

2024年02月21日

# 保存則方程式の有界変動でない初期値の解の例

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

## 1 はじめに

本稿では、単独保存則方程式

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (1)$$

の、局所的に有界変動でない初期値  $u_0(x)$  に対するエントロピー解で、 $t > 0$  では有界変動となる例を紹介する。ここで、 $u = u(t, x)$  は実数値関数、 $f(u)$  は、考える  $u$  の範囲では  $C^2$  級で  $f''(u) > 0$  であるものとする。

初期値が有界 ( $u_0 \in L^\infty(\mathbf{R})$ ) である場合、大域的なエントロピー解が存在することが Oleinik によって示されていて ([1])、そのエントロピー解は  $t > 0$  では  $x$  に関して局所的に有界変動 ( $u(t, \cdot) \in BV_{loc}(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$ ) であることも示されている ([2])。本稿では、実際に初期値が有界だが局所的に有界変動ではなく ( $u_0 \in L^\infty(\mathbf{R}) \setminus BV_{loc}(\mathbf{R})$ )、それに対するエントロピー解が  $t > 0$  で実際に局所的に有界変動 ( $u(t, \cdot) \in BV_{loc}(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$ ) であるような具体例を紹介する。

## 2 膨張波、衝撃波

局所的に可積分な初期値  $u_0(x) \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$  と  $t > 0$  で局所的に可積分な  $u(t, x) \in L^1_{loc}((0, \infty) \times \mathbf{R})$  が (1) の弱解であるとは、コンパクト台を持つ任意の  $C^1$  関数  $\phi(t, x) \in C^1_0([0, \infty) \times \mathbf{R})$  に対し、

$$\iint_{t>0} \{\phi_t u + \phi_x f(u)\} dt dx + \int_{\mathbf{R}} \phi(0, x) u_0(x) dx = 0 \quad (2)$$

を満たすことで、さらにエントロピー解であるとは、弱解でかつエントロピー条件を満たすこと。

エントロピー条件には、同値な条件がいくつか存在するが、本稿では主に区分的に  $C^1$  な弱解のみを考察するため、Oleinik 条件

$$\frac{u(t, x+h) - u(t, x)}{h} < \frac{E}{t} \quad (3)$$

を、任意の  $t > 0, x, h > 0$  に対して満たすような有限値  $E$  が取れること、をあげておくが、あとで別のエントロピー条件である Lax 条件もでてくる。

エントロピー解として代表的なのは、リーマン問題と呼ばれる初期値問題

$$u_0(x) = \begin{cases} u_- & (x < a) \\ u_+ & (x > a) \end{cases} \quad (u_-, u_+ : \text{定数}) \quad (4)$$

に対する解である膨張波  $R = R(u_-, u_+)$  と衝撃波  $S = S(u_-, u_+)$  である。

$u_- < u_+$  のときは、(4) のエントロピー解は連続で区分的に滑らかな膨張波

$$u(t, x) = \begin{cases} u_- & (x - a < f'(u_-)t) \\ v\left(\frac{x-a}{t}\right) & (f'(u_-)t \leq x - a < f'(u_+)t) \\ u_+ & (f'(u_+)t \leq x - a) \end{cases} \quad (5)$$

となる。ここで、 $v = v(\xi)$  は、

$$v(\xi) = (f')^{-1}(\xi) \quad (6)$$

であり、 $f''(u) > 0$  より  $f'$  は単調増加なので、 $v(\xi)$  は一価関数となる。この解 (5) を  $R(u_-, u_+; a)$  と書くことにする (図 1 左)。

$u_- > u_+$  のときは、不連続が直線的に進行する衝撃波

$$u(t, x) = \begin{cases} u_- & (x - a < st) \\ u_+ & (st < x - a) \end{cases} \quad (7)$$

