1 compensated compactness に関する文献

1.1 Young measure の決定問題に関して

Young measure ν が δ measure になることを Tartar's functional equation と呼ばれる commutative relation

$$< \nu, \eta_1 q_2 - \eta_2 q_1 > = < \nu, \eta_1 >< \nu, q_2 > - < \nu, \eta_2 >< \nu, q_1 >$$

から導いているもの:

L.Tartar [36],
R.J.DiPerna [14],[15],
X.Ding, G.-Q.Chen and P.Luo [1],[11],[12],
G.-Q.Chen and P.T.Kan [5],
P.L.Lions, B.Perthame, E.Tadmore [20],
B.Rubino [26],
D.Serre [29]

[36] (L.Tartar) は Tartar による compensated compactness の原典で、人工粘性による近似解に対する scalar conservation law への応用もここに書かれている。Young measure の存在定理 (Young が 1 次元について証明した事実の n 次元への拡張), div–curl lemma の証明もここにある。

[14] (R.J.DiPerna) は compensated compactness を p-system のような 2×2 の保存則方程式系に適用した論文で、人工粘性による近似解と差分近似解について、その一様有界性が保証されればそれは弱解に収束する、といった定理があげられている。

また、[15] (DiPerna) は Euler 座標系の等エントロピー的理想気体の方程式に対して compensated compactness を用いたもので、比熱比と呼ばれる定数 γ が 7/5, 9/7, 11/9,... の場合に、任意の初期値に対して弱解が存在することを示している。この場合は解に真空域が生ずることがあり得るため、そこで vanish するような entropy (weak entropy) を取る必要があり、そのような entropy を与える Darboux の公式を使って Tartar's functional equation を解いている。

[1],[11],[12] (X.Ding, G.-Q.Chen and P.Luo) は [15] の結果を $1 < \gamma \leq 5/3$ にまで拡張したもので、[15] と同様の評価を詳しい計算で得ることにより証明している。[11](I) は弱解の存在証明のうち、Young measure を決定する部分以外のことが丁寧に書かれており、[15] を読むより分かりやすい。[11](II) は $\gamma = 3/2$ に対しての entropy の評価、[1] は一般の γ に対する評価の計算が行われている。

ただし、[1] の計算には修正が必要な箇所があり、[12] には修正が可能とだけしか書かれていないが [1] の中国語版の論文にその修正部分が書かれてある。

[5] (G.-Q.Chen and P.T.Kan) は孤立点でのみ双曲性が弱くなるような場合の 2×2 の保存則系の、その孤立点の近傍での主要部 (方程式をここで Taylor 展開したときの) を新たな方程式系としたものに対する結果である。この方程式系の Riemann 問題は Schaeffer と Shearer が解いているが、この系について Tartar's functional equation を

解き、人工粘性による近似解を使って解の存在を示している。続編の II の論文で、初期値の L^2 有界性の制限を除いた、Riemann 問題と差分近似による結果が出る予定。ただし、Riemann 問題がかなり複雑なので、I によって II が自明だとは限らないようである。

[20] (P.L.Lions, B.Perthame, E.Tadmore) は [15], [11], [1], [12] と同じ Euler 座標系の方程式に対するもので、$\gamma \geq 3$ についての結果である。ただし、Tartar's functional equation を解いているところは、幾つか分かりにくい箇所がある。近似解は kinetic formulation という方法で作っているようである。Perthame や Tadmor はそういった標題の論文をいくつか書いている。

[26] (B.Rubino) [5] を少し拡張している結果らしい。イタリアには他に P. Marcati, R. Natalini, J. Milani らが compensated compactness の論文を発表している。

[29] (D.Serre) は [14] の、2×2 の保存則方程式系に対する Tartar's functional equation の解法の改良であり、entropy の満たす 2 階線形双曲型方程式と、保存則系の特性方向との関係を詳しく調べることによって Young measure を決定している。また、方程式が全ての特性方向に degenerate している場合、または一つの特性方向に degenerate している場合についての Young measure の決定の限界、すなわち compensated compactness による解法の限界も示している。

この degenerate している特性方向を持つ保存則系の場合については [3] などで考察されている。

1.2 初期値境界値問題などへの応用

1.1 節の結果を使って、初期値境界値問題、外力項のついた問題、またはその他の問題に応用している例:

G.-Q.Chen and T.P.Liu [7],
G.-Q.Chen, C.D.Levermore and T.P.Liu [6],
X.Ding, G.-Q.Chen and P.Luo [13],
E.Feireisl [17],
T.Makino and S.Takeno [21],
S.Takeno [33],[34],[35],
P.Marcati and R.Natalini [22],[23],
B.Zhang [38],
J.A.Nohel, R.C.Rogers and A.E.Tzavaras [25]

[7],[6] は relaxation に関するもの、[13] は [1] の方程式に外力項をつけたもの、[17] は [14] の 1 次元準線形波動方程式に decay order が良くなる項と時間周期的な外力項をつけて周期解の存在を示しているもの、[21] は 3 次元の Euler 方程式の外部問題を球対称にしたもので [1] の方程式に外力がついて初期値境界値問題になっているもの、[33],[34] は [1] の方程式の piston 問題 (初期値境界値問題)、[35] は [36] の scalar の 保存則方程式に時間周期的な外力項をつけたもの、[22],[23],[38] は [1] の方程式や [14] の方程式に別の方程式がついている 3 本の方程式を、2 本ともう 1 本という形で考察し

