2020 年 06 月 03 日

波面追跡法ノート (Bressan 本による)

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

本稿では、双曲型保存則方程式の初期値問題の弱解の存在定理の証明法の一つである、波面追跡法について解説する。

以前、その問題の解の別の存在証明法である Glimm 差分法と、補完測度法 (補償コンパクト法) の入門を書いたが ([13], [14], [15])、この波面追跡法を合わせればほぼ代表的な存在証明法の 3 つが出揃うことになる。

波面追跡法の解の構成法にはいくつかの流儀があるようだが、本稿ではその分野の世界的権威による代表的な解説書である [1] (Bressan) に沿って解説を行う。

なお当初は、[13], [14] のように自己完結する形の解説を書こうと思ったのだが、[1] が比較的わかりやすく、過不足なくとても良く書かれていて、追加や行間を補足するところが少なく、自己完結的に書くとほぼ [1] の翻訳になりかねないので、それはあきらめ、[1] を持っている人を対象に、それを読み進める際の補足や、分かりにくい部分の解説だけを行うことにした。よって [1] が前提となっていて、本稿はそれがないと読めない形式であることを了解して頂きたい。

また、[13], [14] では、説明の仕方を複数の論文等から取り入れているのだが、上記の理由から本稿ではそれができず、あくまで [1] に関する説明を行っているので、逆に無理をしている部分、ややこしい部分もあるかもしれない。

なお、本稿のようなものは、[1] に正面から取り組もうとする大学院生などには、むしろその勉強に邪魔や迷惑となるかもしれないが、[1] が波面追跡法入門の一つの定番である以上、その難点を共有することはそれなりに意味があるのではないかと考えている。それについてもお許し頂きたい。

2 記号と用語の使い方

2.1 はじめに

本節では、[1] の記号の使い方で気になるところと、7.2 節後半 (p129-133) に書かれている波面追跡法 (wave front tracking method) の近似解の構成に関する曖昧さ、特に「front」という用語の使い方に関する話を中心にまとめておく。

2.2 記号の使い方

まず、[1] の記号の使い方に関して、気になる点を 2 つあげておく。

その 1 つ目は「λ_j」である。通常、保存則の論文等では「λ_j」は、$\nabla f(u)$ の j 番目の固有値 $\lambda_j(u)$ としてしか使われないが、この [1] では以下の 3 種類の意味で使用されている。

- $\nabla f(u)$ の固有値 $\lambda_j(u)$ (p90: n 変数 u の実数値関数)
- j-衝撃波 (または接触不連続) 速度 $\lambda_j(u^-, u^+)$ (p124: u^-, u^+ で決まるが、u^+ の取り得る値は u^- によって決まる 1 次元曲線上なので、u^-, u^+ の $2n$ 変数関数ではない。通常は s_j と書かれる)
- 同じく j-衝撃波 (または接触不連続) 速度 $\lambda_j(\sigma)$ (p93: 一つの 1 次元パラメータ σ の 1 変数実数値関数)

例えば、[1] p96 には、

$$\lambda_i(u_0) = \lambda_i(\sigma) = \lambda_i(R_i(\sigma)(u_0)) = \lambda_i(S_i(\sigma))$$

などという式が出てくるが、この最初の「$\lambda_i(u_0)$」は固有値、次の「$\lambda_i(\sigma)$」は上の 3 つ目のもの、後ろの 2 つはまた固有値、となっていて、同じ λ_i という記号が、一つの式の中で 2 つの意味で使われていることになる。このような例が、p93, p96 下などにも見られるし、7 章でも p124 などに見られる。

これは、[1] の筆者には便利なのかもしれないが、読者にはあまりわかりやすいものではなく、λ_j を見るたびにそれがどの意味かを確認しなければいけない。本来は、2 つ目は s_j, 3 つ目もそれを使うのであれば別の記号 (例えば $\hat{s}_j$) を使うべきだろうと思う。

もうひとつ [1] の 2 つ目の気になる記号として、固有ベクトルの「$r_j(u)$」がある。これは、「記号を変えずに意味だけ書き換える」ことがされているのであるが、Bressan は自著、論文でよく同様のことを行っているようである (そして、そのために当初の目標と結果がずれてしまっている論文もある)。

固有ベクトルは、5 章 (p90) の定義 5.1 で定義されていて、ここでは固有ベクトル $r_j(u)$ は単位ベクトルとして定義されている。固有ベクトルの向きは、真性非線形の場合は (5.5) (p91) のように取るとして、これで真性非線形の特性方向の固有ベクトルは一つに決まることになる。なお、線形退化の場合は $r_j(u)$ の向きは決定せず、2 通りがありうる。

ところが、5.2 節 (p98) で、真性非線形の場合は

「$r_j \bullet \lambda_j = 1$ と正規化できる」

として、j 固有ベクトルを同じ記号のまま、単位ベクトルであることを捨てて上の条件を満たすものに書き換えているのであるが、これは混乱を生みかねないと思う。むしろ本来は

$$\hat{r}_j = \frac{r_j}{r_j \bullet \lambda_j}$$

のよう正規化した固有ベクトルを別な記号で書くべきで、そうでないと、特に飛び飛びに読むような読者にとって、今見ている固有ベクトルが単位ベクトルなのか、正規化した別のベクトルなのかがわかりにくくなる。しかも、r_j の単位ベクトルの定義の方は (5.4) とちゃんと式番号が振られているのであるが、その後の正規化の式には式番号が振られておらず文章中に埋もれているため、あまり探しやすくもない。そのため、より混乱が起きやすくなっているように感じる。

また、当然線形退化の特性方向の場合は $r_j \bullet \lambda_j = 0$ だからこのような正規化はできず、その場合 r_j は単位ベクトルのままである。その意味でも、本来はちゃんと記号を書き分けるべきであろうと思う。

なお、波面追跡法の本論の 7 章では固有ベクトル r_j はほとんど出てこないので、その点ではこれに関する実害はほとんどない。

2.3 「wave front」

次に、「wave front」(波面) という用語であるが、[1] はこの用語にも不明瞭さがあるように思う。

[1] では、wave front, shock front, rarefaction front, non-phisical front といった用語が p125 の Definition 7.1 あたりから出てくるが、その「front」という用語の明確な定義がなく、「wave」(shock wave 等) とほぼ同様の意味で使っているように思える。

ただし、[1] による近似解では微小な速度の変更を行うことがあるので、厳密な意味では各不連続波はいわゆる「shock wave」(衝撃波) ではないし、「rarefaction wave」(膨張波) ではない。その意味で近似解の方の不連続波を「front」を呼んでいるのかもしれないが、それも明確ではない。

また、[1] の場合 p132 の近似解の作り方により、1 本の wave front は、他の front との相互作用で丁度その大きさが 0 になって消えてしまうまでは「t の増加方向に一意的に延長可能である」とあり (p132)、そしてそのように延長したものを「wave front」と呼んでいるように読める箇所もある。

一方、[5] では明確に front を定義していて (p210)、「wave」と「front」の区別もつけている。ただ、[5] の作り方では一意的に延長することは不可能なので、[1] のような呼び方はしておらず、[1] の用語を知るための参考にはならない。

よって、本稿では、とりあえず次のような使い分けを行っておく。

- **wave, 波**: Riemann 問題の弱解を構成する衝撃波解 (shock wave)、膨張波解 (rarefaction wave)、接触不連続波解 (contact discontinuity) のそれぞれを表す
- **front**: 波面追跡法の近似解に現れる個々の不連続線分
- **分解 front**: 膨張波を近似するために作られた front
- **XX front**: その他、弱解の各波を近似する front、あるいは波自身からなる front (XX = 物理、非物理、膨張、衝撃等)
- **front 接続**: front の衝突時刻で、特性族 (characteristic family) を変更せずに時刻の進む方向に front を接続して作った折れ線 (一意的に最大延長したもの)

wave と front の使い分けは、どちらかと言えば [5] に近い形である。また、front 接続の一意的な延長可能性については 2.4 節を参照のこと。

なお、[5] では、

> 「front とは一つのオブジェクトであり、L, R とラベル付けされる左右の定数状態、および特性族を持つ」

とあるが、本稿では、個々の front は、

左右の定数状態、特性族、位置 (線分の方程式と出発点、終了点)、大きさ、
および移動速度を持つオブジェクト

と考えることにする。当然、wave も同様の属性値を持つオブジェクトとなる。なお、上記の属性値はすべてが独立というわけではなく、例えば物理 front であれば、特性族と大きさと左の定数状態から右の定数状態は決定するし、移動速度は、若干の変更がありうるものの、左右の定数状態と特性族と大きさからある程度の値は決定する。また、出発点は必ず存在するが、終了点は無限の先になる場合もあり得る。

[1] は、個々の front を記号づけすることはしておらず、数式では主にその大きさのみを σ の記号で表現するのみである。p138 以降では、個々の front (接続) に α という添字をつけ、その front (接続) の大きさを $\sigma_\alpha(t)$ のように呼ぶ工夫はしているが、直接 front (接続) を指す記号は導入していない。一方 [5] は、通常は大きさを表す γ のようなものも front と呼んでいて、これは逆に γ をオブジェクトとしての front を表す名称と見れば、それが文脈によりその属性値である大きさも意味することもある、と見ることもできる。

これは、例えば線分というオブジェクトを意味する AB という記号が、「AB=3」のように文脈によりその長さという属性値を意味することがあるのと同様の使い方であり、よって本稿でもそのように使うことにして、σ をオブジェクトとしての front を指す記号とし、文脈によりその σ を大きさを意味するスカラー値と見たり、後で導入する $Aw(\sigma)$ のように、σ をオブジェクトとしての front 自身を意味することもある、とする。

2.4 膨張波の一本化と front の延長可能性

次は、その front の一意的な延長可能性について考えてみる。

そのために、[1] では p132 で、accurate method と simplified method をいつ使うか、そしてさらに accurate method による解の作り方を修正する (P) という要請を追加している。

- (A) accurate method は、「$t = 0$ の場合」、および「物理 front 同士の衝突でかつその流入 front の大きさの積が $|\sigma\sigma'| \geq \rho$ のとき」に使用する
- (S) simplified method は、「非物理 front と物理 front の衝突のとき」、および「物理 front 同士の衝突でかつその流入 front の大きさの積が $|\sigma\sigma'| < \rho$ のとき」に使用する
- (P) accurate method では、Riemann 問題の解の波のうち、流入 front と同じ特性族 (i, j) の膨張波については、その大きさが δ より大きくても複数の front に

は分解せず 1 本の front にする

通常は、accurate method では、膨張波は大きさが最大 δ になるように複数の front に分解することになっているので、要請 (P) により δ より大きい膨張 front が出る可能性がでてくる。

そして、この構成法により、p132 と、少し後の話になるが p138 の 7.3 節の 4. で次のことが言えると述べている。

1. すべての front は、他の front とぶつかって大きさが 0 になってしまわない限り、t の増加方向に一意的に延長可能である (p132 (P) のすぐ下)
2. 新しい物理 front は、accurate method でしか生成されない (p138)
3. accurate method は $|\sigma\sigma'| \geq \rho$ でしか使わないから、(7.57) の評価からすると有限回しか実施しない (p138)
4. 上の 2., 3. より物理 front 接続の個数は有限個である (p138)
5. 新たな非物理 front は、simplified method の物理 front 同士の衝突でしか生成されない (p138)
6. 2 つの物理 front 接続同士の衝突は、高々 1 回しか起こらない (p138)
7. 上の 5., 6. より、非物理 front 接続の個数も有限個である (p138)

この、2., 3., 4., 5. は特に問題ないと思うが、1. と 6. は自明ではないと感じる。それについて以下で説明する。

まず 1. であるが、accurate method では、要請 (P) により流入波と同じ front は確かに一意的に伸びることになる。一方、simplified method では、2 通りの場合 (p131 CASE 1, CASE 2) があり、まず物理 front 同士の衝突の場合は p131 に「(7.25) のように」Riemann 問題の解から近似解を作る、と書いているが、「(7.25) のように」ということは、δ より大きい膨張波が現れればそれは小さい分解 front に分離することを意味する。

しかし、その直後に「(7.27) よりそれは、$j > j'$ の場合は丁度 2 つの front、$j = j'$ の場合は丁度 1 つの front からなる」と述べている。これは、膨張波を小さいものに分解しないことを意味するように読める。下に書かれている図 (Figure 7.7, Figure 7.8) もそれを説明しているように見えなくもない。

「(7.27)」は、膨張波の分解が起こらないことを意味するのではなく、Riemann 問題の解が j と j' の 2 つの特性族の波しか出さないことを意味するので、膨張波を分解しない根拠にはならない。

また、要請 (P) は、「accurate method では」と明確に述べているので、文面上は simplified method には適用されず、これも分解しない根拠にはならない。

よって分解しない必然性があるとすれば、あとはその大きさが δ 以下であることだけであるが、逆に要請 (P) は δ より大きなサイズを持つ膨張 front を作り得ることを述べていて、もしそのような膨張 front が存在すれば、それとサイズの積が ρ 未満になるような小さな衝撃波との衝突が起こすとそれは simplified method で処理され、それにより δ より大きな膨張波が出てしまうことになり、その分解を止めることはできず、結局 1. の一意的な延長はできなくなってしまう。

この状況を防ぐには、以下の (Erf) の評価か、別の要請 (P') のいずれかが必要になる。

- (Erf)　要請 (P) によって作られる膨張 front の大きさが δ を越えることがないことを示す
- (P')　simplified method では、生成される膨張波は、流入 front 同様分解しない (1 本の front のみにする)

[1] を見る限り、(Erf) ではなくどうやら (P') を要請 (仮定) しているようなのであるが、どうもそれが明確ではない。また、7.3 節の 5. (p138) にある通り、(Erf) は実際には無理でもある。よって本稿では、(P') も要請されているとして話を進める。

次は、6. の方であるが、当然物理 front 接続と非物理 front 接続は 1 度しか交わらないし、特性族の異なる物理 front 接続同士も 1 度しか交わらないことはわかる。問題は、同じ特性族の物理 front 接続同士が、2 度以上交わることはないか、という点である。

衝突したときに accurate method が行われるのであれば、(P) によりそれは 1 つの特性族には 1 本の front として合体した形で延長されるので、当然それ以上の衝突は発生しない。一方 simplified method が行われる場合は、「(P') の保証があれば」accurate method 同様 1 つの特性族には 1 本の front になるが、もし (P') の保証がなければ複数の分解 front に分離する可能性がある。

つまり、この 6. に関しても 1. と同様の問題があり、やはり (P') が必要となるので、本稿では (P') を仮定して話をすすめることにする。

なお、その (P), (P') の要請、および後 (3.6 節と 6 節) で述べる速度変化の制限の仮定の元、それを満たす近似解が作れていれば、上の 1.∼7. が確かに成り立ち、よって衝突時刻も有限個となり、大きさに関する a priori 評価さえあれば、近似解は有限の時間内で無限回の衝突を起こすことはなく、無限時刻にまで近似解を伸ばせることがわかる。

3 7.3 節 3. の V と Q の差分評価 (p137)

3.1 はじめに

本節では、[1] の 7.3 節 3. にある、front 同士の衝突点 $t = \tau$ における V, Q の差分評価である (7.55), (7.56) (p137)、および帰納法による (7.60) (p138) の評価について考える。

$$(7.55)\quad V(\tau+) - V(\tau-) = O(1)|\sigma\sigma'|$$
$$(7.56)\quad Q(\tau+) - Q(\tau-) = -|\sigma\sigma'| + O(1)|\sigma\sigma'|V(\tau-)$$

[1] では、(7.55) は (7.33), (7.34) から得られる、とだけ書いており、また (7.56) は (7.31)∼(7.34) から得られると書いて、その下に 10 行程の説明があるが、特にこの (7.56) の方は簡単ではないと感じたので、本節でその詳細な証明を与えておく。

なお、特に $i > j$ の場合の (7.56) の説明用に、p137 に σ_i' と σ_j' の front が $t = \tau$ で衝突して σ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ の front が発生するような図が書いてあり本節でもそのような状況を考えるが、少し記号を変える。左からの i-特性族の front σ_i' の方はそのままとするが、右からの j-特性族の front は σ_j'' と書くことにして、$i = j$ の場合も同じ記号のまま議論できるようにする。

生成する front は σ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ とするが、この添字の k は「k-特性族」を意味はせず単純に左から順番に番号を振ったもので、accurate method の場合の膨張波を分解する前の Riemann 問題の解の波は $\bar{\sigma}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ と書くことにする。この場合、σ_k は、この $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\sigma}_n$ のうち、膨張波を分解 front に分離して作成した front の集まり (の速度を微小に変更したかもしれないもの) となる。この場合、Lemma 7.2 (i),(ii) の評価は、σ_k ではなく、$\bar{\sigma}_k$ に対して成り立つものであることに注意する。

以下、V, Q の評価を、順に衝突点での近似解の作り方に関する場合分けで示すことにするが、そのそれぞれに以下のように名前をつけておくことにする。

- [**A-1**]: accurate method で $i > j$ の場合 (異なる特性族の流入 front の衝突)
- [**A-2**]: accurate method で $i = j$ の場合 (同じ特性族の流入 front の衝突)
- [**S-1**]: simplified method で物理 front の衝突で $i > j$ の場合
- [**S-2**]: simplified method で物理 front の衝突で $i = j$ の場合
- [**S-3**]: simplified method で非物理 front の衝突の場合 $(i = n + 1)$

なお、等式形の (7.55), (7.56) を示すことは難しく (成り立たないかもしれない)、かつそれは必要はなく、実際に必要で示すべきは不等式形の

$$(7.55') \quad V(\tau+) - V(\tau-) \le O(1)|\sigma\sigma'|$$
$$(7.56') \quad Q(\tau+) - Q(\tau-) \le -|\sigma\sigma'| + O(1)|\sigma\sigma'|V(\tau-)$$

であることに注意する。ここで、$A = O(1)B$ は、ある定数 C に対し $-CB \le A \le CB$, すなわち $|A| \le CB$ を意味し、つまり $A \ge -CB$ も必要であるが、$A \le O(1)B$ は $A \le CB$ のみを意味するので、(7.55), (7.56) を示すためには、正確には下からの評価も必要であるが、実際には下からの評価は必要ないし、簡単に示すこともできない。実際、[1] のこの部分に関する原論文である [2] にも 等式形の (7.55), (7.56) ではなく、不等式形の (7.55'), (7.56') の形で書いてある。本稿も、(7.55), (7.56) ではなく、(7.55'), (7.56') を示すことを考える。

3.2 V の評価: accurate method の場合

まずは (7.55') から考える。$V(\tau+)$ と $V(\tau-)$ とは、この σ_k, σ'_i, σ'_j 以外の front は共通なので、

$$V(\tau+) - V(\tau-) = \sum_k |\sigma_k| - |\sigma'_i| - |\sigma''_j| \tag{1}$$

となることがわかる。この評価を、σ'_i, σ''_j の状況で場合分けして考える。まずは、[A-1]、すなわち σ'_i, σ''_j が物理 front (膨張 front, 衝撃 front, 接触不連続 front) で、$i > j$ で、σ_k がその Riemann 問題の解から accurate method (p129-130) で作られた場合を考える。この場合、当然

$$\sum_k |\sigma_k| = \sum_{k=1}^n |\bar{\sigma}_k|$$

であり、要請 (P) により $\bar{\sigma}_i$ と $\bar{\sigma}_j$ は σ_k でも分解されていない。Lemma 7.2 (i) より (1) の右辺は、

$$\begin{aligned}\sum_k |\sigma_k| - |\sigma'_i| - |\sigma''_j| \;&=\; \sum_{k=1}^n |\bar{\sigma}_k| - |\sigma'_i| - |\sigma''_j| \;\le\; |\bar{\sigma}_i - \sigma'_i| + |\bar{\sigma}_j - \sigma''_j| + \sum_{k\ne i,j} |\bar{\sigma}_k| \\ &\le\; C|\sigma'_i\sigma''_j|\end{aligned}$$

となって (7.55) が成り立つことがわかる。

次に、[A-2]、すなわち accurate method で $i = j$ の場合は、Lemma 7.2 (ii) より

$$\sum_k |\sigma_k| - |\sigma'_i| - |\sigma''_j| \;=\; \sum_{k=1}^{n} |\bar{\sigma}_k| - |\sigma'_j| - |\sigma''_j| \;\leq\; |\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j| + \sum_{k\neq j} |\bar{\sigma}_k|$$
$$\leq\; C|\sigma'_j \sigma''_j|$$

となり、やはり (7.55') が成り立つことがわかる。なお、front の大きさ σ は十分小さい状況を考えているので、Lemma 7.2 (ii) の $|\sigma| + |\sigma'|$ の部分は $O(1)$ と見ることができる。

3.3 V の評価: simplified method の場合

今度は、simplified method (p131-132) の形の解を考える。なお、速度 $\hat{\lambda}$ の非物理 front を以後 σ_{np} のように書くことにするが、p125 一番下、あるいは p136 (7.52) にあるように、その大きさは両側の定数解の差の絶対値と定義されていて、各非物理 front 毎に違うものなので、必要があれば σ'_{np}, σ''_{np} などの区別をする。

まずは、[S-1]、すなわち σ'_i, σ''_j が物理 front で $i > j$ の場合 (p131 Figure 7.7)。この場合は、

$$\sum_k |\sigma_k| = |\sigma''_j| + |\sigma'_i| + |\sigma_{np}|$$

となるから、(1) の右辺は $|\sigma_{np}|$ に等しく、よって、Lemma 7.2 (iii) により、

$$|\sigma_{np}| = |u_r - \tilde{u_r}| \leq C|\sigma'_i||\sigma''_j|$$

となり、(7.55') が得られる。

[S-2] の $i = j$ の場合 (p131 Figure 7.8) も、

$$\sum_k |\sigma_k| = |\sigma'_j + \sigma''_j| + |\sigma_{np}| \leq |\sigma'_j| + |\sigma''_j| + |\sigma_{np}|$$

となるので、後は上と同じ形で (7.55') が示される。

最後に、[S-3] の σ'_i が非物理 front σ_{np} である場合は (p131 Figure 7.9)、

$$\sum_k |\sigma_k| = |\sigma''_j| + |\sigma_{np}|$$

となるので、(1) の右辺は $|\sigma_{np}| - |\sigma'_{np}|$ (σ_{np} は $\tau+$ の非物理 front、$\sigma'_{np} = \sigma'_i$ は $\tau-$ の非物理 front) となり、よって Lemma 7.2 (iv) により、(1) の右辺は

$$|\sigma_{np}| - |\sigma'_{np}| = |u_r - \tilde{u}_r| - |u_m - u_l| \leq C|\sigma''_j||u_m - u_l| = C|\sigma''_j||\sigma_{np}| = C|\sigma'_i\sigma''_j|$$

となり、(7.55') が得られる。

これですべての場合に (7.55) が成り立つことが示された。

3.4 Q の評価: 記号

以後の説明のため、front の衝突時刻以外の時刻 t に対して、$F(t)$ を時刻 t に存在する front 全体の集合、$Aw(\sigma) = Aw(\sigma; t)$ を、front σ に approach する σ 以外のすべての front (時刻 t で存在するもの) の集合、$Sw(\sigma) = Sw(\sigma; t)$ を、$Aw(\sigma)$ に属する front の大きさ全体の和とする (いずれも t に依存)。

$$\begin{cases} Aw(\sigma) = Aw(\sigma; t) = \{\sigma' \in X(t);\ \sigma \neq \sigma',\ \sigma \,/\!\backslash\, \sigma'\} \\ Sw(\sigma) = Sw(\sigma; t) = \displaystyle\sum_{\sigma' \in Aw(\sigma;t)} |\sigma'| \end{cases} \tag{2}$$

なお、$Aw(\sigma)$, $Sw(\sigma)$ の σ は、front の大きさではなく、オブジェクトとしての front 自体を意味し、(詳しくは 2.3 節参照)、$\sigma \,/\!\backslash\, \sigma'$ は σ と σ' が approach することを意味するものとする。

また、front に分解する前の膨張波 $\bar{\sigma}$ に対しても $Aw(\bar{\sigma})$, $Sw(\bar{\sigma})$ を用いることがあるが、その意味は自明であろう。σ が膨張波 $\bar{\sigma}$ の分解 front の一つである場合、明らかに $Aw(\sigma) = Aw(\bar{\sigma})$, $Sw(\sigma) = Sw(\bar{\sigma})$ となる。

3.5 Q の評価: [A-1] の場合

(7.56') も (7.55') と同様に場合分けして考える。まずは、[A-1] の場合を考えるが、[1] の p136 にはこの場合の説明のみが書かれているので、それに沿って説明する。

$Q(\tau+)$ と $Q(\tau-)$ で σ_k, σ'_i, σ''_j が含まれない項は当然共通しているため、その差では消えてしまうので、残るのは、

$$Q(\tau+) - Q(\tau-) = \sum_k |\sigma_k| Sw(\sigma_k) - |\sigma'_i| Sw(\sigma'_i) - |\sigma''_j| Sw(\sigma''_j) + |\sigma'_i\sigma''_j| \tag{3}$$

となる。ここで、最後の項の符号が正なのは、その前の 2 つの項の両者に最後の項が含まれているからである ($Aw(\sigma_i') \ni \sigma_j''$, $Aw(\sigma_j'') \ni \sigma_i'$)。

まず、(3) を $\bar{\sigma}_k$ で書き直すと、違いは膨張波とその分解 front の部分だけであり、3.4 節で述べたように膨張波の分解 front に対しては Sw は共通なので、

$$Q(\tau+) - Q(\tau-) = \sum_{k=1}^{n} |\bar{\sigma}_k| Sw(\bar{\sigma}_k) - |\sigma_i'| Sw(\sigma_i') - |\sigma_j''| Sw(\sigma_j'') + |\sigma_i'\sigma_j''| \tag{4}$$

となる。

また、後 (3.10 節) で出てくるが、解の存在定理では $V(t)$ が十分小さい場合のみ考えていて、よって各 front の大きさも十分小さく、例えば Lemma 7.2 (i) の $O(1)$ の部分も、定理で必要な評価ではすべて

$$O(1) \times |\sigma_i'| < 1, \quad O(1) \times |\sigma_j'| < 1 \tag{5}$$

であると仮定してよい。そうすれば、Lemma 7.2 (i) より

$$|\bar{\sigma}_i - \sigma_i'| < |\sigma_i'|, \quad |\bar{\sigma}_j - \sigma_j''| < |\sigma_j''|$$

となるので、$\bar{\sigma}_i$ と σ_i', および $\bar{\sigma}_j$ と σ_j'' はそれぞれ同符号となり、真性非線形の特性族では衝撃 front かそうでないかが一致することになる。よって、

$$Aw(\bar{\sigma}_i; \tau+) = Aw(\sigma_i'; \tau-) \setminus \{\sigma_j''\}, \quad Aw(\bar{\sigma}_j; \tau+) = Aw(\sigma_j''; \tau-) \setminus \{\sigma_i'\}$$

となり、

$$Sw(\bar{\sigma}_i; \tau+) = Sw(\sigma_i'; \tau-) - |\sigma_j''|, \quad Sw(\bar{\sigma}_j; \tau+) = Sw(\sigma_j''; \tau-) - |\sigma_i'|$$

となるから、(4) は、

$$\begin{aligned}
& Q(\tau+) - Q(\tau-) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\bar{\sigma}_k| Sw(\bar{\sigma}_k) - |\sigma_i'|(Sw(\bar{\sigma}_i) + |\sigma_j''|) - |\sigma_j''|(Sw(\bar{\sigma}_j) + |\sigma_i'|) + |\sigma_i'\sigma_j''| \\
&= \sum_{k\neq i,j} |\bar{\sigma}_k| Sw(\bar{\sigma}_k) + (|\bar{\sigma}_i| - |\sigma_i'|) Sw(\bar{\sigma}_i) + (|\bar{\sigma}_j| - |\sigma_j''|) Sw(\bar{\sigma}_j) - |\sigma_i'\sigma_j''| \\
&\leq -|\sigma_i'\sigma_j''| + \sum_{k\neq i,j} |\bar{\sigma}_k| Sw(\bar{\sigma}_k) + |\bar{\sigma}_i - \sigma_i'| Sw(\bar{\sigma}_i) + |\bar{\sigma}_j - \sigma_j''| Sw(\bar{\sigma}_j)
\end{aligned}$$

となるが、$Aw(\bar{\sigma}_k) = Aw(\bar{\sigma}_k; \tau+)$ $(1 \le k \le n)$ は、$\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\sigma}_n$ を含まず、よって $t = \tau-$ の front 全体に含まれてしまうので、

$$Sw(\bar{\sigma}_k) \le V(\tau-) \quad (1 \le k \le n)$$

となる。よって Lemma 7.2 (i) より

$$\begin{aligned} Q(\tau+) - Q(\tau-) &\le -|\sigma_i'\sigma_j''| + \left(\sum_{k \ne i,j} |\bar{\sigma}_k| + |\bar{\sigma}_i - \sigma_i'| + |\bar{\sigma}_j - \sigma_j''| \right) V(\tau-) \\ &\le -|\sigma_i'\sigma_j''| + C|\sigma_i'\sigma_j''| V(\tau-) \end{aligned}$$

となって (7.56') が成り立つことがわかる。

3.6 Q の評価: [A-2] の場合

次は、[A-2] の場合を考える。まず、j-特性族が線形退化 (linearly degenerate) の場合を考えるが、この場合 $\sigma_i' = \sigma_j'$ と σ_j'' はどちらも接触不連続 front であり、その front 速度は $\lambda_j(u_l) = \lambda_j(u_m) = \lambda_j(u_r)$ に一致して、よって本来ならぶつからないはずである。しかし、[1] の front tracking method では、衝突時刻では必ず 2 つの front のみが衝突するよう、必要なら front の速度を変更することを行う (p132 Remark 7.1) とあるので、そのために隣り合う接触不連続 front がぶつかる可能性も否定できない。よって一応それも考えておく。

なお、Remark 7.1 は、3 つ以上の front が同じ衝突点で衝突しないように、とだけ書いているが、実際には複数の衝突点の衝突時刻が一致してしまう場合も避けていて、一つの衝突時刻では本当に 2 つの front のみが衝突するようにしているようである。詳しくは、6 で考察する。

この場合、その衝突後の Riemann 問題の解は当然単一の接触不連続波 $\sigma = \sigma_j' + \sigma_j''$ であり、この場合

$$Aw(\sigma; \tau+) = Aw(\sigma_j'; \tau-) = Aw(\sigma_j''; \tau-)$$

であり、$Aw(\sigma_j')$ には σ_j'' は含まれず、$Aw(\sigma_j'')$ にも σ_j' は含まれない。よって、

$$Q(\tau+) - Q(\tau-) = |\sigma_j' + \sigma_j''| Sw(\sigma) - |\sigma_j'| Sw(\sigma) - |\sigma_j''| Sw(\sigma) \le 0$$

となるが、ここから $-|\sigma'_j||\sigma''_j|$ の項は得られない。これは Q の approach する front 同士の項の中にこの接触不連続 front の大きさの積 $|\sigma'_j\sigma''_j|$ が存在しないからである。よって、(7.56') をすべての衝突時刻 $t=\tau$ で成り立たせるためには、この「同じ特性族の接触不連続 front 同士の衝突」は起こらないようにしなければならない。同様に、Q には存在しない、同じ特性族の膨張波の分解 front 同士の衝突も起こらないようにしなければならない。

当然非物理 front も、その速度は $\hat{\lambda}$ で固定されていて勝手に変更できず、front 速度の変更にはこれらのような制約がつくことになるが、そういった速度の変更の制約に関して [1] には全く説明がない。本当に速度の変更を行って問題なく近似解が構成できるかについては、6 節で考察する。

話を元に戻して、今度は accurate method で、$i=j$ で、j-特性族が真性非線形 (genuinely nonlinear) の場合を考える。

この場合は、上に述べたように膨張波の分解 front 同士の衝突はないと考えれば、$\sigma'_i=\sigma'_j$ と σ''_j の少なくとも一方は衝撃 front で負となる。当然 $\sigma'_j \,/\backslash\, \sigma''_j$ なので、(3), (4) も成り立つ。そして σ'_j と σ''_j、および $\bar{\sigma}_j$ の符号を考えると、その組み合わせは以下の 6 通りになる。

1. $\sigma'_j<0,\ \sigma''_j<0, \bar{\sigma}_j<0$ (いずれも衝撃 front)
2. $\sigma'_j<0,\ \sigma''_j<0, \bar{\sigma}_j\geq 0$ (生成される front のみ膨張 front)
3. $\sigma'_j<0,\ \sigma''_j>0, \bar{\sigma}_j<0$ (右の流入 front のみ膨張 front)
4. $\sigma'_j<0,\ \sigma''_j>0, \bar{\sigma}_j\geq 0$ (左の流入 front のみ衝撃 front)
5. $\sigma'_j>0,\ \sigma''_j<0, \bar{\sigma}_j<0$ (左の流入 front のみ膨張 front)
6. $\sigma'_j>0,\ \sigma''_j<0, \bar{\sigma}_j\geq 0$ (右の流入 front のみ衝撃 front)

まず 1. の場合はいずれも同じ特性族の衝撃 front なので、

$$Aw(\sigma'_j;\tau-)\setminus\{\sigma''_j\}=Aw(\sigma''_j;\tau-)\setminus\{\sigma'_j\}=Aw(\bar{\sigma}_j;\tau+)$$

となり、よって

$$Sw(\sigma'_j;\tau-)-|\sigma''_j|=Sw(\sigma''_j;\tau-)-|\sigma'_j|=Sw(\bar{\sigma}_j;\tau+)$$

となるので、(4) より

$$\begin{aligned}
&Q(\tau+) - Q(\tau-) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\bar{\sigma}_k| Sw(\bar{\sigma}_k) - |\sigma'_j| Sw(\sigma'_j) - |\sigma''_j| Sw(\sigma''_j) + |\sigma'_j \sigma''_j| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\bar{\sigma}_k| Sw(\bar{\sigma}_k) - |\sigma'_j| (Sw(\bar{\sigma}_j) + |\sigma''_j|) - |\sigma''_j| (Sw(\bar{\sigma}_j) + |\sigma'_j|) + |\sigma'_j \sigma''_j| \\
&= \sum_{k \neq j} |\bar{\sigma}_k| Sw(\bar{\sigma}_k) + (|\bar{\sigma}_j| - |\sigma'_j| - |\sigma''_j|) Sw(\bar{\sigma}_j) - |\sigma'_j \sigma''_j| \\
&\leq -|\sigma'_j \sigma''_j| + \sum_{k \neq j} |\bar{\sigma}_k| Sw(\bar{\sigma}_k) + |\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j| Sw(\bar{\sigma}_j)
\end{aligned}$$

となるが、$Sw(\bar{\sigma}_k) = Sw(\bar{\sigma}_k; \tau+)$ は $|\bar{\sigma}_1| \sim |\bar{\sigma}_n|$ を含まないから $V(\tau-)$ に含まれ、よって Lemma 7.2 (ii) より

$$\begin{aligned}
Q(\tau+) - Q(\tau-) &\leq -|\sigma'_j \sigma''_j| + \left(\sum_{k \neq j} |\bar{\sigma}_k| + |\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j| \right) V(\tau-) \\
&\leq -|\sigma'_j \sigma''_j| + C|\sigma'_j \sigma''_j| V(\tau-)
\end{aligned}$$

となって (7.56') が得られる。

2. で $\bar{\sigma}_j \neq 0$ の場合は、

$$Aw(\sigma'_j; \tau-) \setminus \{\sigma''_j\} = Aw(\sigma''_j; \tau-) \setminus \{\sigma'_j\} \supset Aw(\bar{\sigma}_j; \tau+)$$

となり、よって

$$Sw(\sigma'_j; \tau-) - |\sigma''_j| = Sw(\sigma''_j; \tau-) - |\sigma'_j| \geq Sw(\bar{\sigma}_j; \tau+)$$

となるので、Q の差の、$-|\sigma'_j \sigma''_j|$ を除いた j-特性族の front の部分の

$$I_j = |\bar{\sigma}_j| Sw(\bar{\sigma}_j) - |\sigma'_j| (Sw(\sigma'_j) - |\sigma''_j|) - |\sigma''_j| (Sw(\sigma''_j) - |\sigma'_j|)$$

を考えれば、

$$I_j \leq |\bar{\sigma}_j| Sw(\bar{\sigma}_j) - |\sigma'_j| Sw(\bar{\sigma}_j) - |\sigma''_j| Sw(\bar{\sigma}_j) \leq |\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j| V(\tau-)$$

となることがわかる。よって、この場合も Lemma 7.2 (ii) から (7.56') が得られる。

なお、この 2. は、Lemma 7.2 (ii) を考えれば V の場合と同様に各 σ が十分小さいと仮定すれば

$$|\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j| \le C|\sigma'_j\sigma''_j| = C\left(\sqrt{|\sigma'_j\sigma''_j|}\right)^2 \le C\sqrt{|\sigma'_j\sigma''_j|}\,\frac{|\sigma'_j| + |\sigma''_j|}{2} < |\sigma'_j + \sigma''_j|$$

より、$\bar{\sigma}_j$ と $\sigma'_j + \sigma''_j$ の符号が同符号とできるので、2. 自体が起こらない、と見ることも可能である。よって以後はそのように考えることにする。

同様に、4. で $\bar{\sigma}_j \neq 0$ の場合は、

$$Aw(\sigma'_j;\tau-) \setminus \{\sigma''_j\} \supset Aw(\sigma''_j;\tau-) \setminus \{\sigma'_j\} = Aw(\bar{\sigma}_j;\tau+)$$

となり、よって

$$Sw(\sigma'_j;\tau-) - |\sigma''_j| \ge Sw(\sigma''_j;\tau-) - |\sigma'_j| = Sw(\bar{\sigma}_j;\tau+)$$

となるし、また 6. で $\bar{\sigma}_j \neq 0$ の場合も、4. の σ'_j と σ''_j を入れかえたことと同等で、

$$Aw(\sigma''_j;\tau-) \setminus \{\sigma'_j\} \supset Aw(\sigma'_j;\tau-) \setminus \{\sigma''_j\} = Aw(\bar{\sigma}_j;\tau+)$$

より

$$Sw(\sigma''_j;\tau-) - |\sigma'_j| \ge Sw(\sigma'_j;\tau-) - |\sigma''_j| = Sw(\bar{\sigma}_j;\tau+)$$

となり、よって 4., 6. いずれの場合も

$$I_j \le |\bar{\sigma}_j|Sw(\bar{\sigma}_j) - |\sigma'_j|Sw(\bar{\sigma}_j) - |\sigma''_j|Sw(\bar{\sigma}_j) \le |\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j|V(\tau-)$$

となって (7.56') が成立する。残りの 3., 5. の場合であるが、3. の場合は、

$$Aw(\sigma''_j;\tau-) \setminus \{\sigma'_j\} \subset Aw(\sigma'_j;\tau-) \setminus \{\sigma''_j\} = Aw(\bar{\sigma}_j;\tau+)$$

より

$$Sw(\sigma''_j;\tau-) - |\sigma'_j| \le Sw(\sigma'_j;\tau-) - |\sigma''_j| = Sw(\bar{\sigma}_j;\tau+)$$

となるが、符号を考えれば、

$$\begin{aligned} I_j &= |\bar{\sigma}_j| Sw(\bar{\sigma}_j) - |\sigma'_j| Sw(\bar{\sigma}_j) - |\sigma''_j|(Sw(\sigma''_j) - |\sigma'_j|) \\ &= -\bar{\sigma}_j Sw(\bar{\sigma}_j) + \sigma'_j Sw(\bar{\sigma}_j) - \sigma''_j(Sw(\sigma''_j) - |\sigma'_j|) \\ &= -(\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j) Sw(\bar{\sigma}_j) - \sigma''_j(Sw(\bar{\sigma}_j) + Sw(\sigma''_j) - |\sigma'_j|) \end{aligned}$$

となり、$\sigma''_j > 0$, $Sw(\bar{\sigma}_j) \geq 0$, $Sw(\sigma''_j) - |\sigma'_j| \geq 0$ より

$$I_j \leq -(\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j) Sw(\bar{\sigma}_j) \leq |\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j| V(\tau-)$$

が得られる。5. の場合も、3. の σ'_j と σ''_j を入れかえるだけなので、同様にして (7.56') が成立することがわかる。

最後に、4., 6. (および 2.) の $\bar{\sigma}_j = 0$ の場合であるが、この場合は、$I_j \leq 0$ なので、(7.56') が得られることがわかる。

これで、accurate method の場合はすべて (7.56') が成り立つことがわかった。

3.7 Q の評価: [S-1] の場合

次は simplified method の場合を考える。まずは、[S-1] の場合を考える (p131 Figure 7.7)。

この場合生成される σ_k は σ''_j, σ'_i, σ_{np} で、

$$Aw(\sigma''_j; \tau+) = Aw(\sigma''_j; \tau-) \setminus \{\sigma'_i\}, \quad Aw(\sigma'_i; \tau+) = Aw(\sigma'_i; \tau-) \setminus \{\sigma''_j\}$$

であり、また $Aw(\sigma_{np}; \tau+)$ は衝突点より右にある物理 front 全部になるので、$t = \tau-$ での front 全体に含まれ、よって

$$\begin{aligned} &Sw(\sigma''_j; \tau+) = Sw(\sigma''_j; \tau-) - |\sigma'_i|, \quad Sw(\sigma'_i; \tau+) = Sw(\sigma'_i; \tau-) - |\sigma''_j|, \\ &Sw(\sigma_{np}; \tau+) \leq V(\tau-) \end{aligned}$$

となり、よって、

$$\begin{aligned} &Q(\tau+) - Q(\tau-) \\ &\quad = |\sigma''_j| Sw(\sigma''_j; \tau+) + |\sigma'_i| Sw(\sigma'_i; \tau+) + |\sigma_{np}| Sw(\sigma_{np}; \tau+) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& - |\sigma_i'|(Sw(\sigma_i';\tau-) - |\sigma_j''|) - |\sigma_j''|(Sw(\sigma_j'';\tau-) - |\sigma_i'|) - |\sigma_i'\sigma_j''| \\
= \;& -|\sigma_i'\sigma_j''| + |\sigma_{np}|Sw(\sigma_{np};\tau+) \\
\leq \;& -|\sigma_i'\sigma_j''| + |u_r - \tilde{u}_r|V(\tau-)
\end{aligned}
$$

となるので、Lemma 7.2 (iii) より (7.56') が得られることがわかる。

3.8 Q の評価: [S-2] の場合

次は [S-2] の場合を考える (p131 Figure 7.8)。

3.6 節で述べたように、接触不連続 front 同士はぶつからないとしているので、この場合は真性非線形で、よって $\sigma_i' = \sigma_j'$ と σ_j'' の少なくとも一方は衝撃 front であり、σ_k は、$\bar{\sigma}_j = \sigma_j' + \sigma_j''$ と σ_{np} となる。これも σ_j', σ_j'', $\bar{\sigma}_j$ の符号で場合分けすれば、3.6 節の 1. から 6. までのうち 2. を除く 5 通りとなる。1. の場合は、

$$Sw(\bar{\sigma}_j) = Sw(\sigma_j') - |\sigma_j''| = Sw(\sigma_j'') - |\sigma_j'|$$

より、

$$
\begin{aligned}
I_j &= |\bar{\sigma}_j|Sw(\bar{\sigma}_j) - |\sigma_j'|(Sw(\sigma_j') - |\sigma_j''|) - |\sigma_j''|(Sw(\sigma_j'') - |\sigma_j'|) \\
&= (|\bar{\sigma}_j| - |\sigma_j'| - |\sigma_j''|)Sw(\bar{\sigma}_j) \;=\; (-\sigma_j' - \sigma_j'' + \sigma_j' + \sigma_j'')Sw(\bar{\sigma}_j) \;=\; 0
\end{aligned}
$$

となって、よって、

$$
\begin{aligned}
Q(\tau+) - Q(\tau-) &= I_j + |\sigma_{np}|Sw(\sigma_{np};\tau+) - |\sigma_j'\sigma_j''| \\
&\leq -|\sigma_j'\sigma_j''| + |u_r - \tilde{u}_r|V(\tau-)
\end{aligned}
$$

となるので、Lemma 7.2 (iii) より (7.56') が得られる。

同様に、4. で $\bar{\sigma}_j \neq 0$ の場合は

$$Sw(\bar{\sigma}_j) = Sw(\sigma_j'') - |\sigma_j'| \leq Sw(\sigma_j') - |\sigma_j''|$$

6. で $\bar{\sigma}_j \neq 0$ の場合は

$$Sw(\bar{\sigma}_j) = Sw(\sigma_j') - |\sigma_j''| \leq Sw(\sigma_j'') - |\sigma_j'|$$

なので、どちらも

$$I_j \leq (|\bar{\sigma}_j| - |\sigma'_j| - |\sigma''_j|)Sw(\bar{\sigma}_j) \leq |\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j|Sw(\bar{\sigma}_j) = 0$$

となり、また $\bar{\sigma}_j = 0$ の場合も当然 $I_j \leq 0$ となるので、いずれの場合も 1. の場合と同様にして (7.56') が得られる。

3. の場合は

$$Sw(\bar{\sigma}_j) = Sw(\sigma'_j) - |\sigma''_j| \geq Sw(\sigma''_j) - |\sigma'_j|$$

となるが、符号を考えれば

$$\begin{aligned} I_j &= (|\bar{\sigma}_j| - |\sigma'_j|)S(\bar{\sigma}_j) - |\sigma''_j|(Sw(\sigma''_j) - |\sigma'_j|) \\ &= (-\sigma'_j - \sigma''_j + \sigma'_j)Sw(\bar{\sigma}_j) - \sigma''_j(Sw(\sigma''_j) - |\sigma'_j|) \\ &= -\sigma''_j(Sw(\bar{\sigma}_j) + Sw(\sigma''_j) - |\sigma'_j|) \;=\; -|\sigma''_j|(Sw(\bar{\sigma}_j) + Sw(\sigma''_j) - |\sigma'_j|) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

となるので (7.56') は成立する。

5. の場合も 3. の σ'_j と σ''_j を入れかえるだけなので、(7.56') が成り立つことがわかる。

3.9 Q の評価: [S-3] の場合

Q の評価の残りは、[S-3] の場合である (p131 Figure 7.9)。この場合は σ_k は σ''_j と σ_{np} なので、

$$Sw(\sigma''_j;\tau+) = Sw(\sigma''_j;\tau-) - |\sigma'_{np}|, \quad Sw(\sigma_{np};\tau+) = Sw(\sigma'_{np};\tau-) - |\sigma''_j|$$

となり、

$$\begin{aligned} &Q(\tau+) - Q(\tau-) \\ &= |\sigma''_j|Sw(\sigma''_j;\tau+) + |\sigma_{np}|Sw(\sigma_{np};\tau+) \\ &\quad - |\sigma''_j|(Sw(\sigma''_j;\tau-) - |\sigma'_{np}|) - |\sigma'_{np}|(Sw(\sigma'_{np};\tau-) - |\sigma''_j|) - |\sigma'_{np}\sigma''_j| \\ &= -|\sigma'_{np}\sigma''_j| + (|\sigma_{np}| - |\sigma'_{np}|)Sw(\sigma_{np};\tau+) \\ &\leq -|\sigma'_{np}\sigma''_j| + (|u_r - \tilde{u}_r| - |u_m - u_l|)Sw(\sigma_{np};\tau+) \end{aligned}$$

となるので、Lemma 7.2 (iv) より、

$$\begin{aligned} Q(\tau+) - Q(\tau-) &\leq -|\sigma'_{np}\sigma''_j| + C|\sigma''_j||u_m - u_l|Sw(\sigma_{np};\tau+) \\ &\leq -|\sigma'_i\sigma''_j| + C|\sigma'_i\sigma''_j|V(\tau-) \end{aligned}$$

となって (7.56') が得られる。

これで、すべての場合で (7.56') が成り立つことが示されたことになる。

3.10 帰納法による有界変動評価

最後に、u の帰納法による有界変動評価 (7.60) (p138) を示す。[1] にはごくあっさりと書いてあるが、ここではもう少し詳しく説明する。

まず、各衝突時刻 $t = \tau$ で以下が成り立つことは既に示された。

$$V(\tau+) \leq V(\tau-) + M_1|\sigma'\sigma''| \tag{6}$$
$$Q(\tau+) \leq Q(\tau-) - |\sigma'\sigma''| + M_1|\sigma'\sigma''|V(\tau-) \tag{7}$$

ここで、M_1 は正の定数で、考えている u が含まれる領域に依存する。すなわち、時刻が進むに応じて u が含まれる領域が広がってしまえば、これらの定数も大きく取らないといけなくなり、共通の定数とは取れなくなってしまう可能性があるので、本来は u の a priori 評価が得られてようやく決定する定数であることに注意しなければいけない。

ここではそれを帰納法で行うわけであるが、既知の M_1 が取れるのは本来は初期値 (を階段関数で近似した $u(0+,x)$) に対してのみである。

また、ある定数 $C_1 \geq 1$ に対して次が成り立つ (p138 (7.59))。

$$\frac{1}{C_1}\,\mathrm{TV}\,u(t,\cdot) \leq V(t) \leq C_1\,\mathrm{TV}\,u(t,\cdot) \tag{8}$$

これは、各波の大きさ $|\sigma|$ と、その両側の段差 $|[u]|$ に同様の不等式が成り立つことからくるもので、よってこの C_1 も M_1 同様 u が含まれる領域に依存する定数である。

まず最初の目標は、

$$\Upsilon(t) = V(t) + C_0 Q(t) \tag{9}$$

が t に関して非増加となるような定数 C_0 を見つけることである。

今、全 front の衝突時刻を小さい方から

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \cdots$$

とする。p137 の (7.57) が成り立つように、

$$M_1 V(\tau-) \leq \frac{1}{2} \tag{10}$$

としたいので、$0 < \delta_2 < \delta_1$ (δ_1 は 7.3 節 の 1. (p133)) を、まず

$$\delta_2 \leq \frac{1}{2M_1} \tag{11}$$

となるように取る。そして C_0 を

$$2M_1 \leq C_0 \tag{12}$$

となるように取り、

$$C_1(C_1\delta_3 + C_0(C_1\delta_3)^2) \leq \delta_2 \tag{13}$$

を満たすような $\delta_3 > 0$ を取る。なお、$C_1 \geq 1$ より、

$$\delta_2 \geq C_1^2\delta_3 \geq C_1\delta_3 \tag{14}$$

であることに注意する。(13) を満たす δ_3 としては、例えば

$$\delta_3 = \min\left\{1, \frac{\delta_2}{C_1^2(1 + C_0C_1)}\right\} \tag{15}$$

とでもすればよい。それは、(15) であれば、$\delta_3 \leq 1$ より

$$\begin{aligned} \delta_2 &\geq C_1^2(1 + C_0C_1)\delta_3 = C_1^2\delta_3 + C_0C_1^3\delta_3 \geq C_1^2\delta_3 + C_0C_1^3\delta_3^2 \\ &= C_1(C_1\delta_3 + C_0(C_1\delta_3)^2) \end{aligned}$$

となるからである。

まず、u の初期全変動を小さくして、

$$\mathrm{TV}\, u(0+,\cdot) \le \delta_3 \tag{16}$$

であるとする。なお、[1] では $u(0+,x)$ のことを $u(0,x)$ と書いている (p127 (7.17))。初期値の変動が δ_3 未満であると仮定すれば、(7.17) より (16) が成り立つようにできる。

このとき、(8) と (14) より、

$$V(0+) \le C_1\, \mathrm{TV}\, u(0+,\cdot) \le C_1\delta_3 \le \delta_2 \tag{17}$$

となるので、(6), (7) より、

$$\begin{aligned}\Upsilon(\tau_1+) &= V(\tau_1+) + C_0 Q(\tau_1+)\\ &\le V(\tau_1-) + M_1|\sigma_1'\sigma_1''| + C_0(Q(\tau_1-) - |\sigma_1'\sigma_1''| + M_1|\sigma_1'\sigma_1''|V(\tau_1-))\\ &= \Upsilon(\tau_1-) + |\sigma_1'\sigma_1''|(M_1 - C_0 + C_0M_1V(\tau_1-))\end{aligned} \tag{18}$$

となるが、(11), (17) より、

$$V(\tau_1-) = V(0+) \le \delta_2 \le \frac{1}{2M_1}, \quad \Upsilon(\tau_1-) = \Upsilon(0+)$$

なので、(12) より (18) は、

$$\Upsilon(\tau_1+) \le \Upsilon(0+) + |\sigma_1'\sigma_1''|\left(M_1 - \frac{C_0}{2}\right) \le \Upsilon(0+) \tag{19}$$

と評価できる。また、

$$Q(t) \le V(t)^2$$

に注意すると、(13) と (17) により、

$$\begin{aligned}\Upsilon(0+) &= V(0+) + C_0Q(0+) \le V(0+) + C_0V(0+)^2\\ &\le C_1\delta_3 + C_0(C_1\delta_3)^2 \le \frac{\delta_2}{C_1}\end{aligned} \tag{20}$$

となり、よって (19) より、

$$V(\tau_1+) \le \Upsilon(\tau_1+) \le \Upsilon(0+) \le \frac{\delta_2}{C_1} \le \delta_2 \tag{21}$$

となるし、また、(8) と (21) から

$$\mathrm{TV}\, u(\tau_1+,\cdot) \le C_1 V(\tau_1+) \le \delta_2 \tag{22}$$

も得られる。

そして、この (22) によって

$$|u(\tau_1+,x) - u(\tau_1+,-\infty)| = |u(\tau_1+,x) - \bar{u}(-\infty)| \le \delta_2$$

も保証されるので、初期値 $\bar{u}$ が含まれ、(6), (7), (8) が成り立つ u の領域を例えば U_0 とし、

$$U_0 \supset B_{\hat{\delta}}(\bar{u}(-\infty))$$

である $\hat{\delta} > 0$ を取り、$\delta_2 < \hat{\delta}$ となるように δ_2 を取れば

$$u(\tau_1+,x) \in B_{\hat{\delta}}(\bar{u}(-\infty)) \subset U_0$$

が保証され、$u(\tau_1+,x)$ に対しても、同じ M_1, C_1 のままで (6), (7), (8) を使うことができるようになる。

さて、ここからは帰納法により、$n \ge 1$ に対して 3 つの不等式

$$\Upsilon(\tau_n+) \le \Upsilon(\tau_{n-1}+), \quad V(\tau_n+) \le \frac{\delta_2}{C_1} \le \delta_2, \quad \mathrm{TV}\, u(\tau_n+,\cdot) \le \delta_2 \tag{23}$$

が成り立つことを示すことにする。(19), (21), (22) により、$n = 1$ については示された。

(23) が $n-1$ までは成り立つとすると、上に述べたように、(23) の 3 本目によりそこまでの u に対しては (6), (7), (8) が使えて、よって、帰納法の仮定により、

$$\begin{aligned}
\Upsilon(\tau_n+) &\le \Upsilon(\tau_n-) + |\sigma_n'\sigma_n''|(M_1 - C_0 + C_0 M_1 V(\tau_n-)) \\
&\le \Upsilon(\tau_{n-1}+) + |\sigma_n'\sigma_n''|(M_1 - C_0 + C_0 M_1 V(\tau_{n-1}+)) \\
&\le \Upsilon(\tau_{n-1}+) + |\sigma_n'\sigma_n''|(M_1 - C_0 + C_0 M_1 \delta_2) \\
&\le \Upsilon(\tau_{n-1}+) + |\sigma_n'\sigma_n''|\left(M_1 - \frac{C_0}{2}\right) \\
&\le \Upsilon(\tau_{n-1}+)
\end{aligned}$$

となって (23) の 1 本目が得られ、よって、

$$V(\tau_n+) \le \Upsilon(\tau_n+) \le \Upsilon(0+) \le \frac{\delta_2}{C_1} \le \delta_2$$

により (23) の 2 本目が、そして、

$$\mathrm{TV}\, u(\tau_n+,\cdot) \le C_1 V(\tau_n+) \le \delta_2$$

により (23) の 3 本目が得られる。これで (23) がすべての n に対して (すなわち近似解が構成できるすべての $t > 0$ に対して) 成り立つことが言えたことになる。そして、

$$V(t) \le \delta_2 \le \frac{1}{2M_1}$$

となるので、(7.57) (p137) も得られたことになる。

4 7.3 節 5. の評価 (p139)

4.1 はじめに

本節では、7.3 節 5. の、「rarefaction front」の評価について説明する。ここにも、難点が少しあったので、評価を詳細に示したいと思う。

4.2 膨張 front 接続の後方一意性

[1] の p138 では $\sigma_\alpha(t)$ として、$t = t_0$ で発生した「rarefaction front」としているが、これは本稿の「front 接続」を指している。

また、「rarefaction front」と呼んでいるが、膨張 front からの front 接続がずっと膨張 front でつながるわけではない。例えば、[A-1] の場合は、3.5 節の (5) より流入 front と同じ特性族に出る front の符号は同じになり、膨張 front は膨張 front につながるが、[A-2] の場合は、3.6 節で見たように、同じ特性族の接触不連続 front 同士、および膨張 front 同士は衝突しないとしているから、膨張 front に衝突する他方は衝撃 front となり、3.6 節の 2. のように生成する front は $\bar{\sigma}_j < 0$、すなわち衝撃 front につながることもありうる。

[S-1] の場合も、膨張 front は膨張 front で延長されるが、[S-2] の場合はやはり衝撃 front との衝突となるので、$\bar{\sigma}_j = \sigma'_j + \sigma''_j$ より負になって衝撃 front につながりうる。[S-3] の場合は膨張 front は膨張 front のままである。

この p138 5. の (7.61) の評価は、すべての膨張 front に対して成り立つことを示すもので、しかもその証明より、出発点からずっと膨張 front であることが重要である。よって、むしろ前方に front を延長するよりも、front 接続を「後方」に膨張 front で延長できるかを考えてみよう。

膨張 front が新たに生成するのは、$t = 0+$ での初期階段関数に対する近似解、および [A-1]∼[S-3] のうち、[A-1] と [A-2] の流入 front とは異なる特性族に発生する膨張 front のみであり、それ以外は流入 front と同じ特性族の front のみで、流入 front 自身に膨張 front が含まれていなければ膨張 front は生成されない。

これらの新たな膨張 front は、流入 front とは別の特性族なので要請 (P), (P') の影響は受けず、よって front の大きさは必ず δ 以下であることに注意する。

次に、$t > 0$ にある膨張 front は、それが新たな膨張 front でなければ、後方、すなわち t の減る方向には必ず一意に膨張 front につながることを示そう。

$t = \tau$ の衝突時刻でその膨張 front が生成され、かつそれが新たなものでない場合、

- [A-1] の場合、それは流入 front と同じ特性族でなければならず、この場合 $t = \tau$ の前後で front の大きさの符号は変わらないので、後方の front は膨張 front に一意に決まる。
- [A-2] の場合も流入 front と同じ特性族となるが、その特性族の流入 front は 2 つあり、どちらも衝撃 front ならばその特性族に出る front も衝撃 front でなくてはならず、また同じ特性族の膨張 front 同士は衝突しないとしているので、流入 front の一方は膨張 front、他方は衝撃 front でなくてはならない。よって、後方の膨張 front が一意に決まる。
- [S-1], [S-3] の場合は、その特性族の流入 front は当然膨張 front になる
- [S-2] の場合、[A-2] の場合と同様に一方が膨張 front、一方が衝撃 front でなくてはいけないので、後方の膨張 front が一意に決まる。

以上により、膨張 front は、新規の膨張 front に行きあたるまで、膨張 front のまま後方に一意的に延長できることがわかった。

今、そのように後方にのばした膨張 front 接続を $\sigma_\alpha(t)$ $(t_0 \le t < t_1)$ と書くことにす

る。先の方はわからないが、少なくとも

$$\sigma_\alpha(t) > 0 \ (t_0 \le t < t_1), \quad 0 < \sigma_\alpha(t_0) \le \delta \tag{24}$$

であることがわかる。以下、[1] に従って、(7.61) の証明を考える。なお、p139 (7.62) にある $\mathcal{A}(\alpha)$, $V_\alpha(t)$ は、本稿の記号では

$$\mathcal{A}(\alpha) = Aw(\sigma_\alpha(t)), \quad V_\alpha(t) = Sw(\sigma_\alpha(t)) \tag{25}$$

を意味する。

4.3 CASE 1

まず、p139 の CASE 1 の (7.63) を考える。

この場合、衝突時刻 $t = \tau$ では σ_α が衝突せず、$\sigma_\alpha(\tau)$ とは別のところで σ_i', σ_j'' が衝突して σ_k が生成するとする (Riemann 問題の解は $\bar{\sigma}_k$)。また、$\sigma_\alpha(t)$ は p-特性族の膨張 front 接続であるとする。

示すべきは、

$$\Delta\sigma_\alpha(\tau) = 0, \quad \Delta V_\alpha(\tau) + C_0 \Delta Q(\tau) \le 0 \tag{26}$$

であるが、$t = \tau$ では σ_α が衝突しないので、当然

$$\Delta\sigma_\alpha(\tau) = \sigma_\alpha(\tau+) - \sigma_\alpha(\tau-) = 0$$

となる。

一方、(26) の 2 つ目は自明ではない。V_α が V であれば、(23) の 1 本目より (26) の 2 つ目は当然成立するが、V ではなく V_α であるため少し詳しく考える必要がある。まず、以下が成り立つことを場合分けで示す。

$$\Delta V_\alpha(\tau) \le M_1 |\sigma_i' \sigma_j''| \tag{27}$$

[**A-1**] の場合　この場合、生成する Riemann 問題の wave $\bar{\sigma}_k$ は、$\bar{\sigma}_i$ と σ_i' は同符号、$\bar{\sigma}_j$ と σ_j'' は同符号となる。よって $\sigma_\alpha(t) \,/\!\setminus\, \bar{\sigma}_i$ かどうかは、i-特性族の真性非線形性や $p = i$ かどうかに関わらず、$\sigma_\alpha(t) \,/\!\setminus\, \sigma_i'$ かどうかに一致する。

よって、いずれも approach するなら $\Delta V_\alpha(\tau)$ の i-特性族の項は $|\bar{\sigma}_i| - |\sigma_i'|$ となり、いずれも approach しなければ i-特性族の項はない。$\bar{\sigma}_j$, σ_j'' についても同様であり、$\Delta V_\alpha(\tau)$ には $\bar{\sigma}_k$, σ_i', σ_j'' 以外の項は含まれないので、いずれの場合も、

$$\Delta V_\alpha(\tau) \le \sum_{k \neq i,j} |\bar{\sigma}_k| + |\bar{\sigma}_i - \sigma_i'| + |\bar{\sigma}_j - \sigma_j''| \tag{28}$$

と評価されることになる。よって、Lemma 7.2 (i) により (27) が得られる。なお、M_1 は Lemman 7.2 (i), (iii), (iv) の $O(1)$ の部分、および Lemma 7.2 (ii) の $O(1)(|\sigma| + |\sigma'|)$ の部分を押さえる定数であることに注意する (3.2 節、3.3 節参照)。

[**A-2**] の場合　この場合、同じ特性族の接触不連続 front 同士、膨張 front 同士は衝突しないとしているので、j-特性族は真性非線形で、$\sigma_i' = \sigma_j'$ と σ_j'' の少なくとも一方は負、すなわち衝撃 front となる。

$p \neq j$ であれば、$\sigma_\alpha(t) \,/\!\setminus\, \sigma_j'$ かどうかは、$\sigma_\alpha(t) \,/\!\setminus\, \sigma_j''$ かどうか、および $\sigma_\alpha(t) \,/\!\setminus\, \bar{\sigma}_j$ かどうかと一致するので $\Delta V_\alpha(\tau)$ の j-特性族の項は $|\bar{\sigma}_j| - |\sigma_j'| - |\sigma_j''|$ か 0 となる。よっていずれの場合も

$$\Delta V_\alpha(\tau) \le \sum_{k \neq j} |\bar{\sigma}_k| + |\bar{\sigma}_j - \sigma_j' - \sigma_j''| \tag{29}$$

で評価され、よって Lemma 7.2 (ii) より (27) が得られる。

$p = j$ の場合は、3.6 節と同じ 1. から 6. と同じ場合分けで考える。なお、3.6 節で述べた通り、σ は十分小さいと見れば 2. の場合は起こらないとしてよいので、2. を除外した 5 通りで考える。

まず、1. の $\sigma_j' < 0$, $\sigma_j'' < 0$, $\bar{\sigma}_j < 0$ の場合は $\sigma_\alpha(t) > 0$ より $\sigma_\alpha(t) \,/\!\setminus\, \sigma_j'$, $\sigma_\alpha(t) \,/\!\setminus\, \sigma_j''$, $\sigma_\alpha(t) \,/\!\setminus\, \bar{\sigma}_j$ で、$\Delta V_\alpha(\tau)$ の j-特性族の項は $|\bar{\sigma}_j| - |\sigma_j'| - |\sigma_j''|$ となるので、(29) で評価される。

3. の $\sigma_j' < 0$, $\sigma_j'' > 0$, $\bar{\sigma}_j < 0$ の場合は、$\sigma_\alpha(t) \,/\!\setminus\, \sigma_j'$, $\sigma_\alpha(t) \,/\!\setminus\, \bar{\sigma}_j$ だから $\Delta V_\alpha(\tau)$ の j-特性族の項は $|\bar{\sigma}_j| - |\sigma_j'|$ となるが、

$$|\bar{\sigma}_j| - |\sigma_j'| = -\bar{\sigma}_j + \sigma_j' = -(\bar{\sigma}_j - \sigma_j' - \sigma_j'') - \sigma_j'' \le |\bar{\sigma}_j - \sigma_j' - \sigma_j''|$$

となるので、やはり (29) で評価される。

5. の $\sigma'_j > 0, \sigma''_j < 0, \bar{\sigma}_j < 0$ の場合は、3. の σ'_j と σ''_j を入れ変えただけの形で同じ評価が示される。

4. の $\sigma'_j < 0, \sigma''_j > 0, \bar{\sigma}_j \geq 0$ の場合は、$\Delta V_\alpha(\tau)$ の j-特性族の項は $-|\sigma'_j|$ のみとなるので、これも (29) で評価される。

6. の $\sigma'_j > 0, \sigma''_j < 0, \bar{\sigma}_j \geq 0$ の場合も 4. の σ'_j と σ''_j を入れ変えただけの形で同じ評価が示される。

これで、[A-2] の場合はすべて (27) が成り立つことがわかった。

[**S-1**] の場合　この場合は、$\sigma''_j, \sigma'_i, \sigma_{np}$ が生成されるが、当然 $t < \tau$ の $\sigma'_i \,/\, \backslash\, \sigma_\alpha(t)$ かどうかと $t > \tau$ の $\sigma'_i \,/\, \backslash\, \sigma_\alpha(t)$ かどうかは一致し、しかも大きさが同じなので $\Delta V_\alpha(\tau)$ ではどちらの場合も消えてしまう。σ''_j に関する項も同様に消えてしまうため、残るのは σ_{np} だけで、

$$\Delta V_\alpha(\tau) \leq |\sigma_{np}| = |u_r - \tilde{u}_r| \tag{30}$$

となり、Lemma 7.2 (iii) より (27) が成り立つことがわかる。

[**S-2**] の場合　この場合、j 特性族は真性非線形で、$\sigma'_i = \sigma'_j$ と σ''_j の少なくとも一方は負となる。$p \neq j$ なら $\sigma_\alpha \,/\, \backslash\, \sigma'_j$ かどうかと $\sigma_\alpha \,/\, \backslash\, \sigma''_j$ かどうか、および $\sigma_\alpha \,/\, \backslash(\sigma'_j + \sigma''_j)$ かどうかは一致するので、いずれも approach するなら

$$\Delta V_\alpha(\tau) \leq |\sigma'_j + \sigma''_j| - |\sigma'_j| - |\sigma''_j| + |\sigma_{np}| \leq |\sigma_{np}|$$

いずれも approach しないなら

$$\Delta V_\alpha(\tau) \leq |\sigma_{np}|$$

となり、いずれも (30) で評価される。

$p = j$ のときは、$\sigma_\alpha(t) > 0$ なので、$\sigma'_j < 0, \sigma''_j < 0$ ならば

$$\Delta V_\alpha(\tau) \leq |\sigma'_j + \sigma''_j| - |\sigma'_j| - |\sigma''_j| + |\sigma_{np}| \leq |\sigma_{np}|$$

$\sigma'_j < 0 < \sigma''_j$ で $\sigma'_j + \sigma''_j < 0$ ならば、

$$\Delta V_\alpha(\tau) \le |\sigma'_j + \sigma''_j| - |\sigma'_j| + |\sigma_{np}| = -\sigma'_j - \sigma''_j + \sigma'_j + |\sigma_{np}| \le |\sigma_{np}|$$

$\sigma'_j < 0 < \sigma''_j$ で $\sigma'_j + \sigma''_j \ge 0$ であれば

$$\Delta V_\alpha(\tau) \le -|\sigma'_j| + |\sigma_{np}| \le |\sigma_{np}|$$

となって、いずれも (30) で評価される。

$\sigma''_j < 0 < \sigma'_j$ の場合も、上の σ'_j と σ''_j を入れかえた形の式が成り立つので、同様に評価できる。よって、[S-2] の場合もすべて (27) が得られる。

[S-3] の場合　この場合は、σ''_j の項は $\Delta V_\alpha(\tau)$ から消え、$\sigma_\alpha(\tau)$ が衝突点より左なら $\sigma_\alpha(t)$ と非物理 front は approach しないため $\Delta V_\alpha(\tau) = 0$、右ならば

$$\Delta V_\alpha(\tau) = |\sigma_{np}| - |\sigma'_{np}| = |u_r - \tilde{u}_r| - |u_m - u_l|$$

となり、Lemma 7.2 (iv) より (27) が成り立つことがわかる。

以上により、すべての場合で (27) が成り立つことがわかった。

この (27) と、(7), (11), (12), (23) により、

$$\begin{aligned} \Delta V_\alpha(\tau) + C_0 \Delta Q(\tau) \ &\le \ |\sigma'_i \sigma''_j|(M_1 - C_0 + C_0 M_1 V(\tau-)) \\ &\le \ |\sigma'_i \sigma''_j|(M_1 - C_0 + C_0 M_1 \delta_2) \ \le \ |\sigma'_i \sigma''_j| \left(M_1 - C_0 + \frac{C_0}{2} \right) \ \le \ 0 \end{aligned} \tag{31}$$

が成り立ち、これで (26) の 2 つ目が得られたことになる。

4.4 CASE 2

次に、p139 の CASE 2 の (7.64) を考える。$\sigma_\alpha(t)$ が $t = \tau$ で他の front σ_β と衝突するとし、このとき、

$$\Delta V_\alpha(\tau) = -|\sigma_\beta|, \quad \Delta Q(\tau) < 0, \quad \Delta \sigma_\alpha(\tau) \le M_1 |\sigma_\alpha(\tau-)||\sigma_\beta| \tag{32}$$

を示す。まず、$t=\tau$ の前後で $\sigma_\alpha(t)$ の符号は変わらずに正のままなので、σ_β 以外の項は $\Delta V_\alpha(\tau)$ には現れず、よって (32) の 1 つ目は正しい。(32) の 2 つ目は、(7), (11), (23) より、

$$\begin{aligned}\Delta Q(\tau) &\le |\sigma_\alpha(\tau-)\sigma_\beta|(-1+M_1V(\tau-)) \le |\sigma_\alpha(\tau-)\sigma_\beta|(-1+M_1\delta_2)\\ &\le -\frac{1}{2}|\sigma_\alpha(\tau-)\sigma_\beta|\end{aligned}$$

となって成り立つことがわかる。

(32) の 3 つ目は、[A-1] の場合は Lemma 7.2 (i) より、

$$\Delta\sigma_\alpha(\tau)=\sigma_\alpha(\tau+)-\sigma_\alpha(\tau-)\le|\sigma_\alpha(\tau+)-\sigma_\alpha(\tau-)|\le M_1|\sigma_\alpha(\tau-)\sigma_\beta|$$

となって成り立つ。

[A-2] の場合は $\sigma_\alpha(t)>0$ より $\sigma_\beta<0$ で、よって Lemma 7.2 (ii) より、

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_\alpha(\tau) &= \sigma_\alpha(\tau+)-\sigma_\alpha(\tau-)-\sigma_\beta+\sigma_\beta \le |\sigma_\alpha(\tau+)-\sigma_\alpha(\tau-)-\sigma_\beta|\\ &\le M_1|\sigma_\alpha(\tau-)\sigma_\beta|\end{aligned}$$

となる。

[S-1], [S-3] の場合は $\Delta\sigma_\alpha(\tau)=0$ で、[S-2] の場合は $\sigma_\beta<0$ で、よって $\Delta\sigma_\alpha(\tau)=\sigma_\beta<0$ となるから、よってすべての場合で (32) の 3 つ目が成り立つことがわかる。

これで、(32) がすべて成り立つことになる。

今、$t_0\le t<t_1$ に対して

$$\eta(t)=\sigma_\alpha(t)e^{M_1(V_\alpha(t)+C_0Q(t))}\quad(>0)\tag{33}$$

と定義すると、衝突点以外では $\eta(t)$ は定数で、衝突点 $t=\tau$ で CASE 1 なら (26) より、

$$\frac{\eta(\tau+)}{\eta(\tau-)}=\frac{\sigma_\alpha(\tau+)}{\sigma_\alpha(\tau-)}e^{M_1(\Delta V_\alpha(\tau)+C_0\Delta Q(\tau))}\le 1\tag{34}$$

となるし、CASE 2 なら (32)、および $\sigma_\alpha(\tau-)>0$ より、

$$\frac{\eta(\tau+)}{\eta(\tau-)}=\left(1+\frac{\Delta\sigma_\alpha(\tau)}{\sigma_\alpha(\tau-)}\right)e^{M_1\Delta V_\alpha(\tau)+M_1C_0\Delta Q(\tau)}\le(1+M_1|\sigma_\beta|)e^{-M_1|\sigma_\beta|}\le 1\tag{35}$$

となるので、$\eta(t)$ は非増加であることがわかり、よって (21), (23), (24) より、

$$\eta(t) \leq \eta(t_0+) = \sigma_\alpha(t_0) e^{M_1(V_\alpha(t_0)+C_0Q(t_0))} \leq \delta e^{M_1\Upsilon(t_0)} \leq \delta e^{M_1\Upsilon(0+)} \leq \delta e^{M_1\delta_2} \tag{36}$$

となり、よって、

$$\sigma_\alpha(t) \leq \eta(t) \leq \delta e^{M_1\delta_2} \tag{37}$$

が得られる。

この (37) は [1] の (7.61) (p138) に対応するが、これは、定義 7.1 (p125) の 3. (7.8) の、膨張 front のサイズ σ_α が

$$\sigma_\alpha \in]0, \varepsilon]$$

であることを保証するものになる。δ を小さく変更すれば、もちろんそれに伴い近似解の構造もだいぶ変わってしまうが、それとは無関係に (37) は常に成立するので、よって、$\varepsilon > 0$ に対して、δ を

$$0 < \delta e^{M_1\delta_2} \leq \varepsilon \tag{38}$$

となるようにとれば確かに (7.8) が満たされる。それは、定理 7.2 (p127) の一部でもあるが、それについてはまた後 (5.9 節) で説明する。

5 7.3 節 6. と 世代評価 (p139-142)

5.1 はじめに

本節では、7.3 節 6. の、非物理 front の総量に関する評価について説明する。ここは、世代番号 (generation order) という大がかりな道具が導入され、評価もかなり長いが、説明は細かいところまでは行われておらずかなり省略されているので、少し詳しく紹介する。

5.2 非物理 front の大きさの評価

まずは、非物理 front の大きさの評価 (7.66) から説明する。これは、ほぼ 4 節と同様に行われる。

非物理 front 接続 $\sigma_\alpha(t)$ $(t \geq t_0)$ は、新規には [S-1],[S-2] でのみ生成され、無限に伸びる。なお、$\sigma_\alpha(t)$ の符号は特に定められていないが、本節では正として話を進めることにする。$\sigma_\alpha(t)$ は、simplified method で作られるから、その出発点 $t = t_0$ では、Lemma 7.2 (iii) より

$$\sigma_\alpha(t_0) = |\sigma_{np}| \leq M_1 |\sigma_i' \sigma_j''|$$

となるが、物理 front 同士の simplified method は、$|\sigma_i' \sigma_j''| < \rho$ のときにしか実施しないので (p132)、よって

$$\sigma_\alpha(t_0) \leq M_1 \rho \tag{39}$$

である。

次は、衝突時刻 $t = \tau$ での評価を、4 節同様 CASE 1 と CASE 2 に分けて考える。

CASE 1 は $\sigma_\alpha(t)$ が他の front と衝突していない場合で、この場合は当然

$$\Delta\sigma_\alpha(\tau) = 0 \tag{40}$$

となるが、このとき、

$$\Delta V_\alpha(\tau) + C_0 \Delta Q(\tau) \leq 0 \tag{41}$$

となることを示す。

$\sigma_\alpha(\tau)$ がその衝突点より左にあれば、σ_k, σ_i', σ_j'' のうちの物理 front はすべて $\sigma_\alpha(t)$ と approach し、右にあれば衝突に関わるすべての front は $\sigma_\alpha(t)$ と approach しない。

よって、[A-1] であれば、前者の場合は

$$\Delta V_\alpha(\tau) = \sum_{k=1}^{n} |\bar{\sigma}_k| - |\sigma_i'| - |\sigma_j''| \leq \sum_{k \neq i,j} |\bar{\sigma}_k| + |\bar{\sigma}_i - \sigma_i'| + |\bar{\sigma}_j - \sigma_j''| \leq M_1 |\sigma_i' \sigma_j''|$$

となり、後者は $\Delta V_\alpha(\tau) = 0$ となる。[A-2] の場合も、

$$\Delta V_\alpha(\tau) = \sum_{k=1}^{n} |\bar{\sigma}_k| - |\sigma'_j| - |\sigma''_j| \leq \sum_{k \neq j} |\bar{\sigma}_k| + |\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j| \leq M_1 |\sigma'_j \sigma''_j|$$

か、または $\Delta V_\alpha(\tau) = 0$ となる。[S-1] は、σ_{np} は $\sigma_\alpha(t)$ とは approach せず、よって $\Delta V_\alpha(\tau) = 0$。[S-2] は、$\sigma_\alpha(\tau)$ が衝突点の左ならば

$$\Delta V_\alpha(\tau) = |\sigma'_j + \sigma''_j| - |\sigma'_j| - |\sigma''_j| \leq 0$$

で、右ならば $\Delta V_\alpha(\tau) = 0$。[S-3] は $\Delta V_\alpha(\tau) = 0$ となる。

よって、すべて $\Delta V_\alpha(\tau) \leq M_1 |\sigma'_i \sigma''_j|$ となるので、4.3 節の (31) と同様にして (41) が得られる。

次は、CASE 2 の、$t = \tau$ で $\sigma_\alpha(t)$ と σ_β が衝突する場合を考えてみる。この場合それは [S-3] となるので、

$$\Delta V_\alpha(\tau) = -|\sigma_\beta| \tag{42}$$

であり、$\Delta Q(\tau)$ は、(7), (11), (23) により、

$$\begin{aligned} \Delta Q(\tau) &\leq -|\sigma_\alpha(\tau-)\sigma_\beta| + (|\sigma_\alpha(\tau+)| - |\sigma_\alpha(\tau-)|)(Sw(\sigma_\alpha(\tau-)) - |\sigma_\beta|) \\ &\leq -|\sigma_\alpha(\tau-)\sigma_\beta| + M_1 |\sigma_\alpha(\tau-)\sigma_\beta| V(\tau-) \leq -\frac{1}{2}|\sigma_\alpha(\tau-)\sigma_\beta| \\ &< 0 \end{aligned}$$

となるし、$\Delta\sigma_\alpha(\tau)$ は、Lemma 7.2 (iv) より

$$\Delta\sigma_\alpha(\tau) = \sigma_\alpha(\tau+) - \sigma_\alpha(\tau-) = |\sigma_\alpha(\tau+)| - |\sigma_\alpha(\tau-)| \leq M_1 |\sigma_\alpha(\tau-)\sigma_\beta|$$

となり、4.4 節の (32) が成り立つので、よって、(33) と同じ式で η を定義すれば (34), (35) が得られ、よって (36) と同様にして

$$\eta(t) \leq \sigma_\alpha(t_0) e^{M_1 \delta_2}$$

となるので (39) より

$$\sigma_\alpha(t) \leq \rho M_1 e^{M_1 \delta_2} \tag{43}$$

が得られる。

5.3 世代番号 (generation order)

この後の評価のため、[1] では世代番号 (generation order) なるものを導入して、それに基づく場合分けを行っている。

世代番号は、すべての front (各線分部分) に対してあるレベル番号付けを行う規則であるが、ID とは違い一意の番号をつけるわけではなく、front から自然数への写像 $Go(\sigma)$ を作っている。

1. 初期階段関数 $u(0+,x)$ に対する Riemann 問題の解から作った front の世代番号は 1 とする
2. $Go(\sigma_i')=k'$, $Go(\sigma_j'')=k''$ である front σ_i' と σ_j'' が衝突する場合、
   (a) $i>j$ の場合 ([A-1],[S-1],[S-3])、流入 front と同じ i-特性族、j-特性族に出る front $\bar\sigma_i$, $\bar\sigma_j$ の世代番号は $Go(\bar\sigma_i)=k'$, $Go(\bar\sigma_j)=k''$ とし、それ以外の特性族に出る front の世代番号はすべて $\max\{k',k''\}+1$ とする
   (b) $i=j$ の場合 ([A-2],[S-2])、流入 front と同じ j-特性族に出る front の世代番号は $\min\{k',k''\}$ とし、それ以外の特性族に出る front の世代番号はすべて $\max\{k',k''\}+1$ とする

すなわち、合体して 1 本の front になった場合は、流入 front の世代番号の小さい方を取り、ぶつかってすり抜けた場合は変更せず、新たに発生した front の世代番号は流入 front のものよりも大きくする。よって、front 接続を時間の進む方向に追いかければそれに沿って世代番号は増えないことになる。

そして、あらたに $V_k(t)$, $Q_k(t)$, I_k $(k\geq 1)$ の記号を導入している (p140)。

$$V_k(t) = \sum\{|\sigma|;\ \sigma\in F(t),\ Go(\sigma)\geq k\} \tag{44}$$
$$Q_k(t) = \sum\{|\sigma\sigma'|;\ \sigma,\sigma'\in F(t),\ \sigma\,/\!\backslash\,\sigma',\ \max\{Go(\sigma),Go(\sigma')\}\geq k\} \tag{45}$$
$$I_k = \{\max\{Go(\sigma),Go(\sigma')\}=k \text{ となる } \sigma,\sigma' \text{ の衝突時刻 }\} \tag{46}$$

$V_k(t)$ は、$V(t)$ のうち、k 未満の世代の front をとりのぞいたもの、$Q_k(t)$ は、$Q(t)$ のうち、k 未満の世代同士の front の積の項をとりのぞいたもの、I_k は衝突時刻 $\{\tau_k\}$ の集合を交わりのない部分集合に分割したもの、となっている。明らかに $V_1(t)=V(t)$, $Q_1(t)=Q(t)$ となる。

I_k は少しわかりにくいかもしれないが、[1] の近似解の作り方の場合、各衝突時刻 $t=\tau$ に対して、その時刻に衝突する front σ, σ' の組が一意に決定し、その両者の世代番号

の大きい方を

$$\phi(\tau) = \max\{Go(\sigma), Go(\sigma')\}$$

とすれば、これは衝突時刻集合 $\{\tau_j\}$ から自然数への写像となり、それに対し $I_k = \phi^{-1}(\{k\})$ となる。よって I_k 同士には交わりはなく、

$$\bigcup_{k\geq 1} I_k = \phi^{-1}(\mathbf{N}) = \{\tau_j\}$$

となる。

なお、[1] では、$Go(\sigma)$ という関数は導入せず、全 front に「σ_α」という ID を示す添字をつけ、σ_α の世代番号を k_α と書くことでこれらを定義しているが、その方法でも十分わかるし、特にあいまいさがあるわけではない。

この V_k, Q_k, I_k に対し、p141 には次の 5 本の評価が上げられている。

$$\Delta V_k(\tau) = 0, \qquad \tau \in \bigcup_{j=1}^{k-2} I_j \quad (k \geq 3) \tag{47}$$

$$\Delta V_k(\tau) + C_0 \Delta Q_{k-1}(\tau) \leq 0, \qquad \tau \in \bigcup_{j\geq k-1} I_j \quad (k \geq 2) \tag{48}$$

$$\Delta Q_k(\tau) + C_0 \Delta Q(\tau) V_k(\tau-) \leq 0, \qquad \tau \in \bigcup_{j=1}^{k-2} I_j \quad (k \geq 3) \tag{49}$$

$$\Delta Q_k(\tau) + C_0 \Delta Q_{k-1}(\tau) V(\tau-) \leq 0, \qquad \tau \in I_{k-1} \quad (k \geq 2) \tag{50}$$

$$\Delta Q_k(\tau) \leq 0, \qquad \tau \in \bigcup_{j\geq k} I_j \quad (k \geq 1) \tag{51}$$

しかし、[1] には、その証明は (7.56) と同様である、としているだけで何も書かれてはいない。本節では、ほぼ似たような作業の繰り返しになるが、順に紹介する。なお、(47), (48) と (49), (50), (51) は、それぞれ $V_k(t)$ と $Q_k(t)$ の、衝突時刻での差分の場合分けによる評価であることに注意する。

なお、1 本目の (47) はそれほど難しくはない。$\tau \in I_j$ $(1 \leq j \leq k-2)$ より、衝突する front の世代はいずれも $(k-2)$ 以下で、よってその衝突で生成される front の世代もすべて $(k-1)$ 以下となり、$V_k(\tau+)$ にも $V_k(\tau-)$ にもそれらの front は含まれず、よって (47) となる。

以下、3 節同様、その衝突時刻での流入 front を σ'_i, σ''_j $(i \geq j)$、その Riemann 問題の解を $\bar{\sigma}_\ell$、出力 front を σ_ℓ とし、$Go(\sigma'_i) = k'$, $Go(\sigma''_j) = k''$ とする。なお、$Go(\bar{\sigma}_\ell)$ という記号も用いるが、それは $\bar{\sigma}_\ell$ が膨張波である場合は、その分解 front の (共通の) 世代番号とする。

5.4 2 本目の不等式の評価

まずは、(48) の $\tau \in \bigcup_{j\geq k-1} I_j$ の場合、すなわち

$$\max\{k', k''\} \geq k-1 \tag{52}$$

の場合を考える。このときに、まず

$$\Delta V_k(\tau) \leq M_1|\sigma_i'\sigma_j''|, \quad \Delta Q_{k-1}(\tau) \leq -|\sigma_i'\sigma_j''| + M_1|\sigma_i'\sigma_j''|V(\tau-) \tag{53}$$

が成り立つことを示す。

なお、k', k'' の両方が k 以上であれば、衝突に関係する front の世代はすべて k 以上となり $\Delta V_k(\tau) = \Delta V(\tau)$ となるので、(53) の 1 本目は (6) より得られる。よって (53) の 1 本目は、

$$\min\{k', k''\} \leq k-1 \leq \max\{k', k''\} \tag{54}$$

の場合のみを考えればよい。

同様に k', k'' の両方が $k-1$ 以上であれば $\Delta Q_{k-1}(\tau) = \Delta Q(\tau)$ より (53) の 2 本目は (7) より得られる。よって (52) より、こちらは

$$\min\{k', k''\} < k-1 \leq \max\{k', k''\} \tag{55}$$

の場合のみを考えればよいことになる。

[**A-1**] の場合　この場合、i-,j-特性族に出る front の世代はそれぞれ k', k'' のままで、(52) よりそれ以外の特性族に出る front の世代は k 以上となる。よって $\Delta V_k(\tau)$ は、

$$\Delta V_k(\tau) = \sum_{\ell\neq i,j} |\bar{\sigma}_\ell| + \varepsilon(|\bar{\sigma}_i| - |\sigma_i'|) + \varepsilon'(|\bar{\sigma}_j| - |\sigma_j''|)$$

のいずれかの形となる (ε, ε' は 0 または 1)。よっていずれにしても

$$\Delta V_k(\tau) \leq \sum_{\ell\neq i,j} |\bar{\sigma}_\ell| + |\bar{\sigma}_i - \sigma_i'| + |\bar{\sigma}_j - \sigma_j''| \tag{56}$$

で評価され、Lemma 7.2 (i) より (53) の 1 本目が得られる。

同様に $\Delta Q_{k-1}(\tau)$ は、

$$\begin{aligned}&\Delta Q_{k-1}(\tau)\\ &\quad\le \sum_{\ell\neq i,j}|\bar\sigma_\ell|Sw(\bar\sigma_\ell)+|\bar\sigma_i-\sigma_i'|(S_i'-|\sigma_j''|)+|\bar\sigma_j-\sigma_j''|(S_j''-|\sigma_i'|)-|\sigma_i'\sigma_j''|\end{aligned}\tag{57}$$

となる。ここで、S_i' は $Q_{k-1}(\tau-)$ に含まれる $|\sigma_i'|$ の係数、S_j'' は $Q_{k-1}(\tau-)$ に含まれる $|\sigma_j''|$ の係数で、もし $k'\ge k-1$ なら $S_i'=Sw(\sigma_i')$ となるが、$k'<k-1$ なら $S_i'\le Sw(\sigma_i')$ であり、S_i' は $Sw(\sigma_i')$ のうち $(k-1)$ 以上の世代の項のみの和となる。S_j'' も同様。

いずれにせよ、$Sw(\bar\sigma_\ell)$, $S_i'-|\sigma_j''|$, $S_j''-|\sigma_i'|$ は σ_i', σ_j'', $\bar\sigma_\ell$ を含まず、よって $V(\tau-)$ に含まれるので、

$$\Delta Q_{k-1}(\tau)\le -|\sigma_i'\sigma_j''|+\left(\sum_{\ell\neq i,j}|\bar\sigma_\ell|+|\bar\sigma_i-\sigma_i'|+|\bar\sigma_j-\sigma_j''|\right)V(\tau-)$$

となり、Lemma 7.2 (i) より (53) の 2 本目が得られる。

[**A-2**] の場合　この場合、$\Delta V_k(\tau)$ は、j 以外の特性族に出る front の世代は k 以上で、(55) より $\bar\sigma_j$ の世代も $k-1$ 以下となり、よって $V_k(\tau+)$ は $\bar\sigma_j$ を含まない。$V_k(\tau-)$ は k',k'' のうち k 以上のものがあればそれを含むが、結局

$$\Delta V_k(\tau)=\sum_{\ell\neq j}|\bar\sigma_\ell|-\varepsilon|\sigma_j'|-\varepsilon'|\sigma_j''|\le\sum_{\ell\neq j}|\bar\sigma_\ell|$$

となり Lemma 7.2 (ii) により (53) の 1 本目が得られる。

$\Delta Q_{k-1}(\tau)$ は、

$$\begin{aligned}&\Delta Q_{k-1}(\tau)\\ &\quad=\sum_{\ell\neq j}|\bar\sigma_\ell|Sw(\bar\sigma_\ell)+|\bar\sigma_j|\bar S_j-|\sigma_j'|(S_j'-|\sigma_j''|)-|\sigma_j''|(S_j''-|\sigma_j'|)-|\sigma_j'\sigma_j''|\\ &\quad=-|\sigma_j'\sigma_j''|+\sum_{\ell\neq j}|\bar\sigma_\ell|Sw(\bar\sigma_\ell)+I_j^{k-1}\end{aligned}\tag{58}$$

の形に書ける。以後この

$$I_j^{k-1}=|\bar\sigma_j|\bar S_j-|\sigma_j'|(S_j'-|\sigma_j''|)-|\sigma_j''|(S_j''-|\sigma_j'|)\tag{59}$$

を考える。(55) より、$\bar{k} = Go(\bar{\sigma}_j) = \min\{k', k''\} < k-1$ となる。

3.6 節の 2. を除いた 5 通りで場合分けし、まず 1. の $\sigma'_j < 0, \sigma''_j < 0, \bar{\sigma}_j < 0$ のときを考える。

$$k' = \bar{k} < k-1 \leq k''$$

の場合は $S''_j = Sw(\sigma''_j)$ だが $S'_j \leq Sw(\sigma'_j)$ で、σ'_j と $\bar{\sigma}_j$ は世代が同じなので、結局 $\bar{S}_j$ とそれらの大小関係は

$$\bar{S}_j = S'_j - |\sigma''_j| \leq S''_j - |\sigma'_j| \tag{60}$$

となる。よって、この場合、

$$\begin{aligned} I_j^{k-1} &= (|\bar{\sigma}_j| - |\sigma'_j|)(S'_j - |\sigma''_j|) - |\sigma''_j|(S''_j - |\sigma'_j|) \\ &\leq (|\bar{\sigma}_j| - |\sigma'_j| - |\sigma''_j|)(S'_j - |\sigma''_j|) \ \leq \ |\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j| V(\tau-) \end{aligned}$$

となる。

$$k'' = \bar{k} < k-1 \leq k'$$

の場合も σ'_j と σ''_j 等を入れかえるだけで同様の評価ができ、結局いずれの場合も

$$I_j^{k-1} \leq |\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j| V(\tau-) \tag{61}$$

が得られる。

次は 3. の $\sigma'_j < 0, \sigma''_j > 0, \bar{\sigma}_j < 0$ の場合。

$k' = \bar{k} < k-1 \leq k''$ の場合は $\bar{S}_j = S'_j - |\sigma''_j|$ で、$k'' = \bar{k} < k-1 \leq k'$ の場合は $\bar{S}_j \leq S'_j - |\sigma''_j|$ なので、いずれの場合も、

$$\begin{aligned} I_j^{k-1} &\leq (|\bar{\sigma}_j| - |\sigma'_j|)(S'_j - |\sigma''_j|) - |\sigma''_j|(S''_j - |\sigma'_j|) \\ &= (-\bar{\sigma}_j + \sigma'_j)(S'_j - |\sigma''_j|) - \sigma''_j(S''_j - |\sigma'_j|) \\ &= (-\bar{\sigma}_j + \sigma'_j + \sigma''_j)(S'_j - |\sigma''_j|) - \sigma''_j(S''_j - |\sigma'_j| + S'_j - |\sigma''_j|) \\ &\leq |\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j| V(\tau-) \end{aligned}$$

となって (61) が得られる。

5. の場合は、3. の場合の σ'_j と σ''_j の入れかえなので、同じく (61) が得られる。

次は 4. の $\sigma'_j < 0$, $\sigma''_j > 0$, $\bar{\sigma}_j \geq 0$ の場合。$\bar{\sigma}_j = 0$ ならば明らかに $I_j^{k-1} \leq 0$ となり (61) が成り立つので、$\bar{\sigma}_j > 0$ の場合を考える。

$k' = \bar{k} < k-1 \leq k''$ の場合は $\bar{S}_j \leq S''_j - |\sigma'_j|$ で、$k'' = \bar{k} < k-1 \leq k'$ の場合は $\bar{S}_j = S''_j - |\sigma'_j|$ なので、いずれの場合も、

$$\begin{aligned} I_j^{k-1} &\leq (|\bar{\sigma}_j| - |\sigma''_j|)(S''_j - |\sigma'_j|) - |\sigma'_j|(S'_j - |\sigma''_j|) \\ &= (\bar{\sigma}_j - \sigma''_j)(S''_j - |\sigma'_j|) + \sigma'_j(S'_j - |\sigma''_j|) \\ &= (\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j)(S''_j - |\sigma'_j|) + \sigma'_j(S'_j - |\sigma''_j| + S''_j - |\sigma'_j|) \\ &\leq |\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j| V(\tau-) \end{aligned}$$

となって (61) が得られる。

6. も、4. の σ'_j と σ''_j の入れかえなので、同じく (61) が得られる。

よって、[A-2] の場合はすべて (61) が成り立ち、、(58), (61) により、

$$\Delta Q_{k-1}(\tau) \leq -|\sigma'_j \sigma''_j| + \left(\sum_{\ell \neq j} |\bar{\sigma}_\ell| + |\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j| \right) V(\tau-)$$

となり、Lemma 7.2 (ii) より (53) の 2 本目が得らえることになる。

[**S-1**] の場合　まず $\Delta V_k(\tau)$ の方は、i-特性族、j-特性族では衝突前後で世代も大きさも変わらず、(55) より σ_{np} の世代は少なくとも k 以上となるので、

$$\Delta V_k(\tau) = |\sigma_{np}|$$

となって、Lemman 7.2 (iii) より (53) の 1 本目が得られる。

$\Delta Q_{k-1}(\tau)$ の方も、σ'_i, σ'_j に関する項も $-|\sigma'_i \sigma''_j|$ 以外はすべて消え、よって

$$\Delta Q_{k-1}(\tau) = -|\sigma'_i \sigma''_j| + |\sigma_{np}| Sw(\sigma_{np})$$

となるので、$Sw(\sigma_{np}) \leq V(\tau-)$ と Lemman 7.2 (iii) より (53) の 2 本目が得られる。

[S-2] の場合　この場合、$\bar{\sigma}_j = \sigma'_j + \sigma''_j$ は k', k'' の小さい方の世代で、σ_{np} は少なくとも k 以上の世代となる。

よって、$\Delta V_k(\tau)$ の方は (54) より $Go(\bar{\sigma}_j) \leq k-1$ なので、

$$\Delta V_k(\tau) = |\sigma_{np}| - \varepsilon|\sigma'_j| - \varepsilon'|\sigma''_j| \leq |\sigma_{np}|$$

となり、Lemma 7.2 (iii) より (53) の 1 本目が得られる。

$\Delta Q_{k-1}(\tau)$ の方は、[A-2] 同様に

$$\Delta Q_{k-1}(\tau) = -|\sigma'_j\sigma''_j| + |\sigma_{np}|Sw(\sigma_{np}) + I_j^{k-1}$$
$$I_j^{k-1} = |\sigma'_j + \sigma''_j|\bar{S}_j - |\sigma'_j|(S'_j - |\sigma''_j|) - |\sigma''_j|(S''_j - |\sigma'_j|)$$

とすると、1. の $\sigma'_j < 0$, $\sigma''_j < 0$ の場合は、(55) より $k' = \bar{k} < k-1 \leq k''$ なら

$$\bar{S}_j = S'_j - |\sigma''_j| \leq S''_j - |\sigma'_j|$$

で、よって

$$I_j^{k-1} = (|\sigma'_j + \sigma''_j| - |\sigma'_j| - |\sigma''_j|)(S'_j - |\sigma''_j|) \leq 0$$

となる。$k'' = \bar{k} < k-1 \leq k'$ の場合は σ'_j と σ''_j 等が入れかわるだけ。

3. の $\sigma'_j < 0$, $\sigma''_j > 0$, $\bar{\sigma}_j = \sigma'_j + \sigma''_j < 0$ の場合は、$k' = \bar{k} < k-1 \leq k''$ なら $\bar{S}_j = S'_j - |\sigma''_j|$ で、$k'' = \bar{k} < k-1 \leq k'$ なら $\bar{S}_j \leq S'_j - |\sigma''_j|$ なので、いずれの場合も

$$\begin{aligned} I_j^{k-1} &\leq (|\sigma'_j + \sigma''_j| - |\sigma'_j|)(S'_j - |\sigma''_j|) - |\sigma''_j|(S''_j - |\sigma'_j|) \\ &\leq (-\sigma'_j - \sigma''_j + \sigma'_j)(S'_j - |\sigma''_j|) - \sigma''_j(S''_j - |\sigma'_j|) \\ &= -\sigma''_j(S'_j - |\sigma''_j| + S''_j - |\sigma'_j|) \ \leq \ 0 \end{aligned}$$

となる。5. は 3. の入れかえなので同様。

4. の $\sigma'_j < 0$, $\sigma''_j > 0$, $\bar{\sigma}_j = \sigma'_j + \sigma''_j \geq 0$ の場合、$\bar{\sigma}_j = 0$ ならば当然 $I_j^{k-1} \leq 0$ なので $\bar{\sigma}_j > 0$ とすると、$k' = \bar{k} < k-1 \leq k''$ なら $\bar{S}_j \leq S''_j - |\sigma'_j|$, $k'' = \bar{k} < k-1 \leq k'$ なら $\bar{S}_j = S''_j - |\sigma'_j|$ なので、いずれの場合も

$$\begin{aligned} I_j^{k-1} &\leq (|\sigma'_j + \sigma''_j| - |\sigma''_j|)(S''_j - |\sigma'_j|) - |\sigma'_j|(S'_j - |\sigma''_j|) \\ &\leq (\sigma'_j + \sigma''_j - \sigma''_j)(S''_j - |\sigma'_j|) + \sigma'_j(S'_j - |\sigma''_j|) \\ &= \sigma'_j(S''_j - |\sigma'_j| + S'_j - |\sigma''_j|) \ \leq \ 0 \end{aligned}$$

となる。6. は 4. の入れかえなので同様。

よっていずれの場合もすべて $I_j^{k-1} \leq 0$ となり、

$$\Delta Q_{k-1}(\tau) \leq -|\sigma'_j \sigma''_j| + |\sigma_{np}| V(\tau-)$$

となるので、Lemma 7.2 (iii) より (53) の 2 本目が得られる。

[**S-3**] の場合　この場合、τ の前後で世代は変わらないので、$\Delta V_k(\tau)$ は

$$\Delta V_k(\tau) = \varepsilon(|\sigma_{np}| - |\sigma'_{np}|)$$

となり、よって Lemma 7.2 (iv) より (53) の 1 本目が得られる。

$\Delta Q_{k-1}(\tau)$ は、

$$\Delta Q_{k-1}(\tau) = -|\sigma'_{np}\sigma''_j| + (|\sigma_{np}| - |\sigma'_{np}|) S_{np}$$

で、$S_{np} \leq Sw(\sigma_{np}) = Sw(\sigma'_{np}) - |\sigma''_j|$ であり、S_{np} には σ_{np}, σ''_j は含まれず、よって $V(\tau-)$ に含まれるので、Lemma 7.2 (iv) より、

$$\Delta Q_{k-1}(\tau) \leq -|\sigma'_{np}\sigma''_j| + M_1|\sigma'_{np}\sigma''_j| S_{np} \leq -|\sigma'_{np}\sigma''_j| + M_1|\sigma'_{np}\sigma''_j| V(\tau-)$$

となり (53) の 2 本目が得られる。

これで、[A-1]∼[S-3] すべての場合で (53) が成り立つことになり、よって (11), (12), (23) により、

$$\Delta V_k(\tau) + C_0 \Delta Q_{k-1}(\tau) \leq |\sigma'_i \sigma''_j|(M_1 - C_0 + C_0 M_1 V(\tau-)) \leq 0$$

が得られる。

5.5　3 本目の不等式の評価

次は (49)。$\tau \in \bigcup_{j=1}^{k-2} I_j$ は

$$\max\{k', k''\} \leq k - 2 \tag{62}$$

を意味するが、このときまず

$$\Delta Q_k(\tau) \le M_1 |\sigma_i' \sigma_j''| V_k(\tau-) \tag{63}$$

が成り立つことを示す。

(62) より $Q_k(\tau-)$ に $|\sigma_i' \sigma_j''|$ は含まれないし、生成される front の世代もすべて $k-1$ 以下となる。

[**A-1**] の場合　この場合、$\bar{\sigma}_i$ と σ_i', $\bar{\sigma}_j$ と σ_j'' は符号も世代も同じなので、

$$\Delta Q_k(\tau) = \sum_{\ell \ne i,j} |\bar{\sigma}_\ell| \bar{S}_\ell + (|\bar{\sigma}_i| - |\sigma_i'|) S_i' + (|\bar{\sigma}_j| - |\sigma_j''|) S_j''$$

となるが、$\bar{S}_\ell$ も S_i' も S_j'' も世代が k 以上の項のみとなる。よっていずれも $V_k(\tau-)$ に含まれ、

$$\Delta Q_k(\tau) \le \left(\sum_{\ell \ne i,j} |\bar{\sigma}_\ell| + |\bar{\sigma}_i - \sigma_i'| + |\bar{\sigma}_j - \sigma_j''| \right) V_k(\tau-)$$

となるので、Lemma 7.2 (i) より (63) が得られる。

[**A-2**] の場合　この場合は、

$$\Delta Q_k(\tau) = \sum_{\ell \ne j} |\bar{\sigma}_\ell| \bar{S}_\ell + I_j^k, \quad I_j^k = |\bar{\sigma}_j| \bar{S}_j - |\sigma_j'| S_j' - |\sigma_j''| S_j'' \tag{64}$$

となるが、3.6 節の 1. の $\sigma_j' < 0$, $\sigma_j'' < 0$, $\bar{\sigma}_j < 0$ の場合は、$\bar{S}_\ell$, S_j', S_j'' は世代が k 以上の項のみなので、$\bar{S}_j = S_j' = S_j''$ となり、よって

$$I_j^k = (|\bar{\sigma}_j| - |\sigma_j'| - |\sigma_j''|) S_j'$$

より

$$I_j^k \le |\bar{\sigma}_j - \sigma_j' - \sigma_j''| V_k(\tau-) \tag{65}$$

と押さえられることになる。よって、(64) と Lemma 7.2 (ii) より、

$$\Delta Q_k(\tau) \le \left(\sum_{\ell \neq j} |\bar{\sigma}_\ell| + |\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j| \right) V_k(\tau-) \le M_1 |\sigma'_j \sigma''_j| V_k(\tau-)$$

となり、(63) が得られる。

3. の $\sigma'_j < 0$, $\sigma''_j > 0$, $\bar{\sigma}_j < 0$ の場合は、

$$\bar{S}_j = S'_j \ge S''_j$$

で、世代は k 以上の項のみなので、

$$\begin{aligned} I_j^k &= (|\bar{\sigma}_j| - |\sigma'_j|) S'_j - |\sigma''_j| S''_j = (-\bar{\sigma}_j + \sigma'_j) S'_j - \sigma''_j S''_j \\ &= -(\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j) S'_j - \sigma''_j (S'_j + S''_j) \le |\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j| V_k(\tau-) \end{aligned}$$

となり、(65) が得られる。

5. も 3. の入れかえなので同様。

4. の $\sigma'_j < 0$, $\sigma''_j > 0$, $\bar{\sigma}_j \ge 0$ の場合、$\bar{\sigma}_j = 0$ ならば $I_j^k \le 0$ より (65) が得られる。$\bar{\sigma}_j > 0$ の場合は、

$$\bar{S}_j = S''_j \le S'_j$$

で、世代は k 以上の項のみなので、

$$I_j^k = (|\bar{\sigma}_j| - |\sigma''_j|) S''_j - |\sigma'_j| S'_j \le (|\bar{\sigma}_j| - |\sigma''_j| - |\sigma'_j|) S''_j \le |\bar{\sigma}_j - \sigma'_j - \sigma''_j| V_k(\tau-)$$

となり、(65) が得られる。

6. も 4. と同様。

よっていずれも (65) が得られ、(63) が成り立つことになる。

[**S-1**] の場合　この場合は、σ'_i, σ''_j に関する項はすべて消え、

$$\Delta Q_k(\tau) = |\sigma_{np}| S_{np}$$

となる。σ_{np} の世代も $k-1$ 以下なので、S_{np} は k 以上の世代の項からなり、よって

$$\Delta Q_k(\tau) \le |\sigma_{np}| V_k(\tau-)$$

となり、Lemma 7.2 (iii) より (63) が得られる。

[**S-2**] の場合　この場合、

$$\Delta Q_k(\tau) = I_j^k + |\sigma_{np}| S_{np}, \quad I_j^k = |\sigma_j' + \sigma_j''| \bar{S}_j - |\sigma_j'| S_j' - |\sigma_j''| S_j'' \tag{66}$$

となり S_{np}, $\bar{S}_j$, S_j', S_j'' はすべて k 以上の世代の項のみからなる。[A-2] と同様に場合分けすると、1. の $\sigma_j' < 0$, $\sigma_j'' < 0$ のときは [A-2] の 1. と同様 $\bar{S}_j = S_j' = S_j''$ となり、よって

$$I_j^k = (|\sigma_j' + \sigma_j''| - |\sigma_j'| - |\sigma_j''|) S_j' \le 0$$

となる。

3. の $\sigma_j' < 0$, $\sigma_j'' > 0$, $\sigma_j' + \sigma_j'' < 0$ のときは、$\bar{S}_j = S_j' \ge S_j''$ となり、

$$\begin{aligned} I_j^k &= (|\sigma_j' + \sigma_j''| - |\sigma_j'|) S_j' - |\sigma_j''| S_j'' \;=\; (-\sigma_j' - \sigma_j'' + \sigma_j') S_j' - \sigma_j'' S_j'' \\ &= -\sigma_j''(S_j' + S_j'') \;\le\; 0 \end{aligned}$$

となる。

4. の $\sigma_j' < 0$, $\sigma_j'' > 0$, $\sigma_j' + \sigma_j'' \ge 0$ のときは、$\sigma_j' + \sigma_j'' = 0$ ならば $I_j^k \le 0$、$\sigma_j' + \sigma_j'' > 0$ ならば $\bar{S}_j = S_j'' \le S_j'$ なので、

$$I_j^k = (|\sigma_j' + \sigma_j''| - |\sigma_j''|) S_j'' - |\sigma_j'| S_j' = (|\sigma_j' + \sigma_j''| - |\sigma_j''| - |\sigma_j'|) S_j'' \le 0$$

となる。

5. は 3. と同様で、6. は 4. と同様なので、いずれも $I_j^k \le 0$ が得られ、よって、(66) より

$$\Delta Q_k(\tau) \le |\sigma_{np}| S_{np} \le |\sigma_{np}| V_k(\tau-)$$

となり、Lemma 7.2 (iii) より (63) が得られる。

[**S-3**] の場合　この場合は、

$$\Delta Q_k(\tau) \le (|\sigma_{np}| - |\sigma'_{np}|)S_{np}$$

で、S_{np} には σ''_j, σ'_{np} は含まれず、k 以上の世代の項のみ含まれるので、Lemma 7.2 (iv) より (63) が得られる。

これで、[A-1]∼[S-3] すべての場合で (63) が成り立つことになり、よって (63) と (7), (11), (12), (23) により、

$$\begin{aligned}\Delta Q_k(\tau) + C_0\Delta Q(\tau)V_k(\tau-) \ &\le \ (M_1|\sigma'_i\sigma''_j| + C_0\Delta Q(\tau))V_k(\tau-) \\ &\le \ |\sigma'_i\sigma''_j|(M_1 - C_0 + C_0M_1V(\tau-))V_k(\tau-) \ \le \ 0\end{aligned}$$

となり、(49) が得られる。

5.6　4 本目の不等式の評価

次は (50)。$\tau \in I_{k-1}$ は

$$\max\{k', k''\} = k - 1 \tag{67}$$

となるが、このときにまず

$$\Delta Q_k(\tau) \le M_1|\sigma'_i\sigma''_j|V(\tau-), \quad \Delta Q_{k-1}(\tau) \le -|\sigma'_i\sigma''_j| + M_1|\sigma'_i\sigma''_j|V(\tau-) \tag{68}$$

が成り立つことを示す。ただし、この 2 本目は、(53) に含まれていて、既に成り立つことが示されていたので、1 本目の方のみを考える。

なお、この 1 本目は 5.5 節の (63) と比較すると、右辺の $V_k(\tau-)$ が $V(\tau-)$ に変わっているだけなので、5.5 節の証明を少し変えればいい部分もあるが、流入 front は最高 $k-1$ 世代だが、流出 front には k 世代のものが含まれるので、5.5 節よりはむしろ面倒な部分もある。

[**A-1**] の場合　この場合は、i,j-特性族の front の世代、符号は $t = \tau$ の前後で変わらず、それ以外の特性族に出る front は (67) よりすべて k 世代となる。よって、$Q_k(\tau-)$

は $|\sigma_i'\sigma_j''|$ を含まないが、

$$\begin{aligned}\Delta Q_k(\tau) &= \sum_{\ell\neq i,j}|\bar\sigma_\ell|\bar S_\ell + (|\bar\sigma_i|-|\sigma_i'|)S_i' + (|\bar\sigma_j|-|\sigma_j''|)S_j'' \\ &\le \left(\sum_{\ell\neq i,j}|\bar\sigma_\ell| + |\bar\sigma_i-\sigma_i'| + |\bar\sigma_j-\sigma_j''|\right)V(\tau-)\end{aligned}$$

となり、よって Lemma 7.2 (i) より (68) の 1 本目が得られる。

[**A-2**] の場合　この場合は、

$$\Delta Q_k(\tau) = \sum_{\ell\neq j}|\bar\sigma_\ell|\bar S_\ell + I_j^k, \quad I_j^k = |\bar\sigma_j|\bar S_j - |\sigma_j'|S_j' - |\sigma_j''|S_j'' \tag{69}$$

となるが、k', k'', $Go(\bar\sigma_j)$ はいずれも $k-1$ 以下なので、$\bar S_j$, S_j', S_j'' はすべて k 世代以上の項からなり、よって 5.5 節の [A-2] と同じ評価が成り立ち、

$$I_j^k \le |\bar\sigma_j-\sigma_j'-\sigma_j''|V_k(\tau-) \le |\bar\sigma_j-\sigma_j'-\sigma_j''|V(\tau-)$$

となり、よって

$$\Delta Q_k(\tau) \le \left(\sum_{\ell\neq j}|\bar\sigma_\ell| + |\bar\sigma_j-\sigma_j'-\sigma_j''|\right)V(\tau-)$$

となるので、Lemman 7.2 (ii) より (68) の 1 本目が得られる。

[**S-1**] の場合　この場合、(67) と $Go(\sigma_{np})=k$ より

$$\Delta Q_k(\tau) = |\sigma_{np}|S_{np} \le \sigma_{np}|V(\tau-)$$

となり、Lemma 7.2 (iii) より (68) の 1 本目が得られる。

[**S-2**] の場合　この場合、

$$\Delta Q_k(\tau) = I_j^k + |\sigma_{np}|S_{np}, \quad I_j^k = |\sigma_j'+\sigma_j''|\bar S_j - |\sigma_j'|S_j' - |\sigma_j''|S_j''$$

となるが、k', k'', $Go(\sigma'_j + \sigma''_j)$ はいずれも $k-1$ なので、$\bar{S}_j$, S'_j, S''_j はすべて k 世代以上、よって 5.5 節の [S-2] と同じで $I^k_j \leq 0$ となる。よって、

$$\Delta Q_k(\tau) \leq |\sigma_{np}| S_{np} \leq |\sigma_{np}| V(\tau-)$$

と Lemma 7.2 (iii) により (68) の 1 本目が得られる。

[S-3] の場合　この場合は、Lemma 7.2 (iv) より

$$\Delta Q_k(\tau) = (|\sigma_{np}| - |\sigma'_{np}|) S_{np} \leq M_1 |\sigma'_{np}\sigma''_j| S_{np} \leq M_1 |\sigma'_{np}\sigma''_j| V(\tau-)$$

となり (68) の 1 本目が得られる。

よってすべての場合で (68) が成り立つことがわかった。よって、(11), (12), (23) により、

$$\begin{aligned} &\Delta Q_k(\tau) + C_0 \Delta Q_{k-1}(\tau) V(\tau-) \\ &\quad \leq \quad M_1 |\sigma'_i \sigma''_j| V(\tau-) + C_0(-|\sigma'_i\sigma''_j| + M_1 |\sigma'_i\sigma''_j| V(\tau-)) V(\tau-) \\ &\quad = \quad |\sigma'_i\sigma''_j| V(\tau-)(M_1 - C_0 + C_0 M_1 V(\tau-)) \ \leq \ 0 \end{aligned}$$

が得られる。

5.7　5 本目の不等式の評価

最後に (51) を示す。

$\tau \in \bigcup_{j \geq k} I_j$ に対しては、5.4 節の (53) より

$$\Delta Q_k(\tau) \leq -|\sigma'_i\sigma''_j| + M_1 |\sigma'_i\sigma''_j| V(\tau-)$$

が成り立つことがわかる。よって、(11), (23) により、

$$\Delta Q_k(\tau) \leq |\sigma'_i\sigma''_j|(-1 + M_1\delta_2) \leq -\frac{1}{2}|\sigma'_i\sigma''_j|$$

が成り立つことがわかり、よって (51) が得られる。

これで、(47)∼(51) のすべての不等式が得られたことになる。

5.8 (7.75) の評価

次は、(47)∼(51) の不等式を用いて (7.75) を示すことを考える。ここも、所々詳細が省略されている。また、ここでは k の範囲にも注意が必要である。

まず、$V_k(t)$, $Q_k(t)$ は衝突時刻以外では定数であり、よって

$$V_k(\tau_{j+1}-) = V_k(\tau_j+), \quad Q_k(\tau_{j+1}-) = Q_k(\tau_j+) \tag{70}$$

であり、また $0 < t < \tau_1$ ではすべての front の世代は 1 なので、

$$V_k(\tau_1-) = Q_k(\tau_1-) = 0 \quad (k \geq 2) \tag{71}$$

であることに注意する。

(47), (48) より、$k \geq 2$ に対して、

$$\begin{aligned} \Delta V_k(\tau_i) &\leq \begin{cases} 0 & \left(k \geq 3 \text{ かつ } \tau_i \in \bigcup_{j=1}^{k-2} I_j\right) \\ -C_0 \Delta Q_{k-1}(\tau_i) & (\text{その他}) \end{cases} \\ &\leq C_0 \left[\Delta Q_{k-1}(\tau_i)\right]_- \end{aligned}$$

となる。ここで、$[x]_- = \max\{-x, 0\}$, $[x]_+ = \max\{x, 0\}$ とする。よって、(70), (71) より、$k \geq 2$ に対して、

$$V_k(\tau_i+) = V_k(\tau_1-) + \sum_{j=1}^{i} \Delta V_k(\tau_j) \leq C_0 \sum_{j=1}^{i} \left[\Delta Q_{k-1}(\tau_j)\right]_- \quad (k \geq 2) \tag{72}$$

となる。また、(49), (50), (51) より、$k \geq 2$ に対して、

$$\begin{aligned} \Delta Q_k(\tau_i) &\leq \begin{cases} -C_0 \Delta Q(\tau_i) V_k(\tau_i-) & \left(k \geq 3 \text{ かつ } \tau_i \in \bigcup_{j=1}^{k-2} I_j\right) \\ -C_0 \Delta Q_{k-1}(\tau_i) V(\tau_i-) & (k \geq 2 \text{ かつ } \tau_i \in I_{k-1}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \\ &\leq C_0 \left[\Delta Q(\tau_i)\right]_- V_k(\tau_i-) + C_0 \left[\Delta Q_{k-1}(\tau_i)\right]_- V(\tau_i-) \end{aligned}$$

となり、この最後の式の右辺は 0 以上なので、

$$\left[\Delta Q_k(\tau_i)\right]_+ \leq C_0 \left[\Delta Q(\tau_i)\right]_- V_k(\tau_i-) + C_0 \left[\Delta Q_{k-1}(\tau_i)\right]_- V(\tau_i-) \quad (k \geq 2) \tag{73}$$

が得られる。ここで、(23) より、

$$V(\tau_i-) \le \Upsilon(\tau_i-) \le \Upsilon(0+) \tag{74}$$

となり、また、(7), (10) より $\Delta Q(\tau_i) \le 0$ で、よって

$$\sum_{j=1}^{i} [\Delta Q(\tau_j)]_- = -\sum_{j=1}^{i} \Delta Q(\tau_j) \le Q(\tau_1-) = Q(0+) \le \frac{\Upsilon(0+)}{C_0} \tag{75}$$

となるので、

$$\tilde{V}_k = \sup_{j\ge 1} V_k(\tau_j-) \quad (k \ge 1) \tag{76}$$

と書くことにすると、(70), (71), (73), (74), (75), (76) より、$k \ge 2$ に対して

$$\begin{aligned} Q_k(\tau_i+) &= Q_k(\tau_1-) + \sum_{j=1}^{i} \Delta Q_k(\tau_j) \le \sum_{j=1}^{i} [\Delta Q_k(\tau_j)]_+ \\ &\le \Upsilon(0+)\tilde{V}_k + C_0\Upsilon(0+) \sum_{j=1}^{i} [\Delta Q_{k-1}(\tau_i)]_- \quad (k \ge 2) \end{aligned} \tag{77}$$

となる。また、$k \ge 2$ に対しては、(71) より

$$0 \le Q_k(\tau_i+) = Q_k(\tau_1-) + \sum_{j=1}^{i} \Delta Q_k(\tau_j) = \sum_{j=1}^{i} [\Delta Q_k(\tau_j)]_+ - \sum_{j=1}^{i} [\Delta Q_k(\tau_j)]_-$$

となるので、

$$\sum_{j=1}^{i} [\Delta Q_k(\tau_j)]_- \le \sum_{j=1}^{i} [\Delta Q_k(\tau_j)]_+ \quad (k \ge 2) \tag{78}$$

がわかる。よって、

$$\tilde{Q}_k = \sum_{j=1}^{\infty} [\Delta Q_k(\tau_j)]_+ \quad (k \ge 1) \tag{79}$$

と書くことにすれば、(77), (78) より、

$$Q_k(\tau_i+) \le \tilde{Q}_k \quad (k \ge 2), \quad \tilde{Q}_k \le \Upsilon(0+)\tilde{V}_k + C_0\Upsilon(0+)\tilde{Q}_{k-1} \quad (k \ge 3) \tag{80}$$

が得られる。一方、(72), (78) より、$k \geq 3$ に対して

$$\tilde{V}_k \leq C_0 \tilde{Q}_{k-1} \quad (k \geq 3) \tag{81}$$

となるから、

$$\gamma = 2C_0 \Upsilon(0+) \tag{82}$$

と書けば、$k \geq 3$ に対して

$$\tilde{Q}_k \leq \gamma \tilde{Q}_{k-1} \quad (k \geq 3) \tag{83}$$

が得られることになる。

ちなみに、$\tilde{Q}_1$ は、$\Delta Q_1(\tau_j) = \Delta Q(\tau_j) < 0$ より $[\Delta Q_1(\tau_j)]_+ = 0$ なので、$\tilde{Q}_1 = 0$ となる。

次は、$\tilde{V}_2, \tilde{Q}_2$ の評価を考える。(48) より

$$\Delta V_2(\tau) \leq -C_0 \Delta Q_1(\tau) = -C_0 \Delta Q(\tau)$$

となるので、(71) より

$$V_2(\tau_i+) = V_2(\tau_1-) + \sum_{j=1}^{i} \Delta V_2(\tau_j) \leq -C_0 \sum_{j=1}^{i} \Delta Q(\tau) \leq C_0 Q(\tau_1-) = C_0 Q(0+)$$

よって、

$$\tilde{V}_2 = \sup_{j \geq 1} V_2(\tau_j-) \leq C_0 Q(0+) \leq \Upsilon(0+) \tag{84}$$

となる。一方、(50), (51), (74), および $\Delta Q(\tau_j) \leq 0$ より、

$$\Delta Q_2(\tau_j) \leq -C_0 \Delta Q(\tau_j) V(\tau_j-) \leq -C_0 \Delta Q(\tau_j) \Upsilon(0+) \tag{85}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_2 &= \sum_{j=1}^{\infty} [\Delta Q_2(\tau_j)]_+ \leq -C_0 \Upsilon(0+) \sum_{j=1}^{\infty} \Delta Q(\tau_j) \leq C_0 \Upsilon(0+) Q(\tau_1-) \\ &\leq \Upsilon(0+)^2 \end{aligned} \tag{86}$$

となる。

(82), (83), (86) により、$k \geq 2$ に対して

$$\tilde{Q}_k \leq \gamma^{k-2}\tilde{Q}_2 \leq \gamma^{k-2}\Upsilon(0+)^2 = \frac{\gamma^{k-1}\Upsilon(0+)}{2C_0} \tag{87}$$

となるので、(21), (80) により $k \geq 2$ に対して、

$$Q_k(\tau_i+) \leq \tilde{Q}_k \leq \frac{\gamma^{k-1}}{2C_0}\delta_2 \quad (k \geq 2) \tag{88}$$

となり、また、(81), (87) より、$k \geq 3$ に対して、

$$\tilde{V}_k \leq C_0\tilde{Q}_{k-1} \leq \frac{\gamma^{k-2}}{2}\Upsilon(0+)$$

となるので、(21) より $k \geq 3$ に対して、

$$V_k(\tau_i+) \leq \tilde{V}_k \leq \gamma^{k-2}\delta_2 \tag{89}$$

が成り立つ。なお、(84) より、この (89) は $k = 2$ に対しても成立することがわかる。

この (88), (89) が [1] の (7.75) (p142) に対応するものであるが、実際には少し係数や指数などが違っている。それは、主に [1] の (7.72) (p141) と、上の (75) の違いに起因している。[1] は「$Q(0) \leq \Upsilon(0)$」としているが、多分正しくは「$Q(0+) \leq \Upsilon(0+)/C_0$」であろう。そのため (7.73), (7.74) の係数が少し上とは違っていて、それでこのような違いが現れているようである。ただし、この間違いは、この後の命題の真偽を変えるほどの実質的なものではない。

5.9 6. の最終段階と定理 7.2 (p142)

いよいよ、6. の最終段階の非物理 front の総量を評価する。ここも一部概略が述べられていて、話はよくわかるが詳細はわかりにくいので、少し詳しく考える。

最終目標は、非物理 front の総量に対して、(7.78) の

$$V_{np}(t) = \sum_{\sigma \in F_{np}(t)} |\sigma| < \varepsilon \quad (t \notin \{\tau_j\}) \tag{90}$$

とできることを示すことである。ここで、$F_{np}(t)$ は、

$$F_{np}(t) = \{\sigma \in F(t);\ \sigma \text{ は非物理 front}\} \tag{91}$$

すなわち t で存在する非物理 front 全体の集合とする。

(90) を導くために、大きな世代に対する評価である p142 の (7.75)、実際にはその改良版である (88), (89) を用いて評価する。$V_{np}(t)$ を、世代によって

$$V_{np}(t) = \sum_{\sigma \in F_{np}(t), Go(\sigma) > k} |\sigma| + \sum_{\sigma \in F_{np}(t), Go(\sigma) \leq k} |\sigma| = V'(t) + V''(t) \tag{92}$$

と分けて考えると、$V'(t)$ は、(89) より、

$$V'(t) \leq V_{k+1}(t) \leq \tilde{V}_{k+1} \leq \gamma^{k-1}\delta_2 \tag{93}$$

と評価でき、$\gamma < 1$ となるようにすれば、大きな k を取ることで $V'(t)$ が十分小さくなることを示すことができる。

一方 $V''(t)$ は、k 以下の世代の非物理 front の個数と、その大きさの最大値 (43) との積で評価する。

非物理 front の個数の評価を行うために、またひとつ、[1] にはない新たな名前を導入する。今まで「front 接続」という名前で、ひとつの front をその特性族のまま最大に延長したものを考察してきたが、これだと複数の front 接続が途中で合体 ([A-2],[S-2]) すると 1 本の front 接続になり、前方には一意に伸びるものの後方には枝分かれする可能性があり、また front 接続上で世代も変化しうる (前方に下がりうる) 可能性があった。それらを排除するために、front 接続の枝葉を切り落として、枝分かれのない 1 本の折れ線状の、世代も一定の「世代 front 接続」を以下のように定義する。

世代 front 接続とは、front 接続同様に front を同じ特性族のもので延長したものだが、

1. 異なる特性族の front 同士が衝突した場合は、通常の front 接続同様にその特性族の front をそれぞれ接続する。
2. 同じ特性族の front 同士が衝突した場合 ([A-2],[S-2])、その両者の世代が違っていれば、大きい方の front は世代 front 接続としてはその衝突点で終わりとし、小さい方の front を世代 front 接続として前方に延長することとする (この接続では世代の変更は起きない)。

3. 同じ特性族の front 同士の衝突で、両者の世代も同じ場合は、右側にある front は 世代 front 接続としてはそこで終わりとし、左側にある front を前方に世代 front 接続として延長することとする (これも世代の変更は起きない)

これにより、front 接続は合流点で 2 つの世代 front 接続に分断されることになり、世代 front 接続の合体はなく、前方、後方に延長先が一意に決定するか、またはそこで終わりとなる。また、世代 front 接続上では世代の変化も起きず、よって世代 front 接続毎に世代が一意に確定することになる。この世代 front 接続の数を以下で評価する。

B_k を世代が k である世代 front 接続全体の集合とし、

$$\bar{B}_k = \bigcup_{j=1}^{k} B_j \quad (k \text{ 以下の世代の集合}), \quad N_k = \#B_k, \quad \bar{N}_k = \#\bar{B}_k = \sum_{j=1}^{k} N_j \tag{94}$$

とする (# は集合の要素の個数を意味する)。また、初期階段関数 $u(0+,x)$ の不連続点の個数を N とする。

第 1 世代の front は、$u(0+,x)$ からのみ作られ、$t \geq \tau_1$ で新たに作られることはないので、$\bar{N}_1 = N_1$ は、$u(0+,x)$ から作られる front の総数に等しい。よって、u の領域 (3.10 節の U_0) 内にある Riemann 問題の初期値に対する最大の膨張波のサイズを σ_M とすると、

$$\bar{N}_1 = N_1 \leq N \times n \times \left(1 + \left[\frac{\sigma_M}{\delta}\right]\right) \leq Nn\left(1 + \frac{\sigma_M}{\delta}\right) \tag{95}$$

と評価できる。もちろん、真性非線形な特性族の数を使えばもう少し精度よく評価できるが、そこまで細かく考える必要はない。

$k \geq 2$ に対して、k 世代の front が新たに発生するのは $(k-1)$ 世代の front (世代 front 接続) と $(k-1)$ 以下の front (世代 front 接続) との衝突であり、1 組の世代 front 接続同士の衝突は高々 1 回しか起こり得ないので、その衝突点の個数は $N_{k-1}\bar{N}_{k-1}$ 以下となる。また、各衝突点では、k 世代の front は流入 front とは異なる特性族に出るので、その個数は $(n-1)(1+\sigma_M/\delta)$ 以下となり、よって N_k は、

$$N_k \leq N_{k-1}\bar{N}_{k-1}(n-1)\left(1 + \frac{\sigma_M}{\delta}\right) \tag{96}$$

と評価できる。

荒く評価すれば、$N_{k-1} \geq 1$ であれば、

$$\bar{N}_k \;=\; N_k + \bar{N}_{k-1} \;\leq\; \bar{N}_{k-1} + N_{k-1}\bar{N}_{k-1}(n-1)\left(1 + \frac{\sigma_M}{\delta}\right)$$

$$\leq \bar{N}_{k-1}N_{k-1}\left(1+(n-1)\left(1+\frac{\sigma_M}{\delta}\right)\right) \leq \bar{N}_{k-1}^2 n\left(1+\frac{\sigma_M}{\delta}\right)$$

となり、また $N_{k-1}=0$ ならば $N_k=0$ で、よって $\bar{N}_k=\bar{N}_{k-1}$ (≥ 1) となるから、当然この場合も

$$\bar{N}_k \leq \bar{N}_{k-1}^2 n\left(1+\frac{\sigma_M}{\delta}\right) \tag{97}$$

が成り立つ。なお、衝突は有限回で終わるので、k を大きくすれば、あるところからは $N_k=0$ となることに注意する。一般に、$p_n \geq 1,\ q \geq 1$ に対して、

$$p_n \leq p_{n-1}^2 q \quad (n \geq 2)$$

の場合、

$$\log p_n \leq 2\log p_{n-1} + \log q$$

より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n}\log p_n &\leq \frac{1}{2^{n-1}}\log p_{n-1} + \frac{1}{2^n}\log q \leq \frac{1}{2}\log p_1 + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\log q \\ &\leq \frac{1}{2}\log p_1 + \frac{1}{2}\log q = \frac{1}{2}\log p_1 q\end{aligned}$$

となるので、

$$p_n \leq (p_1 q)^{2^{n-1}}$$

が得られる。よって、(95), (97) より、

$$\bar{N}_k \leq \left(Nn^2\left(1+\frac{\sigma_M}{\delta}\right)^2\right)^{2^{k-1}} \tag{98}$$

が得られる。この右辺を $P_k(N, 1/\delta)$ とすると、P_k は k にしか依存しない N と $1/\delta$ の多項式となる。なお、[1] は、P_k の具体的な形は紹介せず、N と $1/\delta$ のなんらかの多項式で評価できる、その式の表現は問題ではない、と述べている。

さて、$V''(t)$ に戻れば、t における k 以下の世代の非物理 front の総数は、k 以下の世代の世代 front 接続の総数 $\bar{N}_k$ 以下となるので、(98)、および 5.2 節の (43) により、

$$V''(t) \leq \bar{N}_k M_1 e^{M_1\delta_2}\rho \leq P_k(N,\delta^{-1})M_1 e^{M_1\delta_2}\rho \tag{99}$$

と評価できることになる。$P_k(N,\delta^{-1})$ は ρ に依存しないから、よって ρ を小さくとることで、$V''(t)$ を十分小さく評価できることになる。

ここから (7.78) を導くのであるが、これまでででてきたパラメータ N, ε, δ_0, δ_1, δ_2, δ_3, ρ, δ の意味と、それらの依存関係について確認しておく。

- N は、初期階段関数 $u(0+,x)$ の不連続点の個数で、[1] では p127 (7.17) の下に現れる。これは、$u(0+,x)$ の作り方により、ε と初期値 $\bar{u}$ に依存して決まる値である。
- δ_0 は、定理 7.1 (p124) の (7.5), および定理 7.2 (p127) に現れる正数で、初期値の全変動 $\mathrm{TV}\,\bar{u}$ を上から押さえ、これを十分小さく取ればこれらの定理が成り立つ、というもの。よって、この δ_0 をどのように取ればよいか、に答えることが最終目標となる。
- δ_1 は、p133 に現れるもので、Riemann 問題の解に対する評価である Lemma 7.2 を成り立たせるような領域の大きさを意味し、本稿の U_0 に対応する。だから、ある程度は小さく取るものの、極限として 0 に近づけたりするわけではない。
- δ_2 は、p131 に現れ、実際にはある条件 (本稿では (11) と、3.10 節の U_0, $\hat{\delta}$ に関する条件 $\delta_2 < \hat{\delta}$) を満たすパラメータであり、その範囲内ではいくらでも小さく取ることができる。
- δ_3 は、p138 に現れ、δ_2 に対して本稿の (13) を満たすように取る正数で、δ_2 に依存して決まる値。具体的には、(15) のように取ればよい。初期階段関数の全変動がこの δ_3 より小さければ (本稿の (16))、δ_2 に対して (23) が成り立つことになる。
- ρ は、p132 の近似解の構成で現れる、accurate method と simplified method の選択に使用される正数。今のところは他とは独立に自由に選べる。
- δ は、p129 の accurate method で膨張波を膨張 front に分解するときに使われる正数。これも今のところは他とは独立に選べる。

最終的に定理 7.2 の成立を示すためには、最初に ε とは無関係に U_0 ([1] では δ_1) を取り、それに対し、(11) と、$\delta_2 < \hat{\delta}$ を満たし、さらに (82) の γ が $\gamma < 1$ となるよう

$$\delta_2 < \frac{C_1}{2C_0} \tag{100}$$

も満たすような正数 δ_2 を 1 つ取り、そして (13) を満たすように正数 δ_3 を 1 つ取る。そして、正数 δ_0 を、$\delta_0 \le \delta_3$ となるように取る。ここまでは ε には依存しない。

(100) と 3.10 節の (20) により、確かに

$$\gamma = 2C_0\Upsilon(+0) \ \le \frac{2C_0\delta_2}{C_1} < 1$$

が得られ、また $\mathrm{TV}\,\bar{u} < \delta_0$ であれば、(7.17) (p127) により

$$\mathrm{TV}\,u(0+,\cdot) \le \mathrm{TV}\,\bar{u} < \delta_0 \le \delta_3$$

となるので、3.10 節、および 4 節、5 節の評価が成立する。

このとき、任意の正数 ε に対し、

1. まず正数 δ を、(38) を満たすように取る (δ_2 と ε に依存)。
2. 次に
   $$\gamma^{k-1}\delta_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$
   となるように十分大きな k を取る (δ_2, ε, γ に依存)。
3. 最後に、その k, N, δ に対し、
   $$P_k(N,\delta^{-1})M_1e^{M_1\delta_2}\rho < \frac{\varepsilon}{2}$$
   となるように十分小さな正数 ρ を取る (直接的には k, N, δ, ε, δ_2 に依存)

これで、(92), (93), (99) により $V_{np}(t) < \varepsilon$ が得られる。

これで、「front の速度の変更部分を除いて」定理 7.2 がすべて検証できたことになる。

6 速度の変更について

6.1 はじめに

この節では、[1] の Remark 7.1 (p132), Remark 7.2 (p142) で述べている、front の速度の変更について考える。

[1] は、実際にはほぼ「衝突時に 2 つの front のみが衝突するように速度を変更する」とだけ述べていて、その具体的なアルゴリズムは示していないし、あまり細かく考察しているようにも見えない。

速度の変更は連続的に行え、それに対して front の数や衝突点は有限個なので、定義 7.1 を満たすような変更は存在する気はするのであるが、手順をちゃんと示せ、と言われるとそれほど自明ではないし、Remark 7.2 で述べている条件も少し難しい。

本節では、それらについて少し詳しく考えてみる。

6.2 解消すべき問題点とおおまかな方法

まず、[1] では、front の速度の変更を次の条件を満たすために行っているようである。

- (T1) ひとつの衝突点 (τ, x) で、3 つ以上の front が衝突しないこと
- (T2) ひとつの衝突時刻 $t = \tau$ で、2 つ以上の衝突点 (τ, x_j) が発生しないこと

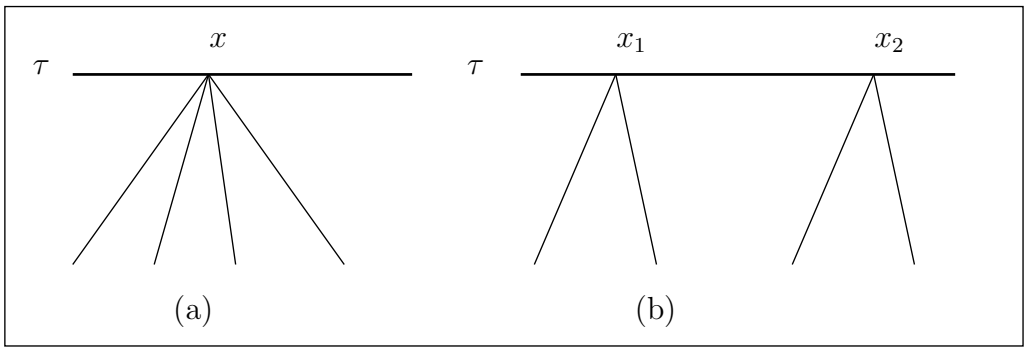

図 1: (a) !(T1), (b) !(T2)

なお、以下では、(T1) の否定を !(T1) のように書くことにする。

このうち、Remark 7.1 (p133) では !(T1) の解消のみを説明しているようであり、(T2) については Remark 7.2 (p142) の (FT1) で追加の要請として書いているようにも読める。しかし、(7.56) (正しくは (7.56')) は、そもそも (T1) かつ (T2) でないと成立しないので、(T2) は明示されてはいないが、(T1) と同時に暗黙に仮定しているのかもしれない。

front 速度の変更については、ε-近似の定義 7.1 (p125) により、衝撃 front と接触不連続 front については、wave 速度と front 速度とは ε 以下のずれは許されていて、膨張

front については、右の定数状態の特性速度とは ε 以下のずれが許されるが、非物理 front の速度は $\hat{\lambda}$ に固定されていて変更することは許されていない。つまり、以下が要請される。

- (T3) 非物理 front の速度は変更しない

そして、(7.56') の評価を可能にするためには、以下も必要になる。

- (T4) approach しない front 同士の衝突は起こさない

この (T4) を達成するためには、簡単に考えれば、

- (T5) 膨張 front と接触不連続 front の速度は変更しない

か、または変更はしても (T4) を満たすように変更すればよい。しかし、(T5) と (T1), (T2) は両立しない。

例えば、3-膨張 front と 2-膨張 front と 1-膨張 front が 1 点で衝突する場合 (図 2 (a)) は、(T1) を達成するためには (T5) を破っていずれかの膨張 front の速度を変更しなければいけないし、これをすべて接触不連続で置き換えることもできるから、接触不連続 front の速度も変更しないといけない場合があることになる。同様に、非物理 front

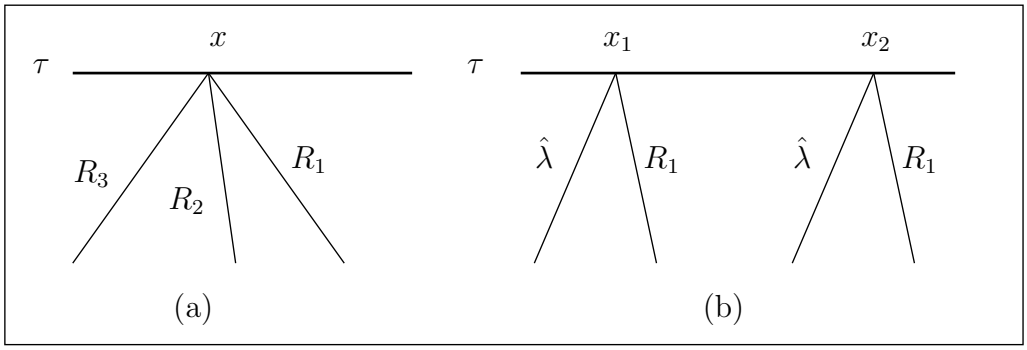

図 2: (a) (T5) が達成できない例

と 1-膨張 front の衝突が、同じ時刻に 2 箇所で起きてしまえば (図 2 (b)) は、非物理 front の速度は変更できないので、(T2) を達成するためには膨張 front の速度を変更せざるを得ない。

つまり、少なくとも局所的には、(T5) を守りつつ (T1), (T2) を達成することはできない。

となると、(T1), (T2) のためには、膨張 front と接触不連続 front の速度の変更は許しつつ、(T4) を実現させないといけないことになる。

6.3 速度変更の制限

次は、考察を易しくするために、変更する速度に制限をつけることを考える。

まず、最初に述べたように、速度の変更は定義 7.1 (p125) の範囲内で行う必要がある。また、当然すべての物理 front の速度は非物理 front の速度 $\hat{\lambda}$ より遅くなくてはならない。

必要ならば U_0 を少し小さくして、すべての $u \in U_0$ に対して、

$$\lambda_{i,m} < \lambda_i(u) < \lambda_{i,M} \ (1 \le i \le n), \quad \lambda_{i,M} < \lambda_{i+1,m} \ (1 \le i < n), \quad \lambda_{n,M} < \hat{\lambda} \quad (101)$$

となるような定数 $\lambda_{i,m}$, $\lambda_{i,M}$ が取れるようにできる。このようにしておくと、特性族間の特性速度の大小がはっきりするが、i-特性族の front の速度変更は、この $(\lambda_{i,m}, \lambda_{i,M})$ の範囲で行うようにすれば、特性族の順を越えた問題は起きなくなるので、速度変更の考察は少し易しくなる。

なお、[1] は条件 (101) を課しているわけではないが、本稿では一応これを仮定する。

さらに、

$$\Lambda = \max\{|\lambda_{1,m}|, \ |\hat{\lambda}|\} \quad (102)$$

とすれば、すべての front の速度の絶対値は Λ 以下となる。

6.4 !(T1) の !(T2) への還元

本節では、!(T1) を !(T2) に還元することで解消することを示す。

まず、速度の変更は本稿では「右から」そして「速度を増やす」方向で考えることにする。その理由を以下に説明する。

ある衝突時刻 $t = \tau$ で、それに関係するいくつかの front の速度を変更して、その衝突時刻をずらす場合、その時刻が小さくなるようにずらしてしまうと、現時点からそ

こに戻らないといけないので、先の方に近似解を延長できる保証を与えるのが難しいので、当然ずらす場合は衝突時刻を今より後の方にずらす方がよい。

そして衝突時刻を後の方にずらすためには、左の front の速度を遅くするか、または右の front の速度を速くするかのいずれかである (図 3)。

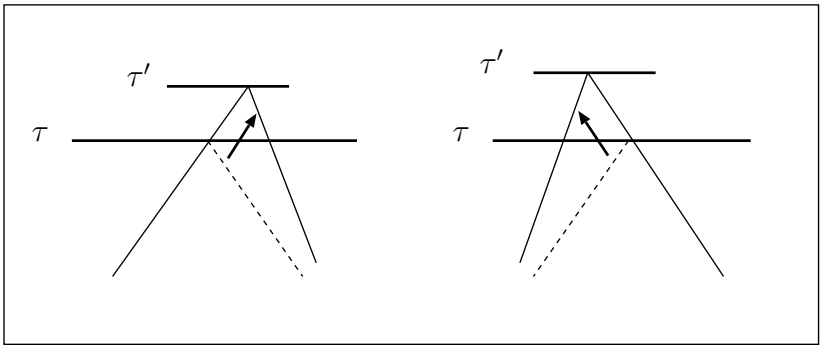

図 3: 衝突時刻を遅らせる

しかし、左の front は非物理 front である可能性もあり、(T3) からそれは変更できないので、その場合はそれより右の速度を上げざるを得なくなる。衝突の際の右の front が非物理 front であることはないので、よって、最初から右の front の速度を上げる、という方向で考えればよい。

さて、!(T1) がある衝突点 $(t, x) = (\tau, x_1)$ で起きている場合、それは、そこで衝突している m 個の front $(m \geq 3)$ を右の方から 2 つずつを組にして、少しずつ速度を上げることで、

- 2 つずつの front のみの衝突の並びに分解し、
- それらの衝突時刻はすべて $t = \tau$ のままとし、
- それらが他の front ともぶつからないようにする

ことができる (図 4) ことを示そう。

front の総数は有限なので、まず、m 個の front のうち一番右のものの速度を少し上げて、それが $(\lambda_{i,m}, \lambda_{i,M})$ の範囲で、かつ定義 7.1 の条件を満たし、かつ他の front とは $t \leq \tau$ では新たにぶつからないようにできることは明らかである。その $t = \tau$ での位置を $x = x_2$ とする $(x_1 < x_2)$。なお、この front は $t = \tau$ では $x = x_1$ から $x = x_2$ までは速度を変更することができる。

次に、m 個の右から 2 番目の front の速度を同様の条件を満たしながら上げるが、それが 1 つ目の front と $(t, x) = (\tau, x_2)$ で衝突するところまで上げられることは保証で

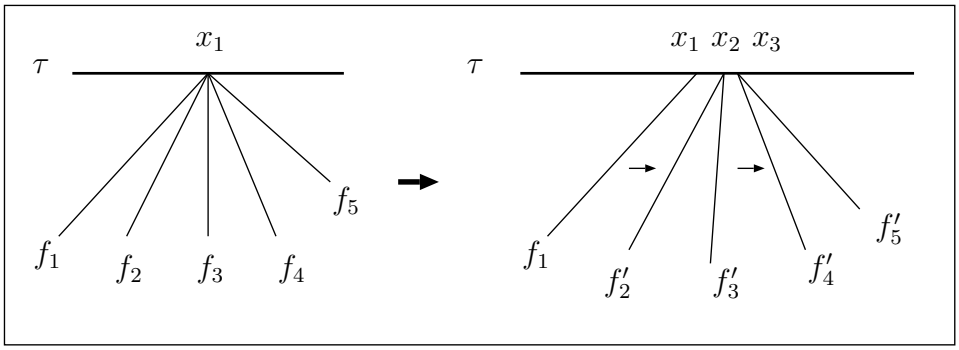

図 4: !(T1) から !(T2) への変換

きない。それは、$(\lambda_{i,m}, \lambda_{i,M})$ の範囲の条件や定義 7.1 の条件を越える可能性もあるし、または $t \leq \tau$ で他の front と衝突する可能性もあるからである。

しかし条件内で右から 2 つ目の front の速度を少しだけ上げることは可能なので、その $t = \tau$ での場所を $x = x_3$ とする。このとき、$x_1 < x_3 \leq x_2$ であり、よって最初の front を $x = x_3$ まで戻せば、丁度 $(t, x) = (\tau, x_3)$ でこの 2 つの front が衝突する。このようにして、一番右の 2 つの front を条件を満たしながら少しだけ速度を上げて m 個の front から分離できることがわかる (図 5)。

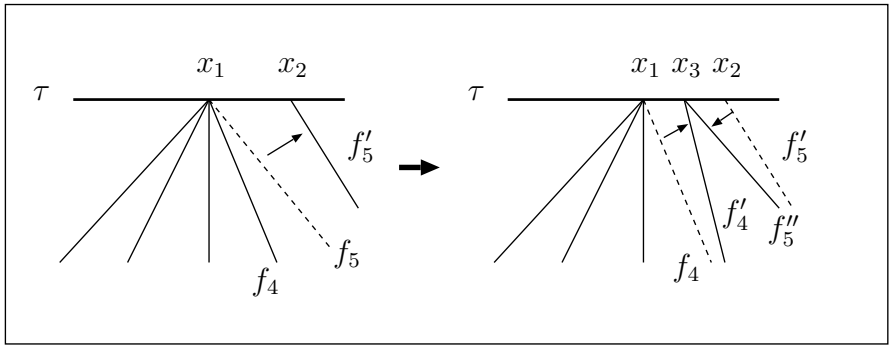

図 5: 右の 2 つの移動

後は帰納的にこれを行えば、最終的には !(T1) が $[m/2]$ 個の !(T2) の状態に還元されることになる。この操作では、膨張 front や接触不連続 front も速度を変更する可能性はあるが、他の front との衝突を新たに作ってはいないので、操作前の !(T1) の状態で !(T4) が起きていなければ、それを上のように分解した !(T2) にも !(T4) は起きていないはずである。

よってあとは、(T1) である !(T2) が解消できればよい。

6.5 !(T2) の解消

本節では、(T1) である !(T2)、すなわち $t = \tau$ で 2 つずつの front の、複数の衝突の !(T2) の状態を解消する。当然、それらの衝突位置 $x = x_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ の間に別の衝突のない front が挟まる場合もありうる。今、$t = \tau$ でのすべての front の位置を $\{y_k\}$ とする。また、$\{x_j\}$ は左から順に並べた衝突位置であるとする。

$$\{x_j\} \subset \{y_k\}, \quad x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_m \quad (m \geq 2)$$

この $j \geq 2$ に対する各衝突点 $x = x_j$ で、右の方の front の速度をわずかに上げることで衝突時刻を少し遅らせ、それぞれ $(t, x) = (\tau + \Delta\tau_j, x'_j)$ で衝突するようにする。ここで、$\Delta\tau_j$ は、

$$0 < \Delta\tau_2 < \Delta\tau_3 < \ldots < \Delta\tau_m < \frac{\mu}{3\Lambda} \tag{103}$$

となるようにする (図 6)。ここで、μ は、y_k 同士の間隔の最も狭い幅とし、右の front

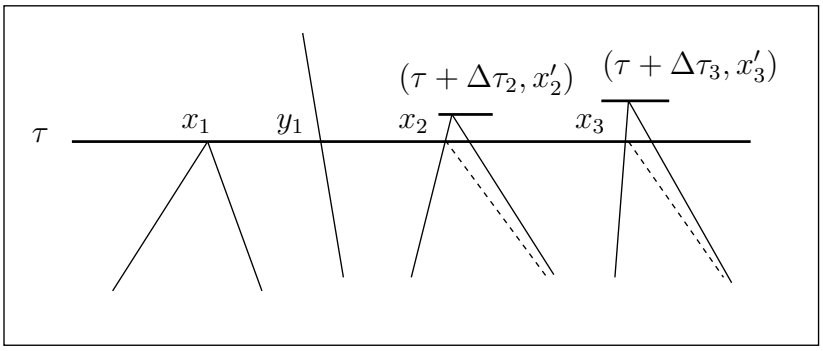

図 6: !(T2) の解消

の変更位置も、その右隣の front との間隔は $2\mu/3$ より大であるとする。これも右、すなわち x_m の方から順に左に行っていけばよい。

$\{x_j\}$ 以外の front は、その速度の絶対値は Λ 以下なので、隣の front との間隔が $2\mu/3$ より大であれば

$$t = \tau + \frac{1}{2\Lambda} \times \frac{2\mu}{3} = \tau + \frac{\mu}{3\Lambda}$$

までの間に ($\{x_k\}$ に関係する front を含め) 他の front と衝突することはない。

つまり、上の作業によりできる新たな衝突点 $(t,x)=(\tau+\Delta\tau_j, x'_j)$ $(j=2,\dots,m)$ は、この順で $(t,x)=(\tau,x_1)$ に続く衝突点で、この間に他の front の衝突時刻が入りこんでくることはない。

これで、$\tau\le t\le\tau+\Delta\tau_m$ の間で他の front ともぶつからないように !(T2) を解消できたことになる。そして、これらの操作では、今回速度を変更した front はすべて $\tau\le t\le\tau+\Delta\tau_m$ の間で他の front と衝突し、そこから新たな、速度変更を行う前の front が発生するので、速度変更はこの $t=\tau+\Delta\tau_m$ までで終わっている。よって $t=\tau+\Delta\tau_m$ からその次の衝突までの front はすべて速度変更を行う前の front であり、当然 !(T4) は起こらない。これで、$t=\tau$ から $t=\tau+\Delta\tau_m$ (の次の衝突時刻の手前) までは!(T4) が起こらないように !(T2) が解消できたことになる。

あとは 6.4 節、6.5 節の操作を衝突時刻で !(T1), !(T2) が起こる度に行えばよい。前節の解消と本節の解消を繰り返していけばよい。その作業が高々有限で終わることは、a priori に保証されていたので、これにより近似解がすべての $t>0$ に対して大域的に作られることになる。

6.6 反省

前節までで、front の速度の変更の考察を行ったが、実はこの変更の仕方は [1] には沿っていない部分がある。前に述べたように、(101) の条件も沿ってはいないのであるが、その他にも実は 6.4 節、6.5 節の方法は、Remark 7.2 (p142-143) の (FT4) の要請を満たしていない。具体的には、我々の方法は速度を常に「上げる」方向に変更するので、膨張 front に対してはその速度が $\lambda_{k_\alpha}(u^+)$ を越えることになってしまって (FT4) を満たさない。場合分けをして考えれば、膨張 front の速度を下げる方向に変更することも可能かもしれないが、良くはわからない。とりあえず前の方法は、(FT4) は満たさないが、弱解の存在を示すのにはそれで十分である。

なお、(FT4) の後半、すなわち i^*-特性方向のみは速度を変えないようにできるというのは少し疑わしいと感じるが、もしかしたら私が読み間違えているのかもしれない。

また、本節で考察してきた速度の変更は、あくまで [1] を読み解くという立場で考えたために必要であったが、例えば Holden-Risebro 流 ([5]) の波面追跡法ではそれは必要とせず、!(T1) のような 3 つ以上の front の同時衝突も許容し、そのような形での評価を行っているので、front 速度の変更は不要となる。

そのように評価を変更すれば本節の考察も不要となるし、その方が簡単にできるかもしれないが、本稿は一応 [1] の解説という形を取っているので、少し面倒だが速度の変更についても検討した。しかし上に述べたように、本節の考察が正しく [1] に沿っているかはだいぶ怪しい。

7 最後に

本稿の最後に、参考文献を簡単に紹介しておく。

波面追跡法は、大きく 2 通りの解の構成法があり、その一つが本稿で取り上げた Bressan 流の方法で、[1] が保存則方程式全般の話を含む解説書、[2] がその波面追跡法の部分の原論文である。もう一つの方法が、Risebro 流の方法で、[5] が保存則方程式全般の話を含む解説書、[4] がその波面追跡法の部分の原論文である。

本稿で取り上げた [1] (Bressan) の方法は、原論文 [2] (Bressan) の方法に、論文 [3] (Baiti-Jenssen) による改良を加えたもので、原論文 [2] よりもだいぶ易しくなっている。

一方の Risebro 流の方法 [4] は、[1] が導入している非物理 front や、世代番号は用いず、また速度の変更も行わない形での評価を行うもので、むしろ Bressan 流の説明よりもわかりやすいところもあるが、逆に a priori 評価を得ること、および近似解が無限に延長できることを示すことが難しくなっている。実際、膨張波を不連続波で近似し、すべての衝突で Riemann 問題を解いて同じことを進めようとすると、front の数がどんどん増えてその衝突がとても多くなってしまって有限時間でその構成が停止してしまう可能性があるが、[4] では、あるところまでいったら小さい front を捨てることでその問題を解消しているようである。

[1] の行っている速度の変更も Risebro 流では行わないので、3 つ以上の front の衝突も起こりうるが、[5] (Holdel-Risebro) にはそのような評価も書かれている。なお、[5] は、front 総数の評価のため、世代番号も導入しているようなので、[5] は原論文 [4] (Risebro) に [1] (Bressan)、あるいは [2] (Bressan), [3] (Baiti-Jenssen) の改良を追加したようなものなのかもしれないが、詳しくは読んでいない。

保存則方程式の最近の代表的な解説書としては、古くからの第一人者による [7] (Defermos) が有名であるが、これも波面追跡法を取り上げていて、連立の保存則方程式に対しては Bressan 流の方法を解説し、単独保存則方程式に関する波面追跡法については、筆者による [6] を解説している。なお、波面追跡法は元々 [6] から始まったと言ってよいらしいが、単独保存則方程式では、膨張波を不連続波で近似するというよりも、むしろ流束関数 $f(u)$ を折れ線近似 (polygonal approximation) することで区分的に定数な近似解を構成している。

それに対し、それを連立保存則方程式で使えるようにしたのが [8] (DiPerna) などであるらしい。[8] は、2×2 の連立保存則方程式に対して、流束関数はいじらずに、膨張波を非物理的衝撃波 (エントロピー条件を満たさない衝撃波) で近似することで区分的に定数な近似解を構成しているようだが、2×2 の場合は一般の n 本の場合と違い、色々いいところがあって、front の総数が有限個でおさまることなどが比較的容易に示されるそうである。詳しくは読んでいない。

[9] (Jenssen) は、直接波面追跡法とは関係ないものの、ある意味で波面追跡法の限界を示しているとも言える論文で、特殊な 3×3 の連立保存則方程式で、大きな初期値に対しては、区分的に定数な解 (近似解ではなく厳密解) が有限時間で爆発する、すなわち解の L^∞ ノルムが無限大に発散したり、全変動が無限大に発散する例を具体的に構成している。この論文の概要には、それらに関する色々な論文が詳しく紹介されていて、それを読むだけでもだいぶ勉強になる。このような波面追跡法の限界に関する研究は他にもいくつかあるらしいが、あまり詳しくは知らない。

ほかに 3 編ほど日本人によるものをあげる。[10], [11] (浅倉) は、この分野の日本での第一人者による解説記事で、[10] は Glimm 差分と Bressan 理論などの紹介記事であり、波面追跡法の紹介は少ないが Bressan 理論全体を見通すにはよく、[11] は、少し丁寧に波面追跡法と補完速度法 (補償コンパクト性理論) について説明している。説明は、基本的には Bressan 流だが、front 速度の変更を行わずに沢山の front の同時衝突を考慮しているところは Holden-Risebro 流の評価を利用し、世代番号評価も用いる、という方法をとっている。そのような流れの説明が一番わかりやすいのかもしれない。[12] (應和) は、この分野のあらたな日本の研究者による論文で、2×2 の連立方程式の場合に [1] の手法を大幅に改善する方法を論じている。

なお、今回これをまとめるにあたって、ほぼ一から波面追跡法を [1] に沿って読み直したのであるが、波面追跡法の勉強はこれで 4 回目位になる。一番最初に勉強したのは 20 年以上前であったが、しかし、勉強し直すたびに、前回の理解、前回のノートににあまいところがあったと反省しているような気がする。つまり、波面追跡法は、[1], [5] などによりだいぶ整備されてきているとはいえ、どの方法であっても、わかりにくいところ、落し穴のようなところがあり、だれもが容易にわかるようにはまだ整理されていない理論であると言えるだろうし、今後のさらなる改良が待たれる理論なのだろうと思う。

そして、このノートも私のまた間違った理解が含まれている可能性が十分にある。そのようなものに気がついたら、是非ご一方頂ければと思う。

また、本来のいわゆる「Bressan 理論」とは、本稿の内容の続きの話、すなわち [1] の 8 章以降の半群の生成や一意性などの話こそが重要なのであるが、私はまだそちらには手を出していない。機会があればそちらも勉強してみたいが、多分だいぶ先のことになるだろう。

参考文献

[1] A. Bressan, “Hyperbolic Systems of Conservation Laws”, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications 20, Oxford Univ. Press, New York (2000)

[2] A. Bressan, Global solutions of systems of conservation laws by wave-front tracking, J. Math. Anal. Appl. **170**, 414-432 (1992)

[3] P. Baiti, and H. K. Jenssen, On the front-tracking algorithm, J. Math. Anal. Appl. **217**, 395-404 (1998)

[4] N. H. Risebro, A front-tracking alternative to the random choice method, Proc. Amer. Math. Soc. **117**, 1125-1139 (1993)

[5] H. Holden and N. H. Risebro, "Front tracking for hyperbolic conservation laws", Springer (2002)

[6] C. M. Dafermos, Polygonal approximations of solutions of the initial value problem for a conservation law, J. Math. Anal. Appl. **38**, 33-41 (1972)

[7] C. M. Dafermos, "Hyperbolic conservation laws in continuum physics", Springer (2000).

[8] R. J. DiPerna, Global existence of solutions to nonlinear hyperbolic systems of conservation laws, J. Differential Equations **20**, 187-212 (1976)

[9] H. K. Jenssen, Blowup for systems of conservation laws, SIAM J. Math. Anal. **31**, 894-908 (2000)

[10] 浅倉史興、双曲型保存則系の初期値問題 –基本結果と近年の話題–, 数学, **52**, 257-278 (2000)

[11] 浅倉史興、"双曲型保存則系と衝撃波"、「応用解析ハンドブック」第 7 章 (増田久弥編)、シュプリンガー・ジャパン (2010)

[12] H. Ohwa, On the wave-front tracking algorithm for 2x2 hyperbolic systems of conservation laws, J. Math. Anal. Appl. **397**, 172-181 (2013)

[13] 竹野茂治、"Glimm 差分法解説", 1-73, (2007)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/glimm/glimm.pdf

[14] 竹野茂治、"compensated compactness と保存則方程式について", 京都大学数理解析研究所講究録 **No.1284**, 78-104 (2002)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/paper10/paper10.pdf

[15] 竹野茂治、"1 次元理想気体に対する補償コンパクト法", 1-48, (2010)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/cmpcmp1/cmpcmp1.pdf