrm{TV}_R g_1 + \mathrm{TV}_R g_2 \\ &\leq 2A_1 \end{aligned}$$

となる。これで定理 6.1 が示されたことになる。

参考文献

[Smoller] J.A.Smoller, "*Shock waves and reaction-diffusion equations*", 2nd ed. Springer, 1994.

[Serre] D.Serre, "*Systems of conservation laws 1*", Cambridge, 1999.

[Dafermos] C.M.Dafermos, "*Hyperbolic conservation laws in continuum physics*", Springer, 2000.

[Bressan] A.Bressan, "*Hyperbolic systems of conservation laws*", Oxford, 2000.

[Zheng] Yuxi Zheng, "*Systems of conservation laws. Two-dimensional Riemann problems*", Birkhäuser, 2000.

[LeFloch] P.G.LeFloch, "*Hyperbolic systems of conservation laws*", Birkhäuser, 2002.

[Perthame] B.Perthame, "*Kinetic formulation of conservation laws*", Oxford, 2002.

[Holden-Risebro] H.Holden and N.H.Risebro, "*Front tracking for hyperbolic conservation laws*" Springer, 2002.

[Lu] Yunguang Lu, "*Hyperbolic conservation laws and the compensated compactness method*", Chapman & Hall/CRC, 2003.

[Ziemer] W.P.Ziemer, "*Weakly differentiable functions*", Springer, 1989.

[Lax] P.D.Lax, Hyperbolic systems of conservation laws II, Comm.Pure Appl.Math. **10**, p537-566, 1957.

[Glimm] J.Glimm, Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, Comm.Pure Appl.Math. **18**, p697-715, 1965.

[Oleinik] O.A.Oleinik, Discontinuous solutions of non-linear differential equations, Uspekhi Mat.Nauk **12**, p3-73, 1957.

[Young] R.Young, Sup-norm stability for Glimm's scheme, Comm.Pure Appl.Math. **46**, p903-948, 1993.

[Yong] Wen-An Yong, A simple approach to Glimm's interaction estimates, Appl.Math.Lett. **12**, p29-34, 1999.

[西田-川島] 西田孝明、川島秀一、「気体の運動方程式」(山口昌哉編、「非線型の現象と解析」、日本評論社)、p135-160, 1996.

[浅倉] 浅倉史興、「双曲型保存則系の初期値問題— 基本結果と近年の話題—」、「数学」 第 52 巻 3 号 (日本数学会) p257-278, 2000.

[竹野] 竹野茂治、「リーマン問題入門」、2007.
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/conser.html

[西尾] 西尾真喜子、「確率論」、実教出版、1978.