ているもの、[25] は [15] の viscoelastic の方程式に memory と呼ばれる項が入っているものを扱っている。

なお、[21] では時間大域解の存在は示されなかったが、[8], [4] では shock capturing scheme と呼ばれる近似解によって時間大域解を構成している。

他にもたくさんあるようである。

1.3 L^p compensated compactness

compensated compactness は L^∞ 空間の汎弱収束についての理論であるが、その空間での近似解の有界性を示す事は一般には難しく、方法としてはほぼ [9] (K.N.Chueh, C.C.Conley and J.A.Smoller) の不変領域の方法があるだけで、しかもこれはどんな場合でも完全な有界性を示してくれるとは限らない。そのため、[14] でも、解の存在定理では、近似解がもし一様な有界性を持つならば、という表現がとられているものが多い。

それに対して energy 不等式で保証される L^p $(1 \leq p < \infty)$ での有界性を利用できないかと考えるのは自然な方向であるが、この L^p に compensated compactness を拡張する、という試みはすでに行われているようである。

M.Kružík[18],
P.Lin [19],
M.E.Schonbek [28],
J.Shearer [31],
Y.Zhou [39]

[28] (Schonbek) がその最初のようであり、Young measure の定理を L^p に拡張した L^p Young measure の定理を述べている。

[18] やここにはあげていないいくつかの論文でその L^p Young measure が詳しく調べられているようである。

[39] は compensated compactness の定理を L^p に拡張している物らしく、これも他のいくつかの論文でも研究されているらしい。

[19], [31] はその L^p compensated compactness の結果を [14] の論文ではカバーされていない形の elasticity の方程式に適用している物らしい。

1.4 lecture note

講義録のようなもの:

G.-Q.Chen [2],
B.Dacorogna [10],
L.C.Evans [16],
J.Smoller [32],
L.Tartar [37],

J.Màlek, J.Nečas, M.Rokyta and M.Růžička[24],
D.Serre [30]

[2] (G.-Q.Chen) は [11],[12],[1] の結果をほぼまとめたもので、isentropic gas についての方法を知るならこれを読むのが一番の近道ではないかと思われる。また、scalar の Tartar's functional equation の Tartar の解法を少し簡便化したものも載せている。

[10] (B.Dacorogna) は conservation law への応用を意識しているというより weak continuity を調べることを目標としているようである。しかし

Chapter I. Compensated compactness
Chapter Ⅱ. Applications
1. Nonlinear conservation laws

のように scalar conservation law のへの応用 (Tartar の方法) も、Tartar's equation の解法、近似解の評価、証明の流れなども含めて取り上げている。

[16] (L.C.Evans) には conservation law 以外にも楕円型の方程式への応用なども書かれているようである。conservation law については scalar の方程式だけでなく [14] についてもおおまかに触れている。また、Young measure の存在定理の [36] についても丁寧に書いてある。

[32] は 2nd edition の新版になって

Chapter 25 Recent results
A compensated compactness

を取り上げている。証明はほとんど書いていないが、[36], [14] の簡単な流れを載せている。

[37] は Tartar による [36] と [14] の部分的な紹介である。

[24] には、Young measure を解とする measure valued solution の話が書かれている。

また、最近 Serre による [30] が出版された。Ⅱ の Chapitre 9 で compensated compactness が取り上げられている。

参考文献

[1] G.-Q.Chen. Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (Ⅲ). *Acta Mathematica Scientia* **6**(1986), 75-120 (Chinese edition: **8**(1988), 101-134).

[2] G.-Q.Chen. The compensated compactness method and the system of isentropic gas dynamics. *Mathematical Sciences Research Institute*, Berkeley, 1990.

[3] G.-Q.Chen. The method of quasidecoupling for discontinuous solutions to conservation laws. *Arch. Rational Mech. Anal.* **121** (1992), 131-185.

[4] G.-Q.Chen and J.Glimm. Global solutions to the compressible Euler equations with geometrical structure. *Comm. Math. Phys.***180**(1996), 153-193.

[5] G.-Q.Chen and P.T.Kan. Hyperbolic conservation laws with umbilic degeneracy I. *Arch. Rational Mech. Anal.* **130**(1995), 231-276.

[6] G.-Q.Chen, C.D.Levermore and T.P.Liu. Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy. *Comm. Pure Appl. Math.***47**(1994), 787-830.

[7] G.-Q.Chen and T.P.Liu. Zero relaxation and dissipation limits for hyperbolic conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.* **46**(1993), 755-781.

[8] G.-Q.Chen, D.Wang. Convergence of shock capturing schemes for the compressible Euler-Poisson equations. *Comm. Math. Phys.***179**(1996), 333-364.

[9] K.N.Chueh, C.C.Conley and J.A.Smoller. Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations. *Indiana Univ. Math. J.* **26**(1977), 373-392.

[10] B.Dacorogna. *Weak continuity and weak lower semicontinuity of Non-linear functionals* Lecture Note in Math.922, Springer, 1982.

[11] X.Ding, G.-Q.Chen, and P.Luo. Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (I)-(II). *Acta Mathematica Scientia* **5**(1985), 415-432, 433-472 (Chinese edition: