2010 年 01 月 06 日

1 次元理想気体に対する補償コンパクト法

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

1 次元の変数 t, x をそれぞれ時刻、位置とし、$\rho = \rho(t,x) \geq 0$, $u = u(t,x)$ をそれぞれ (t,x) における気体の密度、速度、$P = P(t,x) \geq 0$ を気体の圧力とするとき、外力のない理想気体の 1 次元の運動方程式は以下のように書ける。

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P)_x = 0 \end{cases} \qquad (t > 0,\ x \in R) \tag{1}$$

1 本目は質量保存則を、2 本目は運動量保存則を表わしていて、バロトロピック気体、すなわち P が $P = P(\rho)$ のように ρ のみで決まる関数の場合はこの 2 本で閉じた方程式となる。

この方程式の初期値問題は、$\rho = 0$、すなわち真空状態が起こりうるかそうでないかで状況が異なり、$\rho > 0$ である状況下、すなわち初期密度が正で、初期値の総変動が十分小さい場合には Glimm の差分法により大域解 (弱解) が存在することが証明されているが、$P = A\rho$ (等温変化) の場合には初期値が大きくても真空状態が起こらないことが示されていて、やはり Glimm の差分法により大域解が存在することが証明されている。

しかし、$P = A\rho^\gamma$ ($\gamma > 1$, $A > 0$: 定数) のような断熱変化 (等エントロピー流) の方程式に対しては、大きな初期値だと初期密度が正でも途中で真空が発生し、大域解の存在を示すのが困難であったが、補償コンパクト法 (補完測度法; compensated compactness method) により、

$$P = A\rho^\gamma, \quad \gamma = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \ldots \tag{2}$$

の場合に DiPerna ([5]) が大域的な弱解の存在を証明した。この方法は、大きな初期値に対しても用いることができる、という点で Glimm の差分法より優れていた。ただし、Glimm の差分法は波の相互作用を詳しく調べることで大域的な変動の評価を行う

ため、弱解の漸近性や正則性などの性質を調べるのにも用いることができるが、補償コンパクト法ではそのような評価は用いず、近似解も弱解の漸近性や特異性などとはあまり関係のないものを使うので、この方法によって得られる弱解の性質については、有界性以外はほとんど何も得られない (わかってはいない)。

Ding,Chen,Luo ([4]) らは、分数回の微分を用いることで DiPerna の結果を $1 < \gamma \leq 5/3$ なるすべての γ に拡張し、Lions,Perthame,Tadomor ([8]) らは彼らとはやや異なる方法を用いることでその結果を $\gamma \geq 3$ の場合に、Lions,Perthame,Souganidis ([6]) は $1 < \gamma < 3$ の場合に拡張した。これらによりすべての断熱変化の場合 $\gamma > 1$ について、大きな初期値に対する大域解の存在が証明されたこととなった。さらにこれらの結果は、Chen,LeFloch ([2]), Makino ([9]) らにより、主要部が $A\rho^\gamma$ であるようなより一般の P に対してまで拡張されてきている。これらはいずれも補償コンパクト法による結果である。

単独保存則方程式に補償コンパクト法を用いる場合 ([13] 参照) に比べ、連立の保存則方程式 (1) に対する (一般化) エントロピーの自由度は低く、そのエントロピー群に対して成り立つ Tartar 関係式による Young 測度への制約は弱くなるため、そこから Young 測度を δ 関数であると決定すること (Tartar 方程式) は、単独方程式の場合よりもはるかに難しくなる。そこが補償コンパクト法による単独方程式と連立方程式の解法の大きな違いである。

その Tartar 方程式の解法は、[4],[5] と [6],[8] では大きく異なっている。いずれも Tartar 方程式の両辺の「特異性のアンバランス」を用いて Young 測度を決定するのであるが、前者の方法はそれに必要となる特別なエントロピー群を Darboux の公式から生成して (本稿では仮に 外エントロピー と呼ぶ) それらに対する評価を行うという方法を取っている。一方後者の方法は、Tartar 方程式を Darboux の公式を与える基本解 (Riemann 関数、本稿では仮に 内エントロピー と呼ぶ) に対する関係式に書き直し、エントロピーの自由度を Riemann 関数のパラメータに置き換えて考えることでその特異性の主要部をより直接的に導きだす、という手法を用いている。ただし内エントロピーは特異性を持つため考察がやや難しい。なお、[2] は内エントロピーを、[9] は外エントロピーを用いる方法をそれぞれ取っているようである。

本稿は、(2) のような簡単な P に対する補償コンパクト法の解説、特に Tartar 方程式の解法部分の解説を行うのが主な目的であるが、今回改めて従来の方法を見直したところ、このような P に対しては一部は外エントロピーを用いる DiPerna らの方法 (を少し改良したもの) の方がわかりやすく、一部は内エントピーを用いる Lions らの方法の方がわかりやすいことがわかった。本稿ではそのような方法で (2) のうち特に $\gamma = 5/3$ に対する P を中心に説明を行う。

2 基本事項

本節では、連立の保存則方程式 (1) に関する基本的な事項を紹介する。なお、この式の導出については、[12], [14] などを参照のこと。

まず、$P = A\rho^\gamma$ の係数 A は、ρ の単位を取り替えることで別なものに変更できることに注意する。今 $\rho = \alpha\bar{\rho}(t,x)$ $(\alpha > 0$: 定数$)$ とすると、(1) の 1 本目の式は、

$$\bar{\rho}_t + (\bar{\rho}u)_x = 0$$

2 本目の式は、

$$(\bar{\rho}u)_t + (\bar{\rho}u^2 + \alpha^{\gamma-1}A\bar{\rho}^\gamma)_x = 0$$

となるので、例えば

$$\alpha = (A\gamma)^{-1/(\gamma-1)}$$

とすれば $P = A\rho^\gamma$ の A を $1/\gamma$ と見た方程式と同じになる。よって本稿では以後、$A = 1/\gamma$ として考えることにする。

気体の運動量 $m = \rho u$ を使って書けば、(1) は以下のようになる。

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad U = \begin{bmatrix} \rho \\ m \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} m \\ m^2/\rho + P(\rho) \end{bmatrix} \tag{3}$$

この方程式 (3) に初期値

$$U(0,x) = U_0(x) = \begin{bmatrix} \rho_0(x) \\ \rho_0(x)u_0(x) \end{bmatrix} \quad (x \in R) \tag{4}$$

を与えた初期値問題の解は一般には不連続性を持つので、弱解を考える必要がある。

$U = U(t,x)$ $(t > 0, x \in R)$ が (3), (4) の弱解 であるとは、任意のテスト関数 $\phi(t,x) \in C_0^1([0,\infty[\times R)$ に対して

$$\iint_{t>0} \{U(t,x)\phi_t(t,x) + F(U(t,x))\phi_x(t,x)\}dtdx + \int_R U(0,x)\phi(0,x)dx = 0 \tag{5}$$

を満たすことである。

実際にはこの弱解の存在は直接示されるわけではなく、なんらかの大域的な近似解 (人工粘性法、差分近似法、動力学的近似など) を作ってその評価を行い、それ (の適当な部分列) が収束極限を持ち、その極限が弱解となることを示す、という方法を取るのが普通である。近似解については、4 節で簡単に説明する。

方程式 (3) を準線形の連立方程式形に書いて

$$U_t + B(U)U_x = 0, \quad B(U) = \nabla_U F(U) \quad (\nabla_U = (\partial/\partial\rho, \partial/\partial m))$$

とすると、

$$\begin{aligned} B(U) &= \nabla_U \begin{bmatrix} m \\ m^2/\rho + P(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -m^2/\rho^2 + P'(\rho) & 2m/\rho \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + \rho^{\gamma-1} & 2u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり、この行列の固有値は

$$\lambda_1 = u - \rho^\theta, \quad \lambda_2 = u + \rho^\theta \quad (\theta = (\gamma - 1)/2)$$

となる。例えば $\gamma = 5/3$ のときは $\theta = 1/3$ である。

また、**Riemann** 不変量 w, z を次のように定義する。

$$w = u + \int \frac{\sqrt{P'}}{\rho}\, d\rho = u + \frac{\rho^\theta}{\theta}, \quad z = u - \int \frac{\sqrt{P'}}{\rho}\, d\rho = u - \frac{\rho^\theta}{\theta}$$

これにより、解は (ρ, u), (ρ, m), (w, z) の 3 通りの関数として考えることができることになるが、特に相平面で考える際はこの (w, z) の座標系で考えることが重要となる。

なお、(ρ, u), (ρ, m), (w, z) のそれぞれで方程式 (1) を準線形の形に書いてみると以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} u & \rho \\ \rho^{\gamma-2} & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix}_x = 0, \tag{6}$$

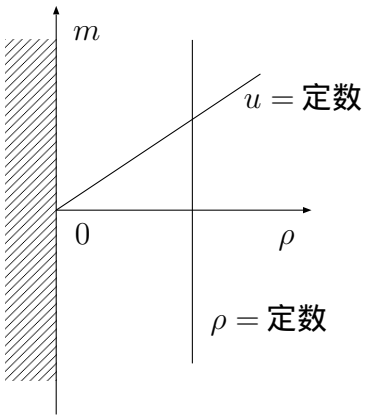

図 1: (ρ, m) 平面

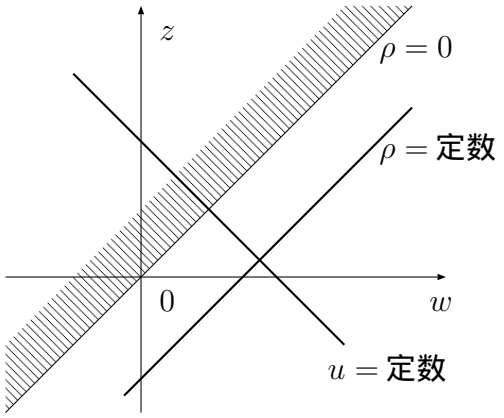

図 2: (w, z) 平面

$$\begin{bmatrix} \rho \\ m \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ m \end{bmatrix}_x = 0, \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}_x = 0 \tag{8}$$

(8) より、Riemann 不変量 (w, z) は方程式 (1) を対角化するものであることがわかるが、(1) から (6), (7), (8) への変形の計算は、$U(t, x)$ が滑らかであるときにしか成り立たず、特に不連続性を持つ弱解に対しては成立しないことに注意する。

λ_1, λ_2 も w, z を用いて次のように表せる。

$$\lambda_1 = \frac{1-\theta}{2}\, w + \frac{1+\theta}{2}\, z, \quad \lambda_2 = \frac{1+\theta}{2}\, w + \frac{1-\theta}{2}\, z$$

特に $\gamma = 5/3$ のときは、

$$\lambda_1 = \frac{w+2z}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{2w+z}{3}$$

となる。

3 エントロピー

保存則方程式の弱解は一意ではないため、通常その解がエントロピー条件と呼ばれる物理的な条件を満たすことが要請される。そこに現れる「エントロピー」とは、いわゆ

る物理的なエントロピーを拡張した「一般化エントロピー」と呼ばれるもの (数学的な実体) であり、この一般化エントロピーは、一意解の選別の目安となるだけではなく、補償コンパクト法で中心的な役割を持つ。

一般の 1 次元の保存則方程式

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad \left(U = U(t,x) = \begin{bmatrix} u_1(t,x) \\ u_2(t,x) \\ \cdots \\ u_N(t,x) \end{bmatrix},\ F(U) = \begin{bmatrix} f_1(U) \\ f_2(U) \\ \cdots \\ f_N(U) \end{bmatrix} \right) \tag{9}$$

に対して、U のスカラー値関数の組 $(\eta(U), q(U))$ が (一般化) エントロピー対 であるとは、U に関する連立線形微分方程式

$$\nabla_U q(U) = \nabla_U \eta(U) \nabla_U F(U) \quad \left(\nabla_U = \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_N} \right) \right) \tag{10}$$

を満たすことを言う。$\eta(U)$ を エントロピー、$q(U)$ を エントロピー流束 と呼ぶ。

$U = U(t,x)$ が (9) の滑らかな解であれば、(10) より

$$\eta(U(t,x))_t + q(U(t,x))_x = 0 \tag{11}$$

という追加保存則が成り立つことになる。

保存則方程式の弱解 $U = U(t,x)$ $(t > 0,\ x \in R)$ が満たすべき エントロピー条件 とは、任意の、凸なエントロピーを持つエントロピー対 $(\eta(U), q(U))$ に対して、超関数の意味で

$$\eta(U(t,x))_t + q(U(t,x))_x \leq 0 \quad (t > 0,\ x \in R) \tag{12}$$

を満たすこと、すなわち任意の非負な $\phi(t,x) \in C_0^1(]0,\infty[\times R)$ に対し、

$$\iint_{t>0} \{\eta(U(t,x))\phi_t(t,x) + q(U(t,x))\phi_x(t,x)\}\, dtdx \geq 0$$

を満たすことである。このエントロピー条件を満たす弱解を エントロピー解 と呼ぶことがある。

実際には、物理的なエントロピーは凸ではなく逆に凹な関数で総エントロピーは増大する (熱力学の第二法則) ので、(12) とは符号が逆になる。つまり一般化エントロピーは物理的なエントロピー S を $-S$ として含んでいることに注意する。

なお、1 節で紹介した Glimm の差分法や補償コンパクト法による弱解はいずれもエントロピー解であるが、(3), (4) のエントロピー解が一意的であることは、Glimm の差分法のように変動の十分小さい解については保証されているが、補償コンパクト法による大きな初期値に対するエントロピー解についてはまだその一意性は証明されていない。