となる。ここで、衝撃波速度  $s$  は、Rankine-Hugoniot 条件

$$s = \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+} \quad (8)$$

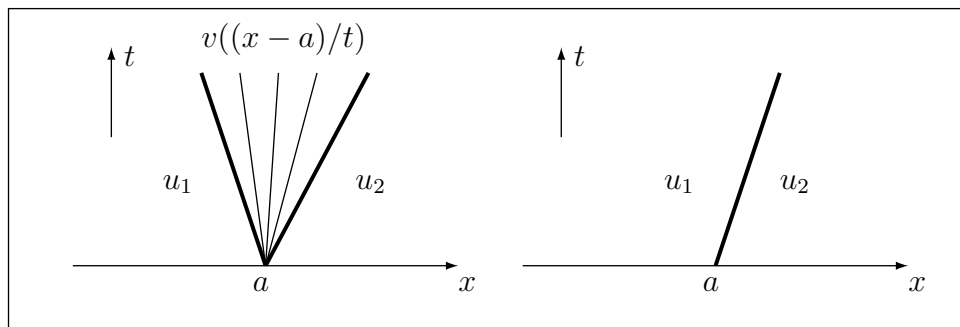


図 1: 膨張波  $R(u_1, u_2; a)$  と衝撃波  $S(u_1, u_2; 0, a)$

から決定する (図 1 右)。なお、膨張波は (5) を  $t$  方向に移動したものは Oleinik 条件を満たさないため現れないが、衝撃波は (7) を  $t$  方向に移動したもの

$$u(t, x) = \begin{cases} u_- & (x - a < s(t - t_0)) \\ u_+ & (s(t - t_0) < x - a) \end{cases} \quad (t > t_0) \quad (9)$$

も出てくるので、これを  $S(u_-, u_+; t_0, a)$  と書くことにする。

また、一般にエントロピー解  $u(t, x)$  がある曲線  $x = \sigma(t)$  に沿って第一種不連続である場合は、Rankine-Hugoniot 条件

$$f(u(t, \sigma(t) - 0)) - f(u(t, \sigma(t) + 0)) = \sigma'(t)(u(t, \sigma(t) - 0) - u(t, \sigma(t) + 0)) \quad (10)$$

と、Lax 条件

$$f'(u(t, \sigma(t) - 0)) > \sigma'(t) > f'(u(t, \sigma(t) + 0)) \quad (11)$$

を満たす必要がある。これにより、不連続箇所では必ずジャンプダウン  $u(t, \sigma(t) - 0) > u(t, \sigma(t) + 0)$  でなければいけないことになる。(8) はこの条件を満たしているし、逆に (8) がこの条件を満たすのが  $u_- > u_+$  のとき、ということになっている。

なお、非粘性バーガス方程式と呼ばれる  $f(u) = u^2/2$  の場合には、膨張波の  $v$  は  $v(\xi) = \xi$  で、衝撃波速度 (8) は、

$$s = \frac{u_- + u_+}{2}$$

となる。

(5) の膨張波と (9) の衝撃波を合わせて**単純波**と呼ぶが、後で (10) と (11) を満たす、直線的ではない不連続性も現れる。そのような不連続性も本稿では衝撃波と呼ぶことにする。

### 3 単純波の相互作用

次に、2つの単純波の相互作用を考える。すなわち、初期値

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1 & (x < a) \\ u_2 & (a < x < b) \\ u_3 & (b < x) \end{cases} \quad (u_1, u_2, u_3 : \text{定数}) \quad (12)$$

に対するエントロピー解を考える。まず本節では、膨張波同士、衝撃波同士の相互作用を考える。

#### 1. $u_1 < u_2 < u_3$ の場合

この場合は、 $x = a, x = b$  から2つの膨張波  $R_1 = R(u_1, u_2; a)$ ,  $R_2 = R(u_2, u_3; b)$  が発生するが、 $R_1$  の右端の速度と  $R_2$  の左端の速度がどちらも  $f'(u_2)$  のため、両者は平行で  $u = u_2$  の部分の幅は変わらずに進んでいく (図 2 左)。

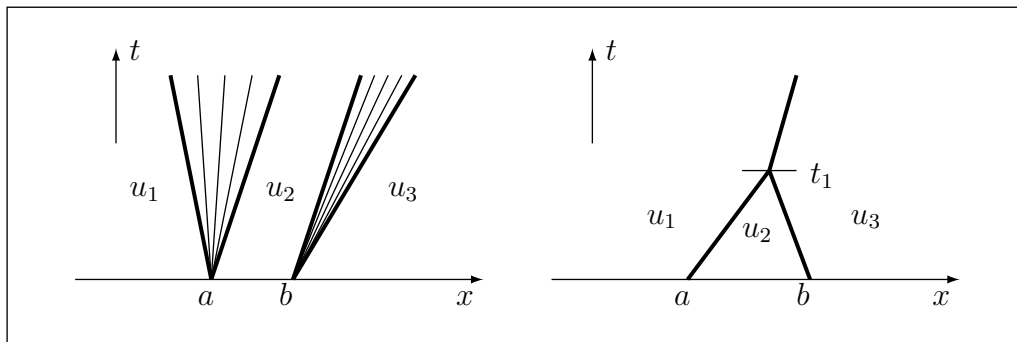


図 2: 膨張波-膨張波と衝撃波-衝撃波

#### 2. $u_1 > u_2 > u_3$ の場合

この場合は、 $x = a, x = b$  から2つの衝撃波  $S(u_1, u_2; 0, a)$ ,  $S(u_2, u_3; 0, b)$  が発生し、その進行速度は、それぞれ

$$s_1 = \frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2}, \quad s_2 = \frac{f(u_2) - f(u_3)}{u_2 - u_3}$$

であるが、Lax 条件 (11) から

$$s_1 > f'(u_2) > s_2$$

なので衝撃波の不連続線  $x = a + s_1 t$ ,  $x = b + s_2 t$  はある場所  $(t_1, x_1)$  で衝突し、その後 1 つの衝撃波  $S(u_1, u_3; t_1, x_1)$  となって進む (図 2 右)。すなわちこの場合エントロピー解は、 $t < t_1$  では

$$u(t, x) = \begin{cases} u_1 & (x < a + s_1 t) \\ u_2 & (a + s_1 t < x < b + s_2 t) \\ u_3 & (b + s_2 t < x) \end{cases}$$

$t > t_1$  では

$$u(t, x) = \begin{cases} u_1 & (x - x_1 < s_3(t - t_1)) \\ u_3 & (s_3(t - t_1) < x - x_1) \end{cases}$$

となる。

## 4 膨張波と衝撃波の衝突

本節では、 $u_1 > u_2 < u_3$  の、 $a$  から出る衝撃波と  $b$  から出る膨張波が衝突するとき、および  $u_1 < u_2 > u_3$  の、 $a$  から出る膨張波と  $b$  から出る衝撃波が衝突するときを考える。まずは前者から。

$S_1 = S(u_1, u_2; 0, a)$ ,  $R_2 = R(u_2, u_3, b)$  とする。 $S_1$  の速度

$$s_1 = \frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2} \quad (13)$$

は、 $R_2$  の左端の速度  $f'(u_2)$  とは、Lax 条件により

$$s_1 > f'(u_2)$$

なので、これらは確かに衝突する (図 3 左)。

その衝突点を  $(T_1, X_1)$  とすると、

$$X_1 - a = s_1 T_1, \quad X_1 - b = f'(u_2) T_1 \quad (14)$$

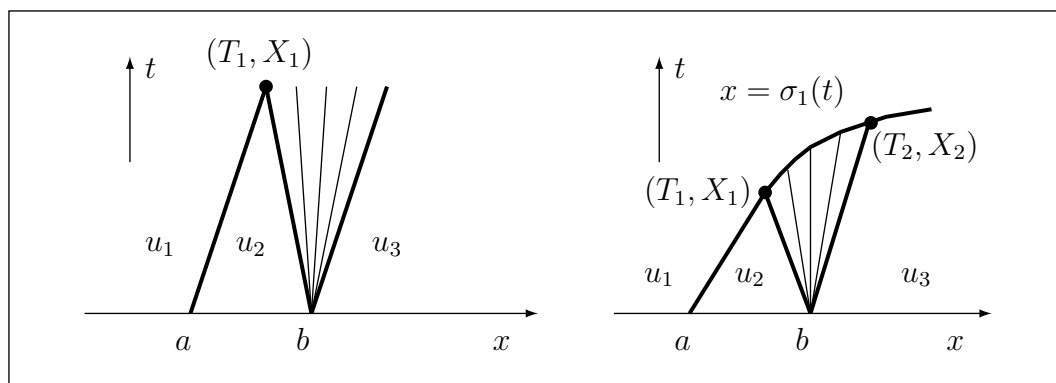


図 3: 衝撃波-膨張波

より、

$$T_1 = \frac{b-a}{s_1 - f'(u_2)}, \quad X_1 = b + \frac{(b-a)f'(u_2)}{s_1 - f'(u_2)} = a + \frac{(b-a)s_1}{s_1 - f'(u_2)} \quad (15)$$

となる。

衝突の先では、 $X_1$  の右側では、 $u$  の値は  $R_2$  に沿って連続的に増え、 $X_1$  の左では  $u_1$  のままなので、 $u_1$  の方が右の値より大きい間は衝撃波が続くことになり、すなわち、 $R_2$  を  $S_1$  につながる曲線の衝撃波  $x = \sigma_1(t)$  が切断する形で進んでいくことになる (図 3 右)。

この  $\sigma_1(t)$  を求める。 $\sigma_1(t)$  は Rankine-Hugoniot 条件 (10) を満たす必要があり、左側の値は  $u(t, \sigma_1(t) - 0) = u_1$ 、右側の値は (5) より、

$$u(t, \sigma_1(t) + 0) = v \left( \frac{\sigma_1(t) - b}{t} \right)$$

となるので、 $\sigma_1(t)$  は、

$$\sigma_1' = \frac{f(u_1) - f(v((\sigma_1 - b)/t))}{u_1 - v((\sigma_1 - b)/t)}, \quad \sigma_1(T_1) = X_1 \quad (16)$$

という微分方程式の解となる。これを解くために、 $x = \sigma_1(t)$  に沿った  $R_2$  の  $u$  の値を

$$\beta(t) = v \left( \frac{\sigma_1(t) - b}{t} \right) \quad (17)$$

とすると、(6) より

$$\frac{\sigma_1(t) - b}{t} = f'(\beta), \quad \sigma_1(t) = b + f'(\beta)t \quad (18)$$

となるので、これを微分すると

$$\sigma_1'(t) = f''(\beta)\beta't + f'(\beta)$$

となるので、(16) を  $\beta$  の方程式にすると、

$$f''(\beta)\beta't + f'(\beta) = \frac{f(u_1) - f(\beta)}{u_1 - \beta}, \quad \beta(T_1) = u_2 \quad (19)$$

となる。今、

$$G(u) = G(u; u_0) = f'(u)(u - u_0) - (f(u) - f(u_0)) \quad (20)$$

とすると、

$$G'(u) = f''(u)(u - u_0) \quad (21)$$

であり、これにより (19) は、

$$G'(\beta; u_1)\beta't + G(\beta; u_1) = 0$$

と書ける。よって、これを解くと、

$$\frac{G'(\beta; u_1)\beta'}{G(\beta; u_1)} = -\frac{1}{t}, \quad G(\beta; u_1) = \frac{C}{t}$$

となり、 $\beta(T_1) = u_2$ , (13), (15) より

$$\begin{aligned} \frac{C}{T_1} &= G(u_2; u_1) = f'(u_2)(u_2 - u_1) - (f(u_2) - f(u_1)) \\ &= (f'(u_2) - s_1)(u_2 - u_1) = \frac{(u_1 - u_2)(b - a)}{T_1} \end{aligned}$$

となるので、 $C = (u_1 - u_2)(b - a)$  となり、よって、(19) の解は、

$$G(\beta; u_1) = \frac{(u_1 - u_2)(b - a)}{t} \quad (22)$$

となる。

ここで、 $f''(u) > 0$  なので、(21) より  $G(u; u_0)$  は  $u = u_0$  では  $G(u_0; u_0) = 0$ 、 $u \geq u_0$  では増加、 $u \leq u_0$  では減少なので、

$$G(u; u_0) = p$$

という方程式は、 $p > 0$  に対して  $u = H_{\pm}(p; u_0)$  という解を持ち、

$$H_-(p; u_0) < u_0 < H_+(p; u_0) \quad (p > 0) \quad (23)$$

となる。これが  $G(u)$  の 2 つの逆関数で、 $H_-(p; u_0)$  は  $p$  に関する減少関数、 $H_+(p; u_0)$  は増加関数となる。

例えば、 $f(u) = u^2/2$  の場合は、

$$G(u; u_0) = u(u - u_0) - \left( \frac{u^2}{2} - \frac{u_0^2}{2} \right) = \frac{(u - u_0)^2}{2}$$

より、 $G(u; u_0) = p$  の解は、

$$u = H_{\pm}(p; u_0) = u_0 \pm \sqrt{2p}$$

となる。

この  $H_{\pm}$  を用いれば、 $\beta(T_1) = u_2 < u_1$  より (22) は

$$\beta(t) = H_- \left( \frac{(u_1 - u_2)(b - a)}{t}; u_1 \right)$$

と解け、よって  $\beta(t)$  は増加関数で、 $\beta(T_1) = u_2$ 、 $\beta(\infty) = H_-(0; u_1) = u_1$  となる。よって、(18) より、 $\sigma_1(t)$  は

$$\sigma_1(t) = b + tf' \left( H_- \left( \frac{(u_1 - u_2)(b - a)}{t}; u_1 \right) \right) \quad (24)$$



となる。

例えば  $f(u) = u^2/2$  の場合は、

$$\sigma_1(t) = b + t \left( u_1 - \sqrt{\frac{2(u_1 - u_2)(b - a)}{t}} \right) = b + u_1 t - \sqrt{2(u_1 - u_2)(b - a)t}$$

となる。

$\beta(t)$  は  $t = T_1$  から  $t = \infty$  に対し  $u_2$  から  $u_1$  まで増加し、(16) より

$$\sigma_1' = \frac{f(u_1) - f(\beta(t))}{u_1 - \beta(t)}$$

および  $f''(u) > 0$  なので、 $\sigma_1'(t)$  も増加し、 $\sigma_1'(T_1) = s_1$  から  $f'(u_1)$  まで変化する。

よって、 $u_3 \geq u_1$  ならば  $x = \sigma_1(t)$  は  $R_2$  と交差しながら無限に伸びるが、 $u_2 < u_3 < u_1$  ならば  $(T_2, X_2)$  で止まり、そこで  $\beta(T_2) = u_3$  となり、 $t > T_2$  では衝撃波  $S(u_1, u_3; T_2, X_2)$  が  $x = \sigma_1(t)$  につながって続くことになる (図 3 右)。この  $(T_2, X_2)$  は以下を満たす。

$$X_2 = \sigma_1(T_2), \quad X_2 = b + f'(u_3)T_2$$

次に、 $u_1 < u_2 > u_3$  で膨張波と衝撃波の並びが逆の場合を考える。この場合は、上と丁度対称な形で解が作られる。単純波は  $R_1 = R(u_1, u_2, a)$   $S_2 = S(u_2, u_3; 0, b)$ 、 $S_2$  の速度は

$$s_3 = \frac{f(u_2) - f(u_3)}{u_2 - u_3} < f'(u_2) \quad (25)$$

で、 $R_1$  の右端と  $S_2$  との衝突点  $(T_3, X_3)$  は、

$$X_3 = b + s_3 T_3, \quad X_3 = a + f'(u_2) T_3, \quad T_3 = \frac{b - a}{f'(u_2) - s_3}$$

となる。 $(T_3, X_3)$  から出る曲線衝撃波  $x = \sigma_2(t)$  は、

$$\gamma(t) = v \left( \frac{\sigma_2(t) - a}{t} \right), \quad \sigma_2(t) = a + f'(\gamma)t, \quad \gamma(T_3) = u_2$$

に対して

$$\sigma_2'(t) = \frac{f(\gamma(t)) - f(u_3)}{\gamma(t) - u_3} = f''(\gamma)\gamma't + f'(\gamma)$$

より、

$$G'(\gamma; u_3)\gamma't + G(\gamma, u_3) = 0$$

となって

$$G(\gamma; u_3) = \frac{C}{t}, \quad C_3 = (b-a)(u_2 - u_3), \quad \gamma(t) \geq u_3$$

より、

$$\gamma(t) = H_+ \left( \frac{(b-a)(u_2 - u_3)}{t}; u_3 \right), \quad \sigma_2(t) = a + tf' \left( H_+ \left( \frac{(b-a)(u_2 - u_3)}{t}; u_3 \right) \right)$$

となる。 $\gamma$  は  $\gamma(T_3) = u_2$ ,  $\gamma(\infty) = u_3$  の減少関数、 $\sigma_2'(t)$  も  $\sigma_2'(T_3) = s_3$ ,  $\sigma_2'(\infty) = f'(u_3)$  の減少関数となる。

$u_1 < u_3 < u_2$  なら  $x = \sigma_2(t)$  は無限に伸び、 $u_3 < u_1 < u_2$  なら  $x = \sigma_2(t)$  はある場所  $(T_4, X_4)$  で止まり、 $t > T_4$  では  $S(u_1 : u_3; T_4, X_4)$  が  $\sigma_2(t)$  につながる解となる。

## 5 1 単位分の解

前節の結果を用いて、有界変動でない初期値に対する解の例を構成する、1 単位分の解を作る。それは、初期値

$$u_0(x) = \bar{u}_0(x; \delta, A, H) = \begin{cases} A + H & (x < -\delta) \\ A & (-\delta < x < 0) \\ A + H & (0 < x < \delta) \\ A & (\delta < x) \end{cases} \quad (26)$$

に対するエントロピー解  $u = u(t, x; \delta, A, H)$  である。ここで、 $\delta > 0$ ,  $H > 0$  であり、 $[A, A + H]$  は  $f$  の定義域に含まれるとする。

小さい  $t > 0$  では、初期値から  $S_1 = S(A + H, A; 0, -\delta)$ ,  $R_2 = R(A, A + H; 0)$ ,  $S_3 = S(A + H, A; 0, \delta)$  が生成し、それらが先の  $t$  で衝突して大域的なエントロピー解が構成されることになる。

左側では  $S_1$  と  $R_2$  が  $(T_1, X_1)$  で衝突して  $x = \sigma_1(t)$  の曲線衝撃波  $S_4$  が発生し、右側では  $R_2$  と  $S_3$  が  $(T_2, X_2)$  で衝突して  $x = \sigma_2(t)$  の曲線衝撃波  $S_5$  が発生し、そして  $x = \sigma_1(t)$  と  $x = \sigma_2(t)$  が  $(T_3, X_3)$  で衝突し、そこから  $S_6 = S(A + H, A; T_3, X_3)$  の衝撃波が発生する (図 4)。

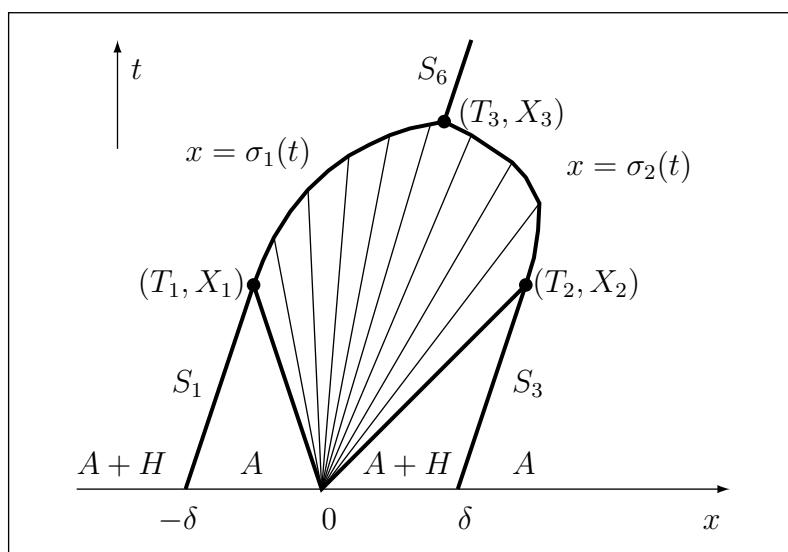


図 4: 一単位分の解

$S_1, S_3, S_6$  は、左右の  $u$  がいずれも  $A + H, A$  なので、同じ速度の衝撃波であることに注意する。

## 6 初期値が局所的に有界変動でないエントロピー解

前節で構成した 1 単位分の解を用いて、初期値が局所的に有界変動でないエントロピー解の例を構成する。

まず、保存則方程式 (1) のエントロピー解  $u(t, x)$  を、 $x$  方向に平行移動したもの  $u(t, x - a)$ , および  $t, x$  方向に同率に拡大縮小したもの  $u(\mu t, \mu x)$  ( $\mu > 0$ ) もエントロピー解となることに注意する。

前節の 1 単位分のエントロピー解を  $u_1(t, x)$  とする。それを縮小して平行移動したもの

$$v_2(t, x) = u_1\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x-p}{\lambda}\right) \quad (0 < \lambda < 1)$$

を作り、 $\lambda$  を十分小さくとり  $p$  を適当に選ぶことで、 $v_2$  の  $S_6$  部分が丁度  $u_1$  の  $S_3$  部分につながり、かつ  $v_2$  の  $\sigma_1$  部分と  $u_1$  の  $R_2$  部分が干渉しないようにする (図 5)。

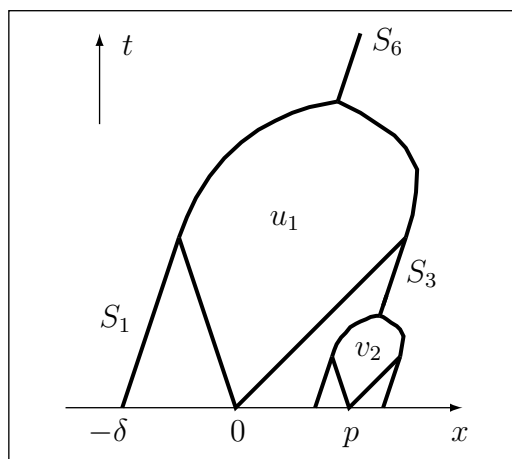


図 5:  $u_1$  と  $v_2$  ( $u_2$ )

そして、この  $u_1$  の  $S_3$  部分の  $v_2$  と重なる部分 ( $0 < t < \lambda T_3$  の範囲) を  $v_2$  で置き換えたエントロピー解を  $u_2(t, x)$  とする。

さらに、 $u_1(t, x)$  を  $(t, x)$  方向に  $\lambda^2$  倍し、 $p + \lambda p$  だけ平行移動したもの

$$v_3(t, x) = u_1\left(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x-p-\lambda p}{\lambda^2}\right) = v_2\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x-p}{\lambda}\right)$$

を作ると、その  $S_6$  部分が  $v_2(t, x)$  の  $S_3$  部分につながる。そのつなげたものを  $u_3(t, x)$  とする。

なお、この  $u_3(t, x)$  は、 $u_1$  に、 $u_2$  の  $\lambda$  倍と  $p$  の平行移動

$$u_2\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x-p}{\lambda}\right)$$

を重ねたもの、と見ることもできる。

以下同様にして、

$$v_n(t, x) = v_{n-1} \left( \frac{t}{\lambda}, \frac{x-p}{\lambda} \right)$$

として、 $u_{n-1}$  に  $v_n$  をつなげたものを  $u_n(t, x)$  とする。

そして  $u_n(t, x)$  のほとんどいたるところの収束極限を  $u_\infty(t, x)$  とする。

$$u_\infty(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t, x) \quad (\text{a.e.})$$

$u_n(t, x)$  同様、 $u_\infty(t, x)$  が、その  $t = 0$  での値を初期値とするエントロピー解であることは、 $|u_n(t, x)| \leq |A| + |H|$  であることと、ほとんどいたるところの収束極限であることから容易に示すことができる。

また、 $v_1 = u_1$  と見て、 $v_k(t, x)$  の  $S_1$  の始点の  $x$  座標を  $\delta_k^-$ 、 $R_2$  の始点の  $x$  座標を  $p_k$ 、 $S_6$  の始点の  $t$  座標を  $\bar{t}_k$  とすると、 $\delta_1^- = -\delta$ 、 $p_1 = 0$ 、 $\bar{t}_1 = T_3$  で、

$$\delta_{k+1}^- = p + \lambda \delta_k^-, \quad p_{k+1} = p + \lambda p_k, \quad \bar{t}_{k+1} = \lambda \bar{t}_k$$

を満たし、よって、

$$\delta_1^- < p_1 < \delta_2^- < p_2 < \delta_3^- < p_3 < \cdots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k^- = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \frac{p}{1-\lambda}, \quad \bar{t}_k = \lambda^{k-1} T_3$$

となる。

$u_\infty$  の初期値  $u_\infty(0, x)$  は、この  $\delta_k^-$ 、 $p_k$  で段差を持つ階段関数で、 $\delta_k^- < x < p_k$  では  $A$ 、 $p_k < x < \delta_{k+1}^-$  では  $A + H$  となっている。よって、 $u_\infty(0, x)$  は  $x = p/(1-\lambda)$  の近くで有界変動ではなく、その変動は局所的に  $\infty$  となる。

次に  $t = t_0 > 0$  での  $u_\infty(t_0, x)$  の全変動  $TVu_\infty(t_0, x)$  を考えてみる。 $t_0 \geq T_3$  ならば変動は  $u_1$  の  $S_6$  の段差だけになるので、 $TVu_\infty(t_0, x) = H$  である。

$0 < t_0 < T_3$  の場合は、 $\bar{t}_k = \lambda^{k-1} T_3 \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) なので、 $t_0$  以上の  $\bar{t}_k$  は有限個で、そのような最大の  $k$  を  $k = m$  とすると、 $k > m$  に対する  $v_k(t, x)$  はすべて  $0 < t < t_0$  の範囲に含まれ  $t = t_0$  とは交差しないので、よって  $u_\infty(t_0, x) = u_m(t_0, x)$  となり、 $TVu_\infty(t_0, x) = TVu_m(t_0, x) < \infty$  となる。

より詳しく評価すると、 $u_m$  の  $v_1$  から  $v_{m-1}$  部分の変動は、 $S_1$  部分と  $R_2$  部分の変動に等しいので最大でそれぞれ  $2H$ 、 $v_m$  部分の変動は  $S_3$  部分の変動も追加されるので、最大で  $3H$ 、よって

$$TVu_\infty(t_0, x) = TVu_m(t_0, x) \leq 3H + 2H(m-1)$$

となる。この  $m$  は、 $\bar{t}_m \geq t_0 > \bar{t}_{m+1}$  によって決まり、よって  $\lambda^{m-1}T_3 \geq t_0 > \lambda^m T_3$  より、

$$m - 1 \leq \log_\lambda \left( \frac{t_0}{T_3} \right) < m$$

となる。よって、

$$TVu_\infty(t_0, x) \leq 3H + 2H \log_\lambda \left( \frac{t_0}{T_3} \right)$$

と評価される。

## 7 最後に

本稿では、初期値が有界変動ではないが、その解が  $t > 0$  で  $x$  に関して有界変動となるような例を紹介したが、1 節でも述べたように、単独保存則では一般に  $L^\infty(\mathbf{R})$  の初期値に対して、それが有界変動でなくても、エントロピー解は  $t > 0$  で  $x$  に関して局所的に有界変動となることが示される。

連立方程式の保存則方程式系でも、同様のことが成立すると予想されているが、多分まだちゃんと示されていないように思う。Temple クラスの保存則方程式系なら、本稿に書いたような初等的な例を構成することができるかもしれないが、それも可能かどうかは正確にはわからない。Temple クラスと限らない場合は、単純波の相互作用が複雑になるので、本稿のような例を構成するのはかなり難しいと思われる。もちろん、いずれの場合も一般に  $t > 0$  で有界変動となることの証明はかなり難しいだろう。

## 参考文献

- [1] O.A.Oleinik, Discontinuous solutions of non-linear differential equations, Uspekhi Mat.Nauk **12**, 3-73 (1957)
- [2] J.Smoller, “Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations”, (1983), Springer.