保存則方程式 (9) が $N \geq 3$ の場合、方程式 (10) は 2 つの未知関数 $\eta(U), q(U)$ に対する N 本の連立方程式、すなわち過剰決定系なのでエントロピー対の存在は一般には保証されない。逆に $N = 1$ のとき、すなわち単独保存則方程式の場合は方程式 (10) は 1 本なので、任意の関数 $\eta(U)$ に対して (10) を満たす $q(U)$ が取れる。よって単独の方程式の場合には、ここから得られる豊富なエントロピー群を用いて Tartar 方程式を容易に解くことができる ([13] 参照)。

本稿で考察する $N = 2$ の場合は、(10) は 2 未知関数に対する 2 本の連立方程式なので、エントロピーは存在するが初期条件の自由度程度にしか存在せず、さらに $\rho = 0$ も含むような解を考察する場合は、その初期条件も一つは固定されてしまいさらにエントロピーの自由度は減る。本節では、そこで中心的な役割を果たすエントロピー対を与える公式や、具体的なエントロピー対を紹介する。

(10) は、$\gamma = 5/3$ の方程式 (1) に対しては、2 節により

$$q_\rho = \left\{ \rho^{2/3} - \left(\frac{m}{\rho} \right)^2 \right\} \eta_m, \quad q_m = \eta_\rho + 2 \frac{m}{\rho} \eta_m$$

となるが、(ρ, m) の代わりに (ρ, u) で考えれば (6) より、

$$q_\rho = u\eta_\rho + \rho^{-1/3}\eta_u, \quad q_u = \rho\eta_\rho + u\eta_u$$

Riemann 不変量 $(w, z)(= (u + 3\rho^{1/3}, u - 3\rho^{1/3}))$ で考えれば (8) より、

$$q_w = \lambda_2 \eta_w, \quad q_z = \lambda_1 \eta_z \tag{13}$$

となる。(13) から q を消去すると、いわゆる Euler-Darboux-Poisson の方程式

$$\eta_{wz} + \frac{1}{w - z}(\eta_w - \eta_z) = 0 \quad (w > z)$$

が得られる。この 2 階線形微分方程式は Riemann 関数を用いて解くことができ、特に $\rho = 0$ 上 0 となる、いわゆる 弱エントロピー

$$\eta(\rho, u)|_{\rho=0} = 0, \quad \eta_\rho(\rho, u)|_{\rho=0} = C_0\phi(u) \quad (C_0 = 36)$$

は、次の Darboux の公式

$$\eta = \int_z^w (w - s)(s - z)\phi(s)ds \tag{14}$$

で与えられる。この (14) のエントロピーに対するエントロピー流束 q は、

$$q = \frac{1}{3}\int_z^w (s + w + z)(w - s)(s - z)\phi(s)ds \tag{15}$$

で与えられる。

$\phi(s)$ を与えることで (14), (15) によりエントロピー対 (外エントロピー) が得られることになる。以下、本稿で重要なエントロピー対をいくつか紹介する。

1. $\phi(s) = 1, s, s^2$

   $\phi(s) = 1$ のとき、(14), (15) より

   $$\eta = \frac{(w - z)^3}{6} = C_0\rho, \quad q = \frac{(w - z)^3}{6}\,\frac{w + z}{2} = C_0\rho u$$

   すなわちこれは密度と密度流束 $(\rho, \rho u)$ の定数倍であり、この場合は (11) は質量保存則そのものとなる。

   $\phi(s) = s$ のときは、

   $$\begin{aligned} \eta &= \frac{(w - z)^3}{6}\,\frac{w + z}{2} = C_0\rho u, \\ q &= \frac{(w - z)^3}{6}\,\frac{4w^2 + 7wz + 4z^2}{15} = C_0\left(\rho u^2 + \frac{3}{5}\,\rho^{5/3}\right) = C_0(\rho u^2 + P) \end{aligned}$$

   すなわちこれは運動量と運動量流束 $(\rho u, \rho u^2 + P)$ の定数倍で、(11) は運動量保存則となる。

$\phi(s) = s^2$ のときは、

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{(w-z)^3}{6}\,\frac{3w^2+4wz+3z^2}{10} = 2C_0\left(\frac{1}{2}\,\rho u^2 + \frac{9}{10}\,\rho^{5/3}\right),\\ q &= \frac{(w-z)^3}{6}\,\frac{w+z}{2}\,\frac{w^2+wz+z^2}{3} = 2C_0\left(\frac{1}{2}\,\rho u^3 + \frac{3}{2}\,\rho^{5/3}u\right)\end{aligned}$$

より、これは力学的エネルギーとエネルギー流束の対

$$\begin{aligned}(\eta_*, q_*) &= \left(\frac{1}{2}\,\rho u^2 + \rho e, \left(\frac{1}{2}\,\rho u^2 + \rho e + P\right)u\right)\\ &\quad \left(e = \frac{1}{\gamma-1}\,\frac{P}{\rho} = \frac{9}{10}\,\rho^{2/3}\right)\end{aligned}$$

の定数倍になっていて、この場合 (11) はエネルギー保存則となる。

2. $\phi = \phi_n \to \delta(s-a)$

$\phi_0(y) \in C_0^\infty(]0,1[)$ を $\int_0^1 \phi_0(y)dy = 1$ なるものとし、定数 a に対し

$$\phi(s) = \phi_n(s) = n\phi_0(n(s-a)) \tag{16}$$

とする。このとき $\operatorname{supp}\phi_n(s) \subset [a, a+1/n]$ なので、$w \le a$, または $z > a$ ならば、十分大きい n に対し

$$\eta = \int_z^w (w-s)(s-z)\phi_n(s)ds = 0$$

となる。一方、$z \le a < w$ ならば十分大きい n に対し $z \le a < a+1/n \le w$ となるので、

$$\begin{aligned}\eta &= \int_a^{a+1/n} (w-s)(s-z)\phi_n(s)ds\\ &= \int_0^1 \left(w-a-\frac{y}{n}\right)\left(a+\frac{y}{n}-z\right)\phi_0(y)dy\\ &\to (w-a)(a-z)\int_0^1 \phi_0(y)dy = (w-a)(a-z)\end{aligned}$$

となる。よってこの極限は、$X(a)$ を

$$X(a) = X(w,z;a) = \begin{cases} 1 & (z \le a < w),\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

とすると

$$\eta = \eta^{(0)}(a) = \eta^{(0)}(w, z; a) = (w - a)(a - z)X(a)$$

と書ける。これらは丁度 Darboux の公式 (14) の Riemann 関数を、積分変数 s をパラメータ a に替えて取り出したものになっている (内エントロピー)。

同様にこの $\phi_n(s)$ に対する q の極限は

$$\begin{aligned} q &= q^{(0)}(a) = q^{(0)}(w, z; a) = \frac{1}{3}(a + w + z)(w - a)(a - z)X(a) \\ &= \frac{a + w + z}{3}\,\eta^{(0)}(a) \end{aligned}$$

となる。このエントロピー対は $z = a$、$w = a$ で滑らかさが失なわれるが、ほとんど至るところ (13) を満たす。

なお、後で q の代わりに

$$\sigma(U) = q(U) - \lambda_2(U)\eta(U) = q(U) - \frac{2w + z}{3}\,\eta(U)$$

を用いることも多いが、この $(\eta^{(0)}(a), q^{(0)}(a))$ に対しては、

$$\sigma = \sigma^{(0)}(a) = \sigma^{(0)}(w, z; a) = q^{(0)}(a) - \lambda_2\eta^{(0)}(a) = -\frac{w - a}{3}\,\eta^{(0)}(a) \tag{17}$$

となる。

同様に、$\phi(s) = -\phi_n'(s)$ としたものの極限を考えると、部分積分により

$$\eta = \int_z^w (w - s)(s - z)(-\phi_n'(s))ds = \int_z^w (w + z - 2s)\phi_n(s)ds \tag{18}$$

となるので、その極限は

$$\eta = \eta^{(1)}(a) = \eta^{(1)}(w, z; a) = (w + z - 2a)X(a)$$

となる。同様に q は

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{3}\int_z^w (s + w + z)(w - s)(s - z)(-\phi_n'(s))ds \\ &= \frac{1}{3}\int_z^w \{(w - s)(s - z) + (s + w + z)(w + z - 2s)\}\phi_n(s)ds \end{aligned}$$

となり、よって $\eta^{(1)}$ に対応する $q = q^{(1)}$ は、

$$q = q^{(1)}(a) = q^{(1)}(w, z; a) = \frac{1}{3}\eta^{(0)}(a) + \frac{a + w + z}{3}\eta^{(1)}(a)$$

と書ける。σ で書くと

$$\sigma = \sigma^{(1)}(a) = \sigma^{(1)}(w, z; a) = \frac{1}{3}\eta^{(0)}(a) - \frac{w - a}{3}\eta^{(1)}(a)$$

となる。なお、$\eta^{(1)}(a)$, $q^{(1)}(a)$ は、$\eta^{(0)}(a)$, $q^{(0)}(a)$ を a で微分したようなものになっていることに注意する。

3. $(\eta_n(a), q_n(a))$, $(\hat{\eta}_n(a), \hat{q}_n(a))$

Tartar 方程式を解くのに重要なエントロピー対を紹介する。それは、ある

$$\psi_0(y), \hat{\psi}_0(y) \in C_0^\infty(]0, 1[)$$

に対し、

$$\psi_n(s) = n\psi_0(n(s - a)),\ \hat{\psi}_n(s) = n\hat{\psi}_0(n(s - a))$$

とおき、ϕ としてこれらの 2 階微分 $\phi(s) = \psi_n''(s), \hat{\psi}_n''(s)$ を取ったものに対するエントロピー対であり、それらを

$$(\eta_n, q_n) = (\eta_n(a), q_n(a)) = (\eta_n(w, z; a), q_n(w, z; a)), \tag{19}$$
$$(\hat{\eta}_n, \hat{q}_n) = (\hat{\eta}_n(a), \hat{q}_n(a)) = (\hat{\eta}_n(w, z; a), \hat{q}_n(w, z; a)) \tag{20}$$

のように書くこととする。部分積分により、

$$\begin{aligned}\eta_n &= \int_z^w (w - s)(s - z)\psi_n''(s)ds = -\int_z^w (w + z - 2s)\psi_n'(s)ds \\ &= -\left[(w + z - 2s)\psi_n(s)\right]_z^w - \int_z^w 2\psi_n(s)ds\end{aligned}$$

となるので、η_n は

$$\eta_n = (w - z)(\psi_n(w) + \psi_n(z)) - 2\int_z^w \psi_n(s)ds \tag{21}$$

と表される。同様に q_n は、

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{1}{3}\int_z^w (s+w+z)(w-s)(s-z)\psi_n''(s)ds \\ &= -\frac{1}{3}\int_z^w \{(w-s)(s-z)+(s+w+z)(w+z-2s)\}\psi_n'(s)ds \\ &= -\frac{1}{3}\left[(s+w+z)(w+z-2s)\psi_n(s)\right]_z^w \\ &\quad +\frac{1}{3}\int_z^w \{(w+z-2s)+(w+z-2s)-2(s+w+z)\}\psi_n(s)ds \end{aligned}$$

より、

$$q_n = (w-z)(\lambda_2\psi_n(w)+\lambda_1\psi_n(z)) - 2\int_z^w s\psi_n(s)ds \tag{22}$$

となる。$\sigma_n = \sigma_n(a) = \sigma_n(w,z;a)$ は、

$$\sigma_n = q_n - \lambda_2\eta_n = (w-z)(\lambda_1-\lambda_2)\psi_n(z) - 2\int_z^w (s-\lambda_2)\psi_n(s)ds$$

より、

$$\sigma_n = -\frac{(w-z)^2}{3}\psi_n(z) - 2\int_z^w (s-\lambda_2)\psi_n(s)ds \tag{23}$$

となる。もちろん、(21), (22), (23) の ψ_n を $\hat{\psi}_n$ に変えたものがそれぞれ $\hat{\eta}_n$, $\hat{q}_n$, $\hat{\sigma}_n$ となる。

4 近似解

本節では、補償コンパクト法で用いられる近似解について簡単に説明する。補償コンパクト法で収束が証明されている近似解には、

- Lax-Friedrichs 型、または Godunov 型の差分近似解
- 人工粘性法による近似解
- 動力学的近似による近似解

などがあるが、いずれも次のような性質を持つことが必要である。以下、その近似解を $U = U^\varepsilon(t,x)$ とし、$\varepsilon \to +0$ の極限が (3) の弱解となると期待されるものとする。

1. 一様有界性

$$0 \le \rho^\varepsilon(t,x) \le M_1, \quad |u^\varepsilon(t,x)| \le M_2 \quad (m^\varepsilon(t,x) = \rho^\varepsilon(t,x)u^\varepsilon(t,x))$$

2. 弱解への近似性
   任意の $\phi(t,x) \in C_0^1([0,\infty[\times R)$ に対して、$\varepsilon \to +0$ のとき

$$\iint_{t>0} \{U^\varepsilon(t,x)\phi_t(t,x) + F(U^\varepsilon(t,x))\phi_x(t,x)\}dtdx \to -\int_R U_0(x)\phi(0,x)dx$$

3. コンパクト性
   Darboux の公式 (14), (15) で与えられる任意の弱エントロピー対 (η, q)、および $]0,\infty[\times R$ 内の任意の有界な開集合 Ω に対して

$$\{\eta(U^\varepsilon(t,x))_t + q(U^\varepsilon(t,x))_x\}_{\varepsilon>0}$$

   が、$H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ のあるコンパクト集合に含まれること

4. エントロピー条件
   任意の非負の $\phi(t,x) \in C_0^1(]0,\infty[\times R)$、および凸な弱エントロピーを持つ任意のエントロピー対 (η, q) に対して

$$\limsup_{\varepsilon\to+0} \iint_{t>0} \{\eta(U^\varepsilon(t,x))\phi_t(t,x) + q(U^\varepsilon(t,x))\phi_x(t,x)\}dtdx \ge 0$$

この 1. から U^ε, $F(U^\varepsilon)$ は ε に関して一様に有界なので、ある部分列 $\varepsilon_n \to +0$ $(n \to \infty)$ がとれて

$$\begin{aligned} U^{\varepsilon_n}(t,x) &\to U_1(t,x) \quad L^\infty(]0,\infty[\times R) \text{ weak}*, \\ F(U^{\varepsilon_n}(t,x)) &\to F_1(t,x) \quad L^\infty(]0,\infty[\times R) \text{ weak}* \end{aligned}$$

という極限 U_1, F_1 が存在することがわかるが、

$$F_1(t,x) = F(U_1(t,x)) \quad \text{a.e.}$$

であるかどうかは自明ではなく、補償コンパクト法はこれを示すのに用いられる。1., 3. は補償コンパクト法で必要となる性質で、2., 4. はその極限 $U_1(t,x)$ がエントロピー解であることを示すのに用いられる。2., 4. は近似解である以上当然満たさなければならないが、1., 3. は必ずしも近似解であることとは関係ない。実際、弱解の別の存在証明で使われる Glimm の差分は (多分) 3. を満たさない。

それは、Lax-Friedrichs の差分や人工粘性法による近似解は 1., 3. のように一様に「おとなしい」、つまり単調性が保証され、微分もそれほどあばれないような近似解であるのに対し、Glimm の差分は元々弱解が持つ特異性を損わないように作られたものだからである。逆に Lax-Friedrichs の差分や人工粘性近似解は弱解の特異性をなまらせる性質があり、弱解の特異性を調べたいような場合は、理論上も応用上 (数値計算等) もあまり適さない。

本節では、人工粘性近似解について上の性質を簡単に説明するが、むしろ初期値に対する制限を緩くできる Lax-Friedrichs や Godunov の差分近似解については、[4],[15] を参照のこと。

人工粘性近似解は、以下の方程式の解 $U = U^{\varepsilon}(t, x)$ である。

$$\begin{cases} \rho_t + m_x = \varepsilon \rho_{xx} \\ m_t + \left(\dfrac{m^2}{\rho} + \dfrac{3}{5} \rho^{5/3} \right)_x = \varepsilon m_{xx} \end{cases} \tag{24}$$

$$(\rho(0, x), m(0, x)) = (\rho_0^{\varepsilon}(x), m_0^{\varepsilon}(x)) \tag{25}$$

ここで $\rho_0^{\varepsilon}(x)$, $m_0^{\varepsilon}(x)$ は、初期値 $\rho_0(x)$, $m_0(x)$ を滑らかに近似したものであり、$\varepsilon \to +0$ のときに $\rho_0(x)$, $m_0(x)$ に (弱) 収束するようなものである。

初期値 $U_0(x) = {}^T(\rho_0(x), m_0(x))$ は、次のような有界性と x に関する遠方での減衰性を持つとする。

$$0 < \rho_0(x) \leq M_1, \quad |u_0(x)| \leq M_2 \quad (m_0(x) = \rho_0(x) u_0(x)) \tag{26}$$

$$\int_R \hat{\eta}_*(U_0(x)) dx \leq M_3 \tag{27}$$

ここで、$\hat{\eta}_*(U)$ は、$\eta_*(U)$ を定ベクトル $\bar{U}$ で (1 階微分まで) 0 になるようにしたようなもので、

$$\hat{\eta}_*(U) = \eta_*(U) - \eta_*(\bar{U}) - \nabla_U \eta_*(\bar{U})(U - \bar{U}) \tag{28}$$

である。これは、

$$\hat{q}_*(U) = q_*(U) - q_*(\bar{U}) - \nabla_U \eta_*(\bar{U})(F(U) - F(\bar{U}))$$

とエントロピー対となる。(28) から、$U = \bar{U}$ では $\hat{\eta}_*(U)$ はほぼ $O(|U - \bar{U}|^2)$ であるから、条件 (27) はほぼ

$$\rho_0(x) - \bar{\rho} \in L^2(R), \quad u_0(x) - \bar{u} \in L^2(R)$$

を意味する。正確には、

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_* &= \frac{1}{2}\rho(u-\bar{u})^2 + \frac{9}{10}\rho^{5/3} - \frac{3}{2}\bar{\rho}^{2/3}\rho + \frac{3}{5}\bar{\rho}^{5/3} \\ &= \frac{1}{2}\rho(u-\bar{u})^2 + \int_{\bar{\rho}}^{\rho} d\alpha \int_{\bar{\rho}}^{\alpha} \beta^{-1/3} d\beta \end{aligned} \tag{29}$$

である。

初期値の近似である $U^\varepsilon(x)$ も、性質 (26), (27) を損わないように作り、ε に一様に

$$0 < \rho_0^\varepsilon(x) \le M_4, \quad |u_0^\varepsilon(x)| \le M_5 \tag{30}$$

$$\int_R \hat{\eta}_*(U_0^\varepsilon(x))dx \le M_6 \tag{31}$$

であるようにする。

方程式 (24) の主要部は $U_t - \varepsilon U_{xx}$ であるから、これは半線形放物型方程式であり、よって初期値が滑らかならば解 $U = U^\varepsilon(t,x)$ も滑らかになることが期待される。ただし、(24) は $\rho = 0$ に特異性を持っているから、$\rho > 0$ である必要がある。半線形放物型方程式の解の存在定理については偏微分方程式の成書 (例えば [10] 等) を参照のこと。また、(24), (25) に対しては、初期密度が $\rho^\varepsilon(x) \ge \delta_1 > 0$ であれば、その解 $\rho^\varepsilon(t,x)$ も $\rho^\varepsilon(t,x) \ge \delta_2(t) > 0$ となるような $\delta_2(t)$ が取れることがアプリオリに示される。それについては、[1],[5] を参照のこと。

ここでは、滑らかで、x の遠方では $\bar{U}$ に十分速く収束するような解 $U^\varepsilon(t,x)$ が存在するとして、必要な性質を示す。まず 1. の有界性を考えよう。今、

$$\Sigma(A,B) = \{(w,z);\ w \le A,\ z \ge B,\ w \ge z\}$$

を 三角領域 と呼ぶことにする。

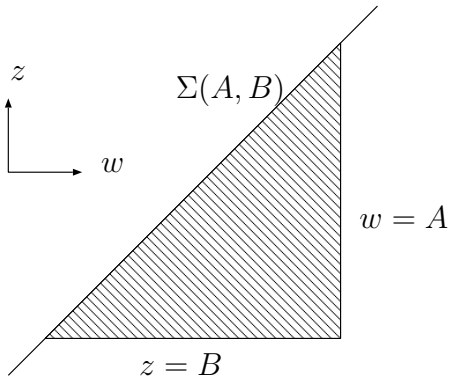

図 3: $\Sigma(A,B)$

三角領域上 ρ, u は有界であり、逆に ρ, u の有界な範囲

$$D = \{(w,z) = (u + 3\rho^{1/3}, u - 3\rho^{1/3});\ 0 \le \rho \le \bar{M}_1,\ |u| \le \bar{M}_2\}$$

は、ある A, B に対し $D \subset \Sigma(A,B)$ のように三角領域に含まれる ($A = \bar{M}_2 + \bar{M}_1^{\theta}/\theta$, $B = -A$)。

1. は次の命題により示される ([3])。

命題 1 (Chueh-Conley-Smoller)

すべての x に対して $U_0^{\varepsilon}(x) \in \Sigma(A,B)$ で、かつ $\bar{U}$ が $\Sigma(A,B)$ の内点となるように A, B を取ると、$U^{\varepsilon}(t,x) \in \Sigma(A,B)$ となる。

証明

方程式 (24) を w, z について書き直すと、以下のようになる。

$$\begin{cases} w_t + \lambda_2 w_x &= \varepsilon w_{xx} + 2\varepsilon\rho^{-1}\rho_x w_x - \varepsilon(1+\theta)\rho^{\theta-2}\rho_x^2, \\ z_t + \lambda_1 z_x &= \varepsilon z_{xx} + 2\varepsilon\rho^{-1}\rho_x z_x + \varepsilon(1+\theta)\rho^{\theta-2}\rho_x^2 \end{cases} \tag{32}$$

$w = w^{\varepsilon}(t,x) \le A$, $z = z^{\varepsilon}(t,x) \ge B$ を示せばよいが、x の遠方での値 $\bar{U}$ は $\Sigma(A,B)$ の内点だから、$w^{\varepsilon}(t,x) \ge A$ となるような w^{ε} の値は有限の x で取るはずだから w^{ε} の x

に関する最大は x に関して極大となっているはずである。今、$x = x_0$ で $w^\varepsilon(t,x)$ が x に関して極大になっているとすると、

$$w_x^\varepsilon(t,x_0) = 0, \quad w_{xx}^\varepsilon(t,x_0) \le 0$$

であるから、(32) より

$$w_t^\varepsilon(t,x_0) \le -\varepsilon(1+\theta)\rho^{\theta-2}\rho_x^2 \le 0$$

となるので、$w_x^\varepsilon(t,x_0) = 0$, $w_t^\varepsilon(t,x_0) \le 0$ より、(t,x_0) から t の増加方向へは、w^ε はどの方向にも増加できない。よって w^ε は A を越えることができないことが言える。

同様にして $z^\varepsilon(t,x) \ge B$ も言える。∎

この命題の A, B は、仮定 (30) より ε とは無関係に取れるから、この命題 1 により近似解の性質 1. が示されたことになる。なお、この命題 1 の性質により、三角領域 $\Sigma(A,B)$ は 不変領域 と呼ばれることもある。

次に、他の性質を導くのに必要な不等式を求める。エントロピー対 $(\eta(U), q(U))$ に $U = U^\varepsilon(t,x)$ を代入したものを

$$\eta^\varepsilon(t,x) = \eta(U^\varepsilon(t,x)), \quad q^\varepsilon(t,x) = q(U^\varepsilon(t,x))$$

のように書くこととすると、これは

$$\eta_t^\varepsilon + q_x^\varepsilon = \varepsilon\eta_{xx} - \varepsilon^T U_x^\varepsilon \nabla_U^2 \eta(U^\varepsilon) U_x^\varepsilon \tag{33}$$

を満たす。ここで、$\nabla_U^2\eta(U)$ は $\eta(U)$ の 2 階微分からなるヘッセ行列を表す。

補題 2

$U \in \Sigma = \Sigma(A,B)$ と Darboux の公式 (14) による η に対し、次が成り立つ。

$$\begin{cases} |\nabla_U \eta(U)| \le c_1(\Sigma,\phi), \\ |{}^T X \nabla_U^2 \eta(U) X| \le c_2(\Sigma,\phi)\, {}^T X \nabla_U^2 \eta_*(U) X, \\ {}^T X \nabla_U^2 \eta_*(U) X \ge c_3(\Sigma)|X|^2, \quad c_3(\Sigma) > 0 \end{cases}$$

ここで、$c_1(\Sigma,\phi)$, $c_2(\Sigma,\phi)$ は Σ, ϕ にのみ依存する定数、$c_3(\Sigma)$ は Σ にのみ依存する定数を表す。

証明は容易であるが省略する。詳しくは [4],[15] を参照のこと (ただし [15] のこの補題の証明には少し誤りもある)。

今、(33) のエントロピー対を $(\hat{\eta}_*, \hat{q}_*)$ としたものを $]0,T[\times R$ で積分すると、$U^\varepsilon(t,x)$ の x の遠方での $\bar{U}$ への漸近が十分速いという仮定の元、次が成り立つ。

$$\int_R \hat{\eta}_*(U^\varepsilon(T,x))dx - \int_R \hat{\eta}_*(U^\varepsilon(0,x))dx = -\varepsilon \int_0^T dt \int_R {}^T U_x^\varepsilon \nabla_U^2 \hat{\eta}_*(U^\varepsilon) U_x^\varepsilon dx$$

(29) より $\hat{\eta}_* \geq 0$ であるから、(31) の仮定、および $\nabla_U^2 \hat{\eta}_* = \nabla_U^2 \eta_*$、補題 2 より次が言える ($\Sigma = \Sigma(A,B)$)。

$$\varepsilon \iint_{t>0} {}^T U_x^\varepsilon \nabla_U^2 \eta_*(U^\varepsilon) U_x^\varepsilon dx \leq \int_R \hat{\eta}_*(U_0^\varepsilon(x))dx \leq c(\Sigma) \tag{34}$$

$$\varepsilon \iint_{t>0} |U_x^\varepsilon|^2 dx \leq c(\Sigma) \tag{35}$$

次は、これらを用いて 3. のコンパクト性を示す。それには、次の命題を用いる。

命題 3

有界な開集合 $\Omega \subset R^2$ と $1 < p < 2 < r$ に対して次が成り立つ。

1. ($C_0(\Omega)^*$ の有界集合) $\subset$ ($W^{-1,p}(\Omega)$ のコンパクト集合)
2. (Murat の補題)
   ($W^{-1,p}(\Omega)$ のコンパクト集合) $\cap$ ($W^{-1,r}(\Omega)$ の有界集合)
   $\subset$ ($H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ のコンパクト集合)

今、$\Omega \subset]0,\infty[\times R$ を有界な開集合とし、(η, q) を (14), (15) で与えられるエントロピー対とする。このとき、$\psi(t,x) \in C_0^1(\Omega)$ に対して、

$$T^\varepsilon(\psi) = \iint_\Omega (\eta_t^\varepsilon + q_x^\varepsilon)\psi dt dx$$

とし、この作用素 T^ε $(= \eta_t^\varepsilon + q_x^\varepsilon)$ の評価を考える。

部分積分と (33) により、これを

$$T^\varepsilon(\psi) = -\varepsilon \iint_\Omega \eta_x^\varepsilon \psi_x dtdx - \varepsilon \iint_\Omega {}^T U_x^\varepsilon \nabla_U^2 \eta(U^\varepsilon) U_x^\varepsilon \psi dtdx = T_1^\varepsilon(\psi) + T_2^\varepsilon(\psi)$$

のように 2 つに分けると、補題 2 より

$$|\eta_x^\varepsilon| = |\nabla_U \eta(U_x^\varepsilon) U_x^\varepsilon| \le c_1(\Sigma, \phi)|U_x^\varepsilon|$$

となるので、T_1^ε は (35)、および Schwarz の不等式、Hölder の不等式により

$$\begin{aligned} |T_1^\varepsilon(\psi)| &\le c(\Sigma,\phi) \left(\iint_\Omega \varepsilon |U_x^\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \left(\iint_\Omega \varepsilon |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} \le c(\Sigma,\phi)\sqrt{\varepsilon} \|\psi_x\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le c(\Sigma,\phi,\Omega)\sqrt{\varepsilon} \|\psi\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \end{aligned}$$

となる。なお、p' は $p' = p/(p-1) > 2$ で、Ω は有界であることに注意する。また、例えば $c(\Sigma, \phi)$ は、Σ, ϕ にのみ依存する有限な定数を表すものとする (以後、断らずにこのように書き表す)。よって、$\sqrt{\varepsilon} \to 0$ より、T_1^ε は $W^{-1,p}(\Omega)$ のあるコンパクト集合に含まれることになる。

一方、T_2^ε は補題 2, (34) より

$$|T_2^\varepsilon(\psi)| \le \varepsilon \iint_\Omega {}^T U_x^\varepsilon \nabla_U^2 \eta_*(U^\varepsilon) U_x^\varepsilon |\psi| dtdx \le c(\Sigma) \|\psi\|_{C(\Omega)}$$

となるから T_2^ε は $C_0(\Omega)^*$ で有界となり、命題 3 の 1. により T_2^ε も $W^{-1,p}(\Omega)$ のあるコンパクト集合に含まれる。よって $T^\varepsilon = T_1^\varepsilon + T_2^\varepsilon$ は $W^{-1,p}(\Omega)$ のあるコンパクト集合に含まれることがわかる。

一方、部分積分により

$$T^\varepsilon(\psi) = -\iint_\Omega (\eta^\varepsilon \psi_t + q^\varepsilon \psi_x) dtdx$$

となるので、U^ε の有界性と $r' = r/(r-1) > 1$ から

$$|T^\varepsilon(\psi)| \le c(\Sigma,\phi)(\|\psi_t\|_{L^1(\Omega)} + \|\psi_x\|_{L^1(\Omega)}) \le c(\Sigma,\phi,\Omega)\|\psi\|_{W_0^{1,r'}(\Omega)}$$

が言える。よって T^ε は $W^{-1,r}(\Omega)$ で有界となる。ゆえに命題 3 の 2. により T^ε が $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ のあるコンパクト集合に含まれることが言えたことになる。

残りの性質 2., 4. は、上の計算と同様にして、補題 2、(35) などから容易に示される。

5 補償コンパクト性理論

本節では、補償コンパクト性理論を紹介し、それを用いてエントロピー対に対する Tartar 関係式を導き出す。

まず、汎弱収束列の非線形関数の極限を「ある測度による積分」ととらえる Young 測度から説明する。

定理 4 (Young 測度)

R^N の開集合 Ω、関数列 $\{v_n(x)\}_n \subset L^\infty(\Omega; R^M)$ に対して R^M の有界集合 K を $v_n(x) \in K$ a.e. $x \in \Omega$ となるものとすると、次を満たすような $\{v_n\}_n$ のある部分列 $\{v_{n_j}\}_j$ と、a.e. $x \in \Omega$ に対して決定する R^M 上の確率測度、すなわち非負で全測度 1 の Borel 測度の族 $\{\nu_x;\ \text{a.e. } x \in \Omega\}$ が存在する。

- $\operatorname{supp} \nu_x \subset \bar{K}$
- R^M 上の任意の連続関数 $G(v)$ に対し、

  $$\langle \nu_x(v), G(v) \rangle = \int_{R^M} G(v) \nu_x(dv)$$

  は a.e. $x \in \Omega$ に対して定義される可測関数で、

  $$G(v_{n_j}(x)) \to \langle \nu_x(v), G(v) \rangle \quad L^\infty(\Omega)\ \text{weak}*$$

この $\{\nu_x\}$ を $\{v_{n_j}\}$ に対する **Young 測度** と呼ぶ。

4 節の性質 1. より $U^\varepsilon(t,x)$ は一様有界、よって $U^\varepsilon(t,x) \in \Sigma(A,B)$ となる $A,\ B$ が取れるから、この定理 4 によりある部分列 $\varepsilon_n \to +0\ (n \to \infty)$ と Young 測度

$\{\nu_{(t,x)}(U)\}_{\text{a.e. }(t,x)}$ が存在して、$\operatorname{supp}\nu_{(t,x)}(U) \subset \Sigma(A,B)$ で、$\rho \geq 0$ 上の任意の連続関数 $H(U)$ に対して

$$H(U^{\varepsilon_n}(t,x)) \to \langle \nu_{(t,x)}(U), H(U) \rangle \quad L^\infty(]0,\infty[\times R) \text{ weak}* \tag{36}$$

となる。

しかし、L^∞ weak$*$ は弱い収束であるから、$v_n(x) \to v(x)$, $w_n(x) \to w(x)$ であっても、そのスカラー積

$$v_n(x) \cdot w_n(x) = v_n^1(x)w_n^1(x) + \cdots + v_n^M(x)w_n^M(x)$$

が $v(x) \cdot w(x)$ に収束するとは限らない。例えば $\phi(x) \in L^1(R)$ に対して、Riemann-Lebesgue の定理により

$$\int_R \phi(x) \cos nx \, dx \to 0 \quad (n \to \infty)$$

および

$$\int_R \phi(x) \cos^2 nx \, dx = \int_R \phi(x) \frac{1+\cos 2nx}{2} \, dx \to \frac{1}{2} \int_R \phi \, dx \quad (n \to \infty)$$

が成り立つが、これは、

$$\cos nx \to 0, \quad \cos^2 nx \to \frac{1}{2} \quad L^\infty(R) \text{ weak}*$$

となることを意味している。

しかし、1 階微分の弱いコンパクト性があれば、積の収束が保証される。

定理 5 (div-curl 補題)

Ω を R^N の有界な開集合で、$v_n, w_n, v, w \in L^\infty(\Omega; R^N)$ が

$$v_n(x) \to v(x), \quad w_n(x) \to w(x) \quad L^\infty(\Omega) \text{ weak}*$$

を満たし、かつ $\{\operatorname{div} v_n\}_n$, および $\{\operatorname{curl} w_n\}_n$ のすべての成分が $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ のあるコンパクト集合に含まれるならば、N 次元内積の収束

$$v_{n_j}(x)\cdot w_{n_j}(x)\to v(x)\cdot w(x)\quad L^\infty(\Omega)\ \text{weak}*$$

が成り立つような部分列 $\{n_j\}_j$ が取れる。

(36) より、Darboux の公式 (14), (15) で得られる弱エントロピー対 (η,q) に対しては

$$\eta(U^{\varepsilon_n}(t,x))\to\langle\nu_{(t,x)},\eta\rangle,\quad q(U^{\varepsilon_n}(t,x))\to\langle\nu_{(t,x)},q\rangle\quad L^\infty(]0,\infty[\times R)\ \text{weak}*$$

が言えるが、$N=2$ では

$$\operatorname{div}_{(t,x)}(\eta,q)=\eta_t+q_x,\quad \operatorname{curl}_{(t,x)}(-\hat q,\hat\eta)=\hat\eta_t+\hat q_x$$

であるから、4 節の性質 3. と定理 5 により、有界集合 $\Omega_j=]0,j[\times]-j,j[$ 上ではある部分列 $\{\varepsilon_{n_k}\}_k$ (j に依存する) に対して

$$\begin{aligned}&(\eta(U^{\varepsilon_{n_k}}),q(U^{\varepsilon_{n_k}}))\cdot(-\hat q(U^{\varepsilon_{n_k}}),\hat\eta(U^{\varepsilon_{n_k}}))=(\hat\eta q-\eta\hat q)(U^{\varepsilon_{n_k}})\\ &\quad\to\quad\langle\nu_{(t,x)},\hat\eta\rangle\langle\nu_{(t,x)},q\rangle-\langle\nu_{(t,x)},\eta\rangle\langle\nu_{(t,x)},\hat q\rangle\quad L^\infty(\Omega_j)\ \text{weak}*\end{aligned}\tag{37}$$

が成り立つ。一方で、再び (36) より、

$$(\hat\eta q-\eta\hat q)(U^{\varepsilon_n})\to\langle\nu_{(t,x)},\hat\eta q-\eta\hat q\rangle\quad L^\infty(]0,\infty[\times R)\ \text{weak}*\tag{38}$$

であるから、(37), (38) より、

$$\langle\nu_{(t,x)},\hat\eta q-\eta\hat q\rangle=\langle\nu_{(t,x)},\hat\eta\rangle\langle\nu_{(t,x)},q\rangle-\langle\nu_{(t,x)},\eta\rangle\langle\nu_{(t,x)},\hat q\rangle\quad\text{a.e. }(t,x)\in\Omega_j$$

が言える。j は任意であるから、結局、$]0,\infty[\times R$ 内の a.e. (t,x)、および Darboux の公式 (14), (15) で得られる任意の弱エントロピー対 (η,q), $(\hat\eta,\hat q)$ に対して **Tartar** の関係式

$$\langle\nu_{(t,x)},\hat\eta q-\eta\hat q\rangle=\langle\nu_{(t,x)},\hat\eta\rangle\langle\nu_{(t,x)},q\rangle-\langle\nu_{(t,x)},\eta\rangle\langle\nu_{(t,x)},\hat q\rangle\tag{39}$$

が成り立つことがわかる。

ところで、この関係式 (39) から $\nu_{(t,x)}(U)$ を決定する段階 (6 節以降) では、(t,x) を固定した上でこの関係式 (39) の (η,q), $(\hat{\eta},\hat{q})$ を色々に取り替えて考察するが、そこには注意が必要である。

(39) は、2 つのエントロピー対 (η,q), $(\hat{\eta},\hat{q})$ に対して a.e. 成立する式であるが、それが成立する (t,x) の集合、すなわち $]0,\infty[\times R$ からある零集合を除いた集合 Q は、上の論法からわかるように (η,q), $(\hat{\eta},\hat{q})$ に依存する。よって、Tartar の関係式を使用するエントロピー対が高々可算個 $\{(\eta_n,q_n)\}_n$ であれば、それらに対しては共通の Q が取れて、

- $(]0,\infty[\times R)\setminus Q$ は零集合
- すべての $(t,x)\in Q$ とすべての $(\eta,q)=(\eta_n,q_n)$, $(\hat{\eta},\hat{q})=(\eta_m,q_m)$ に対して (39) が成り立つ

となることが言えて、各 $(t,x)\in Q$ に対し可算個の (η_n,q_n) を (39) に代入して考察することができるが、可算個より多いエントロピー対に対しては、Tartar 関係式が成り立つ (t,x) を、$]0,\infty[\times R$ の中の「共通の」零集合を除いた集合から取れる保証はないことになる。極端な話、連続濃度のエントロピー対に対しては、(39) が共通に成り立つ (t,x) は一つも存在しないという可能性もある。

しかし、ν は Borel 測度であるから、この可算個のエントロピー対 $(\eta_n(U),q_n(U))$ が一様有界で、各 U に対して各点収束する極限 $(\bar{\eta}(U),\bar{q}(U))$ を持つならば、Lebesgue 有界収束定理により

$$\lim_{n\to\infty}\langle\nu_{(t,x)},\eta_n\rangle=\langle\nu_{(t,x)},\bar{\eta}\rangle,\quad \lim_{n\to\infty}\langle\nu_{(t,x)},q_n\rangle=\langle\nu_{(t,x)},\bar{q}\rangle$$

が成り立つので、同じ Q で Tartar 関係式が成り立つエントロピー群の中に $(\bar{\eta},\bar{q})$ を加えることができる。

例えば 3 節で見たエントロピーで言えば、(16), (18) によるエントロピー、および (19), (20) のエントロピーは、パラメータ a を有理数と取ることにすれば、その全体は可算個であるからそれらに対して共通の Q が取れ、よってその極限として得られる $(\eta^{(0)}(a),q^{(0)}(a))$, $(\eta^{(1)}(a),q^{(1)}(a))$ も同じ Q で Tartar 関係式が成り立つエントロピー群に入れることができる。さらに、有理数 a を動かした極限を考えれば、その a を実数全体に広げたものも同じエントロピー群に入れることができる。

以上をまとめると、次が言えたことになる。

命題 6

ある $]0,\infty[\times R$ の部分集合 Q が存在して、次を満たす。

- $(]0,\infty[\times R)\setminus Q$ は零集合。
- すべての $(t,x)\in Q$ と、エントロピー対の集合

$$\{(\eta^{(0)}(a),q^{(0)}(a)),\ (\eta^{(1)}(a),q^{(1)}(a)),\ (\eta_n(a),q_n(a)),\ (\hat{\eta}_n(a),\hat{q}_n(a));\ a \text{ は実数}\}$$

から取った任意の 2 つの対 (η,q), $(\hat{\eta},\hat{q})$ に対して、Tartar の関係式 (39) が成り立つ。

6 Tartar 方程式の解法の概要

本節以降は、Tartar の関係式 (Tartar 方程式) (39) から、$\nu=\nu_{(t,x)}(U)$ が δ 関数となることを導くことを考えるが、本節ではその概要について説明する。

Tartar 方程式 (39) は、命題 6 の Q 内の各 (t,x) 毎で考えればよく、また各 (t,x) に対する方法に違いはないので今後 (t,x) は省略することとし、ν による積分も、ν を省略して簡単に

$$\langle\nu_{(t,x)}(U),\eta(U)\rangle=\langle\eta\rangle$$

のように書くこととする。

また、U も $(\rho,\rho u)=(\rho,m)$ ではなく、リーマン不変量 (w,z) を中心に考えることとする。つまり、例えば $\langle\eta\rangle$ は

$$\langle\eta\rangle=\langle\nu_{(t,x)}(w,z),\eta(w,z)\rangle$$

を意味することとする。

Tartar 方程式の解法の、おおまかな方針は以下の通りである。

1. $w > z$ の範囲に ν のサポートがあるとき、そのサポートを含む最小の三角領域

   $$\Sigma_1 = \Sigma(w_1, z_1) \subset \Sigma(A, B)$$

   を取れば、その頂点 (w_1, z_1) が ν のサポートに含まれることを示す

2. 同じ条件の元、(w_1, z_1) 以外には Σ_1 の $w > z$ の部分に ν のサポートがないことを示す

3. 1., 2. により、

   $$\nu(U) = \bar{\nu}(U) + \alpha\delta(w - w_1, z - z_1), \quad \operatorname{supp}\bar{\nu} \subset \{w = z\}$$

   が言えるので、そこから $\alpha = 1$ を示すことで $\nu(U) = \delta(w - w_1, z - z_1)$ を示す

DiPerna ([5]) にしても Lions らの方法 ([6],[8]) にしても、おおまかな方針はこの通りであるが、1. に関しては Lions らの方法 ([6]) の方がシンプルであり、2. を示すのは DiPerna の方法 (を少し改良した方法) の方が少し易しいだろうと思う。3. は両者には違いはなく容易である。次節以降でこの 1. から順に見ていくことにする。

7 三角領域の頂点がサポートに含まれること

本節では、(w_1, z_1) が ν のサポートに含まれることなどを示す、Lions らの方法 ([6]) を紹介する。ここで使用するのは、任意の a に対するエントロピー対 $(\eta^{(0)}(a), q^{(0)}(a))$ (内エントロピー) である。

以後、$\operatorname{supp}\nu \cap \{(w, z);\ w > z\} \neq \emptyset$ の場合を考え、

$$\Sigma_1 = \Sigma(w_1, z_1)\ (\subset \Sigma(A, B))$$

を、それを含む最小の三角領域とする $(w_1 > z_1)$。

なお、$\nu = \nu_{(t,x)}$ は (t, x) 毎に異なるので、この Σ_1、すなわち (w_1, z_1) ももちろん (t, x) 毎に異なり、(w_1, z_1) は正確には (t, x) の関数 $(w_1(t, x), z_1(t, x))$ である。

もし ν が δ であるとすれば、Σ_1 の頂点である (w_1, z_1) のみが ν のサポートであることが期待されるが、本節では $\operatorname{supp}\nu \ni (w_1, z_1)$ などを示す。

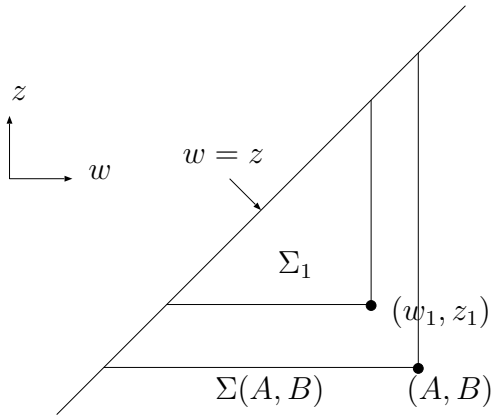

図 4: Σ_1

$q^{(0)}(a) = (a+w+z)\eta^{(0)}(a)/3$ であるから、$(\eta^{(0)}(a), q^{(0)}(a))$, $(\eta^{(0)}(b), q^{(0)}(b))$ に対する Tartar 関係式は、

$$\begin{aligned}
&\langle\eta^{(0)}(a)\rangle\left\langle\frac{1}{3}(b+w+z)\eta^{(0)}(b)\right\rangle - \langle\eta^{(0)}(b)\rangle\left\langle\frac{1}{3}(a+w+z)\eta^{(0)}(a)\right\rangle \\
&\quad = \left\langle\frac{1}{3}(b-a)\eta^{(0)}(a)\eta^{(0)}(b)\right\rangle
\end{aligned}$$

となり、これを変形して、

$$\begin{aligned}
&\langle\eta^{(0)}(a)\rangle\langle(w+z)\eta^{(0)}(b)\rangle - \langle\eta^{(0)}(b)\rangle\langle(w+z)\eta^{(0)}(a)\rangle \\
&\quad = (b-a)\{\langle\eta^{(0)}(a)\eta^{(0)}(b)\rangle - \langle\eta^{(0)}(a)\rangle\langle\eta^{(0)}(b)\rangle\}
\end{aligned} \tag{40}$$

を得る。今、

$$\mathcal{C} = \{a \in R;\ \langle\eta^{(0)}(a)\rangle > 0\}$$

とすると、$a \le z_1$ または $a \ge w_1$ ならば $(w,z) \in \Sigma_1$ に対して

$$\eta^{(0)}(a) = \eta^{(0)}(w,z;a) \equiv 0$$

であるから、もちろん $\langle\eta^{(0)}(a)\rangle = 0$ となるので、少なくとも $\mathcal{C} \subset]z_1, w_1[$ であることが分かる。

$a, b \in \mathcal{C}$ のとき、(40) の両辺を $\langle\eta^{(0)}(a)\rangle\langle\eta^{(0)}(b)\rangle$ で割ると、

$$\frac{\langle(w+z)\eta^{(0)}(b)\rangle}{\langle\eta^{(0)}(b)\rangle} - \frac{\langle(w+z)\eta^{(0)}(a)\rangle}{\langle\eta^{(0)}(a)\rangle} = (b-a)\left\{\frac{\langle\eta^{(0)}(a)\eta^{(0)}(b)\rangle}{\langle\eta^{(0)}(a)\rangle\langle\eta^{(0)}(b)\rangle} - 1\right\} \tag{41}$$

を得る。ここから次が示される。

命題 7

1. $\mathcal{C} \neq \emptyset$
2. $a \in \mathcal{C}$ に対し $\zeta(a) = \langle(w+z)\eta^{(0)}(a)\rangle / \langle\eta^{(0)}(a)\rangle$ とすると、$\zeta(a)$ は a に関して微分可能で、

$$\zeta'(a) = \frac{\langle\eta^{(0)}(a)^2\rangle}{\langle\eta^{(0)}(a)\rangle^2} - 1$$

3. $\mathcal{C}$ の連結成分上 $\zeta(a)$ は非減少

証明

1.
Σ_1 の最小性により、Σ_1 の下辺は $\operatorname{supp}\nu$ と交わっているはずである。

$$\operatorname{supp}\nu \cap \{(w,z);\ z = z_1 < w\} \neq \emptyset$$

そこから 1 点 (w_2, z_1) を取って、$\varepsilon = (w_2 - z_1)/3$ とし、$\mathcal{A}$ をその点を中心とする正方形の ε 近傍とする。

$$\mathcal{A} = \{(w,z);\ w_2 - \varepsilon \leq w \leq w_2 + \varepsilon,\ z_1 - \varepsilon \leq z \leq z_1 + \varepsilon\}$$

このとき $\mathcal{A} \subset \{w > z\}$ であり、かつ $\mathcal{A}$ は (w_2, z_1) を内部に持つから、$\mathcal{A}$ 上正である関数 $\eta^{(0)}(w_2 - 2\varepsilon)$ に対しては

$$\langle\eta^{(0)}(w_2 - 2\varepsilon)\rangle > 0$$

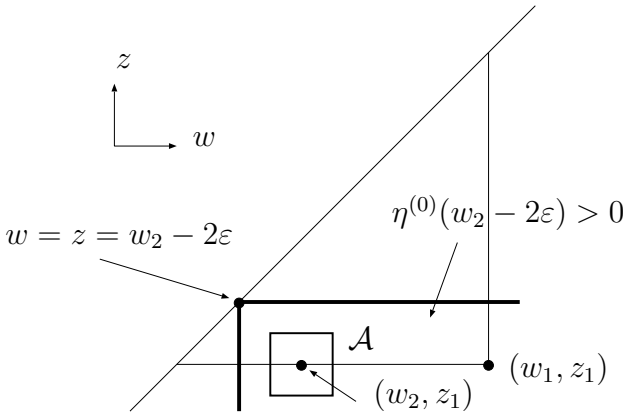

図 5: $\mathcal{A}$

でなくてはならない (もし 0 ならば $(w_2, z_1) \notin \operatorname{supp}\nu$)。よって $\mathcal{C}$ の定義より $w_2 - 2\varepsilon \in \mathcal{C}$ となるので $\mathcal{C} \neq \emptyset$。

2.
$\langle (w+z)\eta^{(0)}(a)\rangle$, $\langle \eta^{(0)}(a)\rangle$, $\langle \eta^{(0)}(a)\eta^{(0)}(b)\rangle$ は、Lebesgue 有界収束定理により a, b に関して連続であることがわかる。よって $\mathcal{C}$ は開集合であり、(41) の両辺を $(b-a)$ で割って $b \to a$ とすれば得られる。

3.
ν が全測度 1 であることと Schwarz の不等式より、

$$\langle \eta^{(0)}(a)\rangle \leq \langle 1\rangle^{1/2} \langle \eta^{(0)}(a)^2\rangle^{1/2} = \langle \eta^{(0)}(a)^2\rangle^{1/2} \tag{42}$$

なので、2. より $\zeta'(a) \geq 0$ となる。■

この命題 7 より次が導かれる。

命題 8

1. $\mathcal{C} =]z_1, w_1[$
2. $\operatorname{supp}\nu \ni (w_1, z_1)$

証明

1.
もし、$\mathcal{C}$ が連結でないとすると、$z_1 < a_0 \leq a_1 < w_1$, $a_0 \notin \mathcal{C}$ で、

$$]a_0 - \varepsilon, a_0[\cup]a_1, a_1 + \varepsilon[\subset \mathcal{C}$$

となるような a_0, a_1, $\varepsilon > 0$ が取れる。このとき、$\langle \eta^{(0)}(a_0) \rangle = 0$ であり、

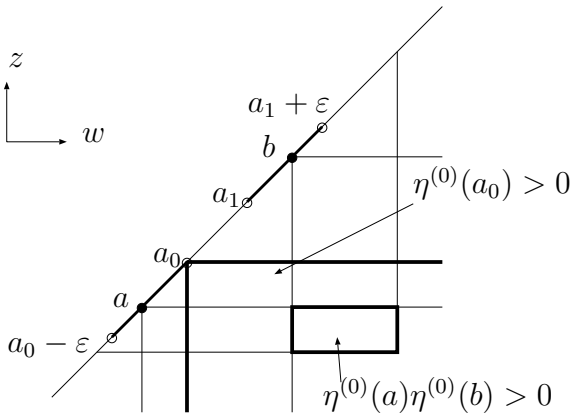

図 6: a_0,a_1,a,b

$$a \in]a_0 - \varepsilon, a_0[, \quad b \in]a_1, a_1 + \varepsilon[$$

なる任意の a, b に対し、$a, b \in \mathcal{C}$ より $\langle \eta^{(0)}(a) \rangle > 0$, $\langle \eta^{(0)}(b) \rangle > 0$ となるが

$$\begin{aligned}
&\{(w,z);\ \eta^{(0)}(a)\eta^{(0)}(b) > 0\} \\
&\quad = \ \{(w,z);\ \eta^{(0)}(a) > 0\} \cap \{(w,z);\ \eta^{(0)}(b) > 0\} \\
&\quad = \ \{(w,z);\ w > a > z\} \cap \{(w,z);\ w > b > z\} = \{(w,z);\ w > b > a > z\} \\
&\quad \subset \ \{(w,z);\ \eta^{(0)}(a_0) > (b - a_0)(a_0 - a) > 0\}
\end{aligned}$$

となるので、$\langle \eta^{(0)}(a_0) \rangle = 0$ であれば $\langle \eta^{(0)}(a)\eta^{(0)}(b) \rangle = 0$ でなければならないことになる。よって、(41) より

$$\zeta(b) - \zeta(a) = a - b$$

となるが、これは b を止めて a を $]a_0 - \varepsilon, a_0[$ $(\subset \mathcal{C})$ 上を動かせばそこでは ζ が

$$\zeta(a) = -a + (\text{定数})$$

の形に書けることを意味し、これは命題 7 の 3. に反する。

よって $\mathcal{C}$ は連結であり、ある z_2, w_2 $(z_1 \le z_2 \le w_2 \le w_1)$ によって

$$\mathcal{C} =]z_2, w_2[$$

と書けることになる。

もし、$z_1 < z_2$ ならば、$z_1 \le a \le z_2$ なるすべての a に対して $\langle \eta^{(0)}(a) \rangle = 0$ ということになるが、命題 7 の 1. の証明と同じ論法により、これは

$$\operatorname{supp} \nu \cap \{(w, z);\ z_1 \le z < z_2,\ w > z\} = \emptyset$$

を意味し、Σ_1 の最小性に反する。よって $z_2 = z_1$ となる。同様に $w_2 = w_1$ も言えるので、$\mathcal{C} =]z_1, w_1[$ となる。

2.
$(w_1, z_1) \notin \operatorname{supp} \nu$ と仮定すると、$0 < \varepsilon < (w_1 - z_1)/2$ である ε を十分小さくとれば、

$$\mathcal{B} = \{(w, z);\ w_1 - \varepsilon \le w \le w_1,\ z_1 \le z \le z_1 + \varepsilon\}$$

が $\mathcal{B} \cap \operatorname{supp} \nu = \emptyset$ となるようにできるはずである。このとき、

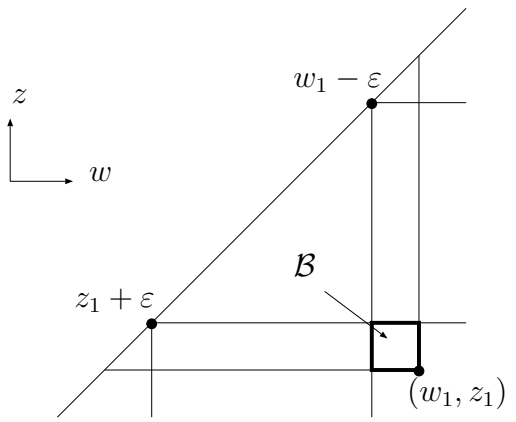

図 7: $\mathcal{B}$

$$\eta^{(0)}(w_1 - \varepsilon)\eta^{(0)}(z_1 + \varepsilon)$$

は $\mathcal{B}$ の境界、および $\Sigma_1 \setminus \mathcal{B}$ では 0 なので、

$$\langle \eta^{(0)}(w_1 - \varepsilon)\eta^{(0)}(z_1 + \varepsilon) \rangle = 0$$

でなくてはならず、よって (41) より、

$$\zeta(w_1 - \varepsilon) - \zeta(z_1 + \varepsilon) = z_1 + \varepsilon - (w_1 - \varepsilon) = -(w_1 - z_1 - 2\varepsilon) < 0$$

となるから、命題 7 の 3. と命題 8 の 1. に矛盾する。ゆえに $(w_1, z_1) \in \operatorname{supp} \nu$ となる。∎

この命題 7, 8 を示す Lions らの手法は、内エントロピー $(\eta^{(0)}(a), q^{(0)}(a))$ のパラメータ a を動かしたものだけで済むところがミソであり、DiPerna の外エントロピーを用いる方法よりシンプルであると思われる。

8 $\langle B_n \rangle$ が 0 に収束すること

次は、$\langle B_n \rangle = \langle \eta_n \hat{q}_n - \hat{\eta}_n q_n \rangle$ の 0 への収束性を示す。ここでは DiPerna の方法を多少改良した方法を紹介する。

DiPerna ([5]) は、

$$\begin{aligned} B_n^{(0)} &= B_n^{(0)}(a) = \eta^{(0)}(a) q_n(a) - \eta_n(a) q^{(0)}(a), \\ B_n^{(1)} &= B_n^{(1)}(a) = \eta^{(1)}(a) q_n(a) - \eta_n(a) q^{(1)}(a), \\ B_n &= B_n(a) = \eta_n(a) \hat{q}_n(a) - \hat{\eta}_n(a) q_n(a) \end{aligned}$$

を考え、これらの組み合わせによって

$$\lim_{n \to \infty} \langle B_n \rangle = 0 \tag{43}$$

を示している。しかし、[4],[5] では (43) を示すために ψ_0, $\hat{\psi}_0$ に強い制限を与えることで

$\langle \eta_n \rangle$, $\langle q_n \rangle$ が有界で、$\langle B_n^{(0)} \rangle \to 0$, $\langle B_n^{(1)} \rangle$ が有界

となるようにしている。しかし、その議論を見直してみると、以下の式を用いれば ψ_0, $\hat{\psi}_0$ の制限を多少緩くできることがわかる。

補題 9

$B_{0,1} = B_{0,1}(a) = \eta^{(0)} q^{(1)} - \eta^{(1)} q^{(0)}$ とすると、次が成り立つ。

$$\langle B_n \rangle \langle B_{0,1} \rangle - \langle B_n^{(0)} \rangle \langle \hat{B}_n^{(1)} \rangle + \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle \langle B_n^{(1)} \rangle = 0 \tag{44}$$

なお、$\hat{B}_n^{(j)}$ は $B_n^{(j)}$ の η_n, q_n を $\hat{\eta}_n$, $\hat{q}_n$ で置き換えたものを意味する。

証明

一般に、Tartar の関係式を満たすようなエントロピー対 (η_i, q_i), (η_j, q_j) $(1 \leq i < j \leq 4)$ に対して、$B_{i,j} = \eta_i q_j - \eta_j q_i$ とするとき、

$$\langle B_{1,2} \rangle \langle B_{3,4} \rangle - \langle B_{1,3} \rangle \langle B_{2,4} \rangle + \langle B_{1,4} \rangle \langle B_{2,3} \rangle = 0 \tag{45}$$

が成り立つことを示せばよい。(45) は、Tartar の関係式

$$\langle B_{i,j} \rangle = \langle \eta_i \rangle \langle q_j \rangle - \langle \eta_j \rangle \langle q_i \rangle \quad (1 \leq i < j \leq 4)$$

を直接代入して整理しても得られるが、4 次の行列式

$$\begin{vmatrix} \langle \eta_1 \rangle & \langle q_1 \rangle & \langle \eta_1 \rangle & \langle q_1 \rangle \\ \langle \eta_2 \rangle & \langle q_2 \rangle & \langle \eta_2 \rangle & \langle q_2 \rangle \\ \langle \eta_3 \rangle & \langle q_3 \rangle & \langle \eta_3 \rangle & \langle q_3 \rangle \\ \langle \eta_4 \rangle & \langle q_4 \rangle & \langle \eta_4 \rangle & \langle q_4 \rangle \end{vmatrix} = 0$$

を、1,2 列目に関して 2 次の小行列式同士の積の形にラプラス展開して、Tartar の関係式

$$\begin{vmatrix} \langle \eta_i \rangle & \langle q_i \rangle \\ \langle \eta_j \rangle & \langle q_j \rangle \end{vmatrix} = \langle B_{i,j} \rangle$$

を用いても得られる ((45) を 2 倍した式が得られる)。∎

[4],[5] でも、実質的には (44) を用いたような議論はしているのであるが、直接 (44) を積極的には使っていないために $\psi_0, \hat{\psi}_0$ に強い制限が必要になっていて、特に [4] ではその ψ_0 の選択がかなり複雑になっている。本稿では、(44) を積極的に用いることで、$\psi_0, \hat{\psi}_0$ には強い制限を与えないような議論を行う。

なお、関係式 (45) は [11] p450 にも見られるが、Lions ら ([6]) はこれを用いてはおらず、内エントロピー $\eta^{(0)}(a)$ のみを用い、そのパラメータを変えたエントロピー対に対する 3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} \langle \eta^{(0)}(a) \rangle & \langle \eta^{(0)}(a) \rangle & \langle q^{(0)}(a) \rangle \\ \langle \eta^{(0)}(b) \rangle & \langle \eta^{(0)}(b) \rangle & \langle q^{(0)}(b) \rangle \\ \langle \eta^{(0)}(c) \rangle & \langle \eta^{(0)}(c) \rangle & \langle q^{(0)}(c) \rangle \end{vmatrix} = 0$$

を 1 列目に関して展開して

$$\langle \eta^{(0)}(a) \rangle \langle B^{(0)}(b,c) \rangle - \langle \eta^{(0)}(b) \rangle \langle B^{(0)}(a,c) \rangle + \langle \eta^{(0)}(c) \rangle \langle B^{(0)}(a,b) \rangle = 0$$
$$(B^{(0)}(a,b) = \eta^{(0)}(a) q^{(0)}(b) - \eta^{(0)}(b) q^{(0)}(a))$$

とし、この式をパラメータ a, b などについて $\tau + 1$ 回微分する、といった手法を用いている。

補題 10

$h(a) = \langle B_{0,1}(a) \rangle$ とすると、$h(a)$ は有界で、$a \notin \mathcal{C}$ に対しては $h(a) = 0$、$a \in \mathcal{C}$ に対しては $h(a) > 0$ となる。

証明

$B_{0,1}$ は、

$$\begin{aligned} B_{0,1} &= \eta^{(0)} q^{(1)} - \eta^{(1)} q^{(0)} \\ &= \eta^{(0)} \left(\frac{1}{3} \eta^{(0)} + \frac{1}{3}(a+w+z)\eta^{(1)} \right) - \eta^{(1)} \cdot \frac{1}{3}(a+w+z)\eta^{(0)} \\ &= \frac{1}{3}(\eta^{(0)})^2 \end{aligned}$$

であるから Σ_1 上有界で、(42) より

$$\langle \eta^{(0)} \rangle \leq \sqrt{3 \langle B_{0,1} \rangle}$$

となるが、$a \in \mathcal{C}$ に対して $\langle \eta^{(0)}(a) \rangle > 0$ なので

$$h(a) = \langle B_{0,1}(a) \rangle \geq \frac{1}{3} \langle \eta^{(0)}(a) \rangle^2 > 0$$

となる。一方、$a \notin \mathcal{C}$ に対しては、命題 8 の 1. より $a \leq z_1$ か、$a \geq w_1$ であるが、いずれの場合も

$$B_{0,1} = \frac{1}{3}(\eta^{(0)})^2 = \frac{1}{3}(w-a)^2(a-z)^2 X(a)$$

は $(w, z) \in \Sigma_1$ に対して 0 になってしまうので、$h(a) = \langle B_{0,1}(a) \rangle = 0$ となる。∎

次に、$B_n^{(0)}$, $B_n^{(1)}$ の極限を考える。それには次の補題を用いる。

補題 11

$\psi_n(s) = \psi_n(s; a) = n\psi_0(n(s-a))$ $(\psi_0 \in C_0^\infty(]0,1[))$、および任意の有界な区間 $I = [p, q]$ に対して、次が成り立つ。

1. $(s-a)^k \psi_n(s)$ $(k \geq 1)$ は、$s, a \in I$, n に関して有界で、

   $$\lim_{n \to \infty} (s-a)^k \psi_n(s) = 0$$

2. $f(s)$ が I 上連続ならば、

   $$I_n = \int_z^w f(s)\psi_n(s)ds$$

   は、$z, w, a \in I$ $(z \leq w)$, n に関して有界で、以下が成り立つ。

   $$\lim_{n \to \infty} I_n = f(a)c_0 X(a) \quad \left(c_0 = \int_0^1 \psi_0 \right)$$

証明

1.
$S_n = n(s-a)$ と書くことにすれば、

$$(s-a)^k \psi_n(s) = n(s-a)^k \psi_0(n(s-a)) = (s-a)^{k-1} S_n \psi_0(S_n)$$

であり、$\psi_0 \in C_0^\infty(]0,1[)$ だから $x\psi_0(x)$ は有界で、$(s-a)^{k-1}$ も有界である。

$n \to \infty$ のとき、$s \neq a$ ならば $S_n = n(s-a) \to \pm\infty$ なので 大きい n に対しては S_n は ψ_0 のサポートを越えてしまうので $S_n\psi_0(S_n) \to 0$ となる。

$s = a$ ならば $S_n = 0$ なので OK.

2.
$W_n = n(w-a)$, $Z_n = n(z-a)$ とすると、

$$\int_z^w |\psi_n(s)|ds = \int_z^w n|\psi_0(n(s-a))|ds = \int_{Z_n}^{W_n} |\psi_0(y)|dy \leq \|\psi_0\|_{L^1}$$

なので、

$$|I_n| \leq \max\{|f(s)|; s \in I\} \cdot \|\psi_0\|_{L^1}$$

となり I_n は確かに有界となる。$\psi_n(s)$ のサポートは

$$\operatorname{supp} \psi_n(s) = \operatorname{supp} \psi_0(n(s-a)) \subset \left[a, a + \frac{1}{n}\right] \tag{46}$$

なので、$w \leq a$ ならば $I_n = 0$ であり、$a < z$ ならば十分大きい n に対して $a + 1/n \leq z$ となり、そのような n に対しては $I_n = 0$ だから $I_n \to 0$ となる。

$z \leq a < w$ ならば十分大きい n に対し $a + 1/n \leq w$ となるから、そのような n に対して

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^{a+1/n} f(s)\psi_n(s)ds = \int_0^1 f\left(a + \frac{y}{n}\right)\psi_0(y)dy \\ &\to \int_0^1 f(a)\psi_0(y)dy = f(a)c_0 \end{aligned}$$

となる。ゆえにこれをまとめて $I_n \to f(a)c_0X(a)$ となる。■

ここまでは (η, q), $(\bar{\eta}, \bar{q})$ に対して、

$$B = \eta\bar{q} - \bar{\eta}q$$

のようにしてきたが、$\sigma = q - \lambda_2 \eta$ を用いれば

$$B = \eta(\bar{\sigma} + \lambda_2 \bar{\eta}) - \bar{\eta}(\sigma + \lambda_2 \eta) = \eta\bar{\sigma} - \bar{\eta}\sigma$$

となるので、この形で考えることにする。まず $B_n^{(0)}$ は、(17), (21), (23) より

$$\begin{aligned} B_n^{(0)} &= \eta^{(0)}\sigma_n - \sigma^{(0)}\eta_n = \eta^{(0)} \left(\sigma_n + \frac{w-a}{3}\,\eta_n \right) \\ &= \eta^{(0)} \left[(w-z) \left\{ \frac{w-a}{3}\,\psi_n(w) - \frac{a-z}{3}\,\psi_n(z) \right\} \right. \\ &\quad \left. -2\int_z^w \left(s - \frac{w+z+a}{3} \right) \psi_n(s) ds \right] \end{aligned}$$

となるので、補題 11 より $B_n^{(0)}$ は $w, z, a \in [z_1, w_1]$, n に関して有界で、

$$\begin{aligned} B_n^{(0)} &\to -2\eta^{(0)} \left(a - \frac{w+z+a}{3} \right) c_0 X(a) = \frac{2}{3}\,\eta^{(0)}(w+z-2a) c_0 X(a) \\ &= \frac{2}{3}\,c_0 \eta^{(0)} \eta^{(1)} \end{aligned}$$

となる。同様に $B_n^{(1)}$ を考えると、

$$\begin{aligned} B_n^{(1)} &= \eta^{(1)}\sigma_n - \sigma^{(1)}\eta_n = \eta^{(1)}\sigma_n - \left\{ \frac{1}{3}\,\eta^{(0)} - \frac{1}{3}(w-a)\eta^{(1)} \right\} \eta_n \\ &= \eta^{(1)} \left(\sigma_n + \frac{w-a}{3}\,\eta_n \right) - \frac{1}{3}\,\eta^{(0)}\eta_n \\ &= \eta^{(1)} \left[(w-z) \left\{ \frac{w-a}{3}\,\psi_n(w) - \frac{a-z}{3}\,\psi_n(z) \right\} \right. \\ &\quad \left. -2\int_z^w \left(s - \frac{w+z+a}{3} \right) \psi_n(s) ds \right] \\ &\quad -\frac{1}{3}\,\eta^{(0)} \left\{ (w-z)(\psi_n(w) + \psi_n(z)) - 2\int_z^w \psi_n(s) ds \right\} \end{aligned}$$

となるが、

$$\eta^{(0)}(\psi_n(w) + \psi_n(z)) = \{(w-a)\psi_n(w)(a-z) + (a-z)\psi_n(z)(w-a)\} X(a)$$

等より、補題 11 から $B_n^{(1)}$ も $w, z, a \in [z_1, w_1]$, n に関して有界であることがわかり、$X(a)^2 = X(a)$ なので

$$B_n^{(1)} \to -2\eta^{(1)} \left(a - \frac{w+z+a}{3} \right) c_0 X(a) + \frac{2}{3}\,\eta^{(0)} c_0 X(a)$$

$$= \frac{2}{3} c_0 \{\eta^{(0)} + (\eta^{(1)})^2\}$$

となる。よって Lebesgue 収束定理により、

$$\langle B_n^{(0)} \rangle \to \frac{2}{3} c_0 \langle \eta^{(0)} \eta^{(1)} \rangle, \quad \langle B_n^{(1)} \rangle \to \frac{2}{3} c_0 \langle \eta^{(0)} + (\eta^{(1)})^2 \rangle$$

が言え、同様に

$$\langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle \to \frac{2}{3} \hat{c}_0 \langle \eta^{(0)} \eta^{(1)} \rangle, \quad \langle \hat{B}_n^{(1)} \rangle \to \frac{2}{3} \hat{c}_0 \langle \eta^{(0)} + (\eta^{(1)})^2 \rangle \quad \left(\hat{c}_0 = \int_0^1 \hat{\psi}_0 \right)$$

が言えるから、補題 9 より

$$\langle B_n \rangle \langle B_{0,1} \rangle = h(a) \langle B_n \rangle = \langle B_n^{(0)} \rangle \langle \hat{B}_n^{(1)} \rangle - \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle \langle B_n^{(1)} \rangle \to 0$$

となる。よって補題 10 より、$a \in \mathcal{C} =]z_1, w_1[$ に対しては

$$\langle B_n \rangle \to 0$$

となることもわかる。

命題 12

$h(a)\langle B_n \rangle$ はすべての a に対して有界で、

$$\lim_{n \to \infty} h(a) \langle B_n \rangle = 0 \tag{47}$$

となる。特に $a \in \mathcal{C} =]z_1, w_1[$ に対しては

$$\lim_{n \to \infty} \langle B_n \rangle = 0$$

となる。

なお、本稿では [4],[5] とはやや異なり、$\langle B_n \rangle \to 0$ よりもむしろ $h(a)\langle B_n \rangle \to 0$ の方を用いる。

9 B_n の変形

8 節により $\langle B_n \rangle$ が 0 に収束することがわかったが、この B_n にも $o(1)$ な項が含まれているので、ここでそれらを洗い出して分離しておくことにする。

まず、B_n を展開して以下のように分ける。

$$
\begin{aligned}
B_n &= \eta_n \hat{\sigma}_n - \hat{\eta}_n \sigma_n \\
&= \left\{ (w-z)(\psi_n(w)+\psi_n(z)) - 2\int_z^w \psi_n(s)ds \right\} \\
&\quad \times \left\{ -\frac{(w-z)^2}{3}\hat{\psi}_n(z) - 2\int_z^w (s-\lambda_2)\hat{\psi}_n(s)ds \right\} \\
&\quad - \left\{ (w-z)(\hat{\psi}_n(w)+\hat{\psi}_n(z)) - 2\int_z^w \hat{\psi}_n(s)ds \right\} \\
&\quad \times \left\{ -\frac{(w-z)^2}{3}\psi_n(z) - 2\int_z^w (s-\lambda_2)\psi_n(s)ds \right\} \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \\
I_1 &= \frac{(w-z)^3}{3}\{\hat{\psi}_n(w)\psi_n(z) - \psi_n(w)\hat{\psi}_n(z)\}, \\
I_2 &= \frac{2}{3}(w-z)^2 \left\{ \hat{\psi}_n(z)\int_z^w \psi_n(s)ds - \psi_n(z)\int_z^w \hat{\psi}_n(s)ds \right\}, \\
I_3 &= 2(w-z)\left\{ (\hat{\psi}_n(w)+\hat{\psi}_n(z))\int_z^w (s-\lambda_2)\psi_n(s)ds \right. \\
&\quad \left. -(\psi_n(w)+\psi_n(z))\int_z^w (s-\lambda_2)\hat{\psi}_n(s)ds \right\}, \\
I_4 &= 4\left\{ \int_z^w \psi_n(s)ds \int_z^w (s-\lambda_2)\hat{\psi}_n(s)ds - \int_z^w \hat{\psi}_n(s)ds \int_z^w (s-\lambda_2)\psi_n(s)ds \right\}
\end{aligned}
$$

このとき I_1 は、$W_n = n(w-a)$, $Z_n = n(z-a)$ により

$$
I_1 = \frac{(w-z)}{3}(W_n - Z_n)^2\{\hat{\psi}_0(W_n)\psi_0(Z_n) - \psi_0(W_n)\hat{\psi}_0(Z_n)\}
$$

と書けるが、例えば $W_n^2\hat{\psi}_0(W_n)\psi_0(Z_n)$ は補題 11 の証明と同様にして、$w, z, a \in [z_1, w_1]$ $(z \le w)$, n に関して有界でかつ 0 に収束することがわかる。これと同様にして、I_1 のすべての項が有界で 0 に収束することが示される。

I_4 も、補題 11 により有界で、

$$
I_4 \to 4\{c_0 X(a)(a-\lambda_2)\hat{c}_0 X(a) - \hat{c}_0 X(a)(a-\lambda_2)c_0 X(a)\} = 0
$$

となる。

また I_3 は、

$$\begin{aligned}
I_3 &= I_5 + I_6, \\
I_5 &= 2(w-z)\left\{(\hat{\psi}_n(w)+\hat{\psi}_n(z))\int_z^w (s-a)\psi_n(s)ds\right. \\
&\quad \left.-(\psi_n(w)+\psi_n(z))\int_z^w (s-a)\hat{\psi}_n(s)ds\right\}, \\
I_6 &= 2(w-z)(a-\lambda_2)\left\{(\hat{\psi}_n(w)+\hat{\psi}_n(z))\int_z^w \psi_n(s)ds\right. \\
&\quad \left.-(\psi_n(w)+\psi_n(z))\int_z^w \hat{\psi}_n(s)ds\right\}
\end{aligned}$$

と分け、

$$a-\lambda_2 = a-\frac{2w+z}{3} = -(w-a)+\frac{w-z}{3} = a-z-\frac{2(w-z)}{3}$$

と考えると、I_6 はさらに

$$\begin{aligned}
I_6 &= I_7 + I_8, \\
I_7 &= \frac{2}{3}(w-z)^2\left\{\hat{\psi}_n(w)\int_z^w \psi_n(s)ds-\psi_n(w)\int_z^w \hat{\psi}_n(s)ds\right\} \\
&\quad -\frac{4}{3}(w-z)^2\left\{\hat{\psi}_n(z)\int_z^w \psi_n(s)ds-\psi_n(z)\int_z^w \hat{\psi}_n(s)ds\right\}, \\
I_8 &= 2(w-z)\left[\{-(w-a)\hat{\psi}_n(w)+(a-z)\hat{\psi}_n(z)\}\int_z^w \psi_n(s)ds\right. \\
&\quad \left.-\{-(w-a)\psi_n(w)+(a-z)\psi_n(z)\}\int_z^w \hat{\psi}_n(s)ds\right]
\end{aligned}$$

と分けることができ、補題 11 により I_8 は有界で 0 に収束することがわかる。I_7 には I_2 に同類項が含まれるので、それらをまとめると結局次が言える。

命題 13

B_n は、$B_n = I_5 + I_9 + I_{10} + I_{11}$ と分けることができ、

$$\begin{aligned}
I_9 &= \frac{2}{3}(w-z)^2\left\{\hat{\psi}_n(w)\int_z^w \psi_n(s)ds-\psi_n(w)\int_z^w \hat{\psi}_n(s)ds\right\}, \\
I_{10} &= -\frac{2}{3}(w-z)^2\left\{\hat{\psi}_n(z)\int_z^w \psi_n(s)ds-\psi_n(z)\int_z^w \hat{\psi}_n(s)ds\right\}, \\
I_{11} &= I_1 + I_4 + I_8
\end{aligned}$$

で、I_{11} は $w, z, a \in [z_1, w_1]$ $(z \leq w)$, n に関して有界でかつ 0 に収束する。

なお、この I_5 は有界ではあるが 0 には収束せず、また I_9, I_{10} は $O(n)$ な項である。

10 δ への決定

ここまでで必要な評価は出揃ったので、あとはそれらを用いて、$n \to \infty$ のときに $\langle B_n \rangle$ $(\to 0)$ に残る B_n の最も大きな項が 0 になる、という式を用いて、ν のサポートが (w_1, z_1) 以外には $w > z$ の部分にはないことを示せばよい。

DiPerna 流 ([4],[5]) のやり方では、この $\langle B_n \rangle$ の最も大きな項の極限が「Young 測度の微分」になることを示し、それが 0 であることから (w_1, z_1) 以外にはサポートがないことを言うのであるが、「測度の微分」はややとっつきにくいので、ここでは (47) を利用し、Lions ら ([6]) の方法のように $\langle B_n \rangle$ に $h(a)$ をかけて a で積分することで、(w_1, z_1) 以外にはサポートがないことを直接示すことにする。

命題 13 で B_n を分割したが、まずは $h(a)I_5$ の積分から考えることにする。そのために、I_5 をさらに 2 つに分け、

$$\begin{aligned} I_5 &= I_{5,1} + I_{5,2}, \\ I_{5,1} &= 2(w-z)\left\{\hat{\psi}_n(w)\int_z^w (s-a)\psi_n(s)ds - \psi_n(w)\int_z^w (s-a)\hat{\psi}_n(s)ds\right\}, \\ I_{5,2} &= 2(w-z)\left\{\hat{\psi}_n(z)\int_z^w (s-a)\psi_n(s)ds - \psi_n(z)\int_z^w (s-a)\hat{\psi}_n(s)ds\right\} \end{aligned}$$

として考える。

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} h(a)I_{5,1}da \\ &= 2(w-z)\int_{-\infty}^{\infty} h(a)da \int_z^w (s-a)\{\hat{\psi}_n(w)\psi_n(s) - \psi_n(w)\hat{\psi}_n(s)\}ds \\ &= 2(w-z)\int_z^w ds \int_{-\infty}^{\infty} (s-a)h(a)\{\hat{\psi}_n(w)\psi_n(s) - \psi_n(w)\hat{\psi}_n(s)\}da \end{aligned}$$

この、$\hat{\psi}_n(w)\psi_n(s) - \psi_n(w)\hat{\psi}_n(s)$ は、(46) より $s, w \in [a, a+1/n]$ のときのみ 0 ではな

い。よって、$s < w - 1/n$ だと $a \leq s < w - 1/n$ より 0 になってしまうので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(a) I_{5,1} da = 2(w-z) \int_{z \vee (w-1/n)}^{w} ds \int_{-\infty}^{\infty} da = 2(w-z) \int_{z \vee (w-1/n)}^{w} ds \int_{w-1/n}^{s} da$$

となる。ここで、$a \vee b = \max\{a, b\}$、$a \wedge b = \min\{a, b\}$ とする。$s = w - t/n$, $n(w-a) = y$ と置換すると、

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} h(a) I_{5,1} da &= 2(w-z) \int_{0}^{1 \wedge (n(w-z))} \frac{dt}{n} \int_{w-1/n}^{w-t/n} da \\
&= 2(w-z) \int_{0}^{1 \wedge (n(w-z))} \frac{dt}{n} \\
&\quad \times \int_{t}^{1} \frac{y-t}{n} h\left(w - \frac{y}{n}\right) n^2 \{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(y-t) - \psi_0(y)\hat{\psi}_0(y-t)\} \frac{dy}{n} \\
&= \frac{2(w-z)}{n} \int_{0}^{1 \wedge (n(w-z))} dt \\
&\quad \times \int_{t}^{1} (y-t) h\left(w - \frac{y}{n}\right) \{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(y-t) - \psi_0(y)\hat{\psi}_0(y-t)\} dy
\end{aligned}$$

となるが、この積分は先頭の $1/n$ がなくても $w, z, a \in [z_1, w_1]$ $(z_1 \leq w_1)$ に関して有界であり、よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(a) I_{5,1} da = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

であることがわかる。さらに $w = z$ ならば 0 であり、$w > z$ ならば十分大きい n に対しては $n(w-z) > 1$ となるので、このとき

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} h(a) I_{5,1} da \\
&= \frac{2(w-z)}{n} \int_{0}^{1} dt \int_{t}^{1} (y-t) h\left(w - \frac{y}{n}\right) \{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(y-t) - \psi_0(y)\hat{\psi}_0(y-t)\} dy \\
&= \frac{2(w-z)}{n} \int_{0}^{1} h\left(w - \frac{y}{n}\right) dy \int_{0}^{y} (y-t) \{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(y-t) - \psi_0(y)\hat{\psi}_0(y-t)\} dt \\
&= \frac{2(w-z)}{n} \int_{0}^{1} h\left(w - \frac{y}{n}\right) dy \int_{0}^{y} p \{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(p) - \psi_0(y)\hat{\psi}_0(p)\} dp
\end{aligned}$$

と変形できる。

同様に、$h(a)I_{5,2}$ の積分は、

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} h(a)I_{5,2}da \\
&= 2(w-z)\int_z^w ds\int_{-\infty}^{\infty}(s-a)h(a)\{\hat{\psi}_n(z)\psi_n(s)-\psi_n(z)\hat{\psi}_n(s)\}da \\
&= 2(w-z)\int_z^{w\wedge(z+1/n)} ds\int_{-\infty}^{\infty} da = 2(w-z)\int_z^{w\wedge(z+1/n)} ds\int_{s-1/n}^{z} da \\
&= 2(w-z)\int_0^{1\wedge(n(w-z))}\frac{dt}{n}\int_{z-(1-t)/n}^{z} da \\
&= \frac{2(w-z)}{n}\int_0^{1\wedge(n(w-z))} dt \\
&\quad\times\int_0^{1-t}(y+t)h\left(z-\frac{y}{n}\right)\{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(y+t)-\psi_0(y)\hat{\psi}_0(y+t)\}dy
\end{aligned}$$

となり、これも先頭の $1/n$ がなくても有界で、よって $O(1/n)$ であり、$n(w-z)>1$ のときはさらに

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} h(a)I_{5,2}da = \frac{2(w-z)}{n}\int_0^1 dt\int_0^{1-t} dy \\
&= \frac{2(w-z)}{n}\int_0^1 h\left(z-\frac{y}{n}\right)dy \\
&\quad\times\int_0^{1-y}(y+t)\{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(y+t)-\psi_0(y)\hat{\psi}_0(y+t)\}dt \\
&= \frac{2(w-z)}{n}\int_0^1 h\left(z-\frac{y}{n}\right)dy\int_y^1 p\{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(p)-\psi_0(y)\hat{\psi}_0(p)\}dp
\end{aligned}$$

と変形できる。

よって、$(w,z)\in\Sigma_1$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(a)I_5da\to 0\quad(n\to\infty)$$

となることが示された。

同様に I_9, I_{10} と $h(a)$ の積の積分を考えると、I_9 の方は、$I_{5,1}$ の $(s-a)$ がなく、$2(w-z)$ が $2(w-z)^2/3$ となっているだけなので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(a)I_9da$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2(w-z)^2}{3}\int_0^{1\wedge(n(w-z))} dt \\
&\quad \times \int_t^1 h\left(w-\frac{y}{n}\right)\{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(y-t)-\psi_0(y)\hat{\psi}_0(y-t)\}dy
\end{aligned}
$$

となることがわかる。これは $w, z, a \in [z_1, w_1]$ $(z_1 \le w_1)$ に関して有界であり、$n(w-z) > 1$ のときは

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} h(a) I_9 da \\
&\quad = \frac{2(w-z)^2}{3}\int_0^1 dt \int_t^1 h\left(w-\frac{y}{n}\right)\{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(y-t)-\psi_0(y)\hat{\psi}_0(y-t)\}dy \\
&\quad = \frac{2(w-z)^2}{3}\int_0^1 h\left(w-\frac{y}{n}\right)dy \int_0^y \{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(p)-\psi_0(y)\hat{\psi}_0(p)\}dp \\
&\quad \to \frac{2(w-z)^2}{3} h(w) I_{12}, \\
I_{12} &= \int_0^1 dy \int_0^y \{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(p)-\psi_0(y)\hat{\psi}_0(p)\}dp
\end{aligned}
$$

となる。同様に、I_{10} との積の積分は、

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} h(a) I_{10} da \\
&= -\frac{2(w-z)^2}{3}\int_0^{1\wedge(n(w-z))} dt \\
&\quad \times \int_0^{1-t} h\left(z-\frac{y}{n}\right)\{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(y+t)-\psi_0(y)\hat{\psi}_0(y+t)\}dy
\end{aligned}
$$

となり、これは有界で、$n(w-z) > 1$ のときは

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} h(a) I_{10} da \\
&= -\frac{2(w-z)^2}{3}\int_0^1 dt \int_0^{1-t} h\left(z-\frac{y}{n}\right)\{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(y+t)-\psi_0(y)\hat{\psi}_0(y+t)\}dy \\
&= -\frac{2(w-z)^2}{3}\int_0^1 h\left(z-\frac{y}{n}\right)dy \int_y^1 \{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(p)-\psi_0(y)\hat{\psi}_0(p)\}dp \\
&\to -\frac{2(w-z)^2}{3} h(z)\int_0^1 dy \int_y^1 \{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(p)-\psi_0(y)\hat{\psi}_0(p)\}dp \\
&= -\frac{2(w-z)^2}{3} h(z)\int_0^1 dp \int_0^p \{\hat{\psi}_0(y)\psi_0(p)-\psi_0(y)\hat{\psi}_0(p)\}dy \\
&= \frac{2(w-z)^2}{3} h(z) I_{12}
\end{aligned}
$$

となる。

残りの I_{11} は $o(1)$ であるから、Lebesgue 有界収束定理により、

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(a) I_{11} da \to 0$$

となる。以上により、次が示されたことになる。

命題 14

$(w, z) \in \Sigma_1$ に対し、次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(a) B_n da = \frac{2(w-z)^2}{3} (h(w) + h(z)) I_{12}$$

この命題 14 により、Fubini の定理、Lebesgue 有界収束定理を用いれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(a) \langle B_n \rangle da = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} h(a) B_n da \right\rangle \to \frac{2}{3} I_{12} \langle (w-z)^2 (h(w) + h(z)) \rangle \tag{48}$$

となる。一方で、命題 12 より $h(a)\langle B_n \rangle \to 0$ だから、補題 10 と Lebesgue 有界収束定理により

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(a) \langle B_n \rangle da = \int_{z_1}^{w_1} h(a) \langle B_n \rangle da \to 0 \tag{49}$$

となる。よって、(48), (49) より

$$I_{12} \langle (w-z)^2 (h(w) + h(z)) \rangle = 0 \tag{50}$$

が得られたことになる。

命題 15

ν は、$\operatorname{supp} \bar{\nu} \subset \{w = z\}$ となる測度 $\bar{\nu}$ と $0 < \alpha \leq 1$ なる α によって

$$\nu = \bar{\nu} + \alpha \delta(w - w_1, z - z_1) \tag{51}$$

と書ける。

証明

まず、I_{12} が 0 でないように $\psi_0, \hat{\psi}_0$ が取れることを示す。

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int_0^1 \psi_0(p)dp \int_p^1 \hat{\psi}_0(y)dy - \int_0^1 \psi_0(y)dy \int_0^y \hat{\psi}_0(p)dp \\ &= \int_0^1 \psi_0(y) \left\{ \int_y^1 \hat{\psi}_0(p)dp - \int_0^y \hat{\psi}_0(p)dp \right\} dy \end{aligned}$$

なので $\hat{\psi}_0 = \psi_0'$ と取り、$c_1 = \int_0^1 \psi_0^2 > 0$ とすれば

$$I_{12} = \int_0^1 \psi_0(y)\{-\psi_0(y) - \psi_0(y)\}dy = -2c_1 < 0$$

となって確かに 0 ではない。よって (50) より

$$\langle (w-z)^2(h(w)+h(z)) \rangle = 0 \tag{52}$$

が言える。補題 10 より $(w-z)^2(h(w)+h(z)) \geq 0$ であり、これが 0 になるのは $(w,z) \in \Sigma_1$ では $w=z$ か、または $(w,z)=(w_1,z_1)$ しかない。よって、(52) より ν のサポートは $\{w=z\}$ か (w_1,z_1) にしかないことになる。1 点をサポートとする測度は δ-関数のみなので、結局 ν は (51) のように書けることになる。なお、$w_1 > z_1$ という仮定より $\alpha > 0$ となる。■

この命題 15 の証明で $\psi_0, \hat{\psi}_0$ が使われていて、ここでは $\hat{\psi}_0 = \psi_0'$ としたが、$I_{12} \neq 0$ であればよいので、そのような $\psi_0, \hat{\psi}_0$ はこれ以外にも無数にある。このように $\psi_0, \hat{\psi}_0$ に対する制限が緩いのは、8 節で述べたように (44) を用いることで、$\psi_0, \hat{\psi}_0$ への強い仮定を置かずに $\langle B_n \rangle \to 0$ を示すことができたからにほかならない。

さて、最後にこの命題 15 の α が 1 であることを示そう。もしこれが言えれば、ν は全測度 1 であるから

$$\nu = \delta(w-w_1, z-z_1)$$

となることになる。

今、(40) に (51) を適用すると、$\eta^{(0)}(a)$ は $w=z$ 上 0 であるので、

$$\langle \eta^{(0)}(a) \rangle = \alpha \eta^{(0)}(w_1, z_1; a), \quad \langle (w+z)\eta^{(0)}(a) \rangle = \alpha(w_1+z_1)\eta^{(0)}(w_1, z_1; a),$$
$$\langle \eta^{(0)}(a)\eta^{(0)}(b) \rangle = \alpha \eta^{(0)}(w_1, z_1; a)\eta^{(0)}(w_1, z_1; b)$$

となり、よって (40) は

$$0 = (b-a)(\alpha - \alpha^2)\eta^{(0)}(w_1, z_1; a)\eta^{(0)}(w_1, z_1; b)$$

となる。よって、$z_1 < a < b < w_1$ と取れば

$$\eta^{(0)}(w_1, z_1; a)\eta^{(0)}(w_1, z_1; b) > 0, \quad b-a > 0$$

なので

$$\alpha - \alpha^2 = 0$$

となり、$\alpha > 0$ より、ゆえに $\alpha = 1$ となる。

命題 16

$$\nu = \delta(w - w_1, z - z_1)$$

この命題 16 と 4 節の性質 2., 4. を用いれば、その極限 $U_1(t,x)$ が (3), (4) のエントロピー解であることは容易に示される。

11 最後に

本稿では、補償コンパクト法の DiPerna 流の方法 ([4],[5]) を改良したものと Lions らの方法 ([6],[8]) を合わせた形で、簡単な P に対する 1 次元理想気体のエントロピー解の存在 (近似解の収束) を示す方法の概要を紹介したが、本稿で工夫した方法について

は、$\gamma = 5/3$ だけでなく、(2) のすべての γ についても同様のことが行えることがわかっている。

それを、[4] のように $1 < \gamma \leq 5/3$ にまで拡張できるかどうかはまだ確認はしていないが、可能性はあるだろうと思う。しかも本稿の方法であれば、[4] の $\gamma = 5/3$ の壁を越えて、$1 < \gamma \leq 2$ にまで拡張できるのではないかと予想しているが、その場合は $(\eta^{(1)}, q^{(1)})$ が有界にはならないので本稿の論法には多少変更が必要となる。それには a に関する可積分性を利用して、(47) を最終的に使用する (49) の

$$\lim_{n\to\infty} \int_R h(a)\langle B_n \rangle da = 0$$

に変えればなんとかなるのでは、と考えているが、ただ、$1 < \gamma \leq 2$ の場合は、1 節でも述べたように [6] で解決しているので、それが言えたとしてもあまり意味はないだろうと思う。

参考文献

[1] Chen Guiqiang, Remarks on DiPerna's paper "Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics", *Proc.Amer.Math.Soc.* **125**, 2981–2986 (1997).

[2] Chen Guiqiang and P.G.LeFloch, Compressible Euler equations with general pressure law, *Arch.Rational Mech.Anal.* **153**, 221–259 (2000).

[3] K.N.Chueh, C.C.Conley and J.A.Smoller, Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations, *Indiana Univ.Math.J.* **26**, 373–392 (1977).

[4] Ding Xiaxi, Chen Guiqiang, and Luo Peizhu, Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (I)–(III), *Acta Mathematica Scientia* **5**, 415–432,433–472 (1985), **6**, 75–120 (1986).

[5] R.J.DiPerna, Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics, *Comm.Math.Phys.* **91**, 1–30 (1983).

[6] P.L.Lions, B.Perthame, and P.E.Souganidis, Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic system of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates, *Comm.Pure Appl.Math.* **49**, 599–638 (1996).

[7] P.L.Lions, B.Perthame, and P.E.Souganidis, Weak stability of isentropic gas dynamics for γ=5/3, *Progress in elliptic and parabolic partial differential equations Research Notes in Math.* **No.350**, 184–192 (1996).

[8] P.L.Lions, B.Perthame, and E.Tadmor, Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-systems, *Comm.Math.Phys.* **163**, 415–431 (1994).

[9] T.Makino, Weak solutions to the compressible Euler equation with an asymptotic γ-law, *J.Math.Kyoto Univ.* **41**, 557–592 (2001).

[10] 松村昭孝、西原健二「非線形微分方程式の大域解」、日本評論社, 2004.

[11] P.D.Serre, La compacité par compensation pour les systèmes hyperboliques non linéaires de deux équations a une dimension d'espace, *J.Math.Pures Appl.* **65**, 423–468 (1986).

[12] J.A.Smoller, "*Shock waves and reaction-diffusion equations.*" 2nd ed., Springer, 1994.

[13] 竹野茂治、compensated compactness と保存則方程式について、京都大学数理解析研究所講究録 **No.1284**, 78–104 (2002).
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/conser.html

[14] 竹野茂治、リーマン問題入門 (2007),
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/conser.html

[15] 竹野茂治、気体の運動方程式の初期値境界値問題について、修士論文 (1990),
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/conser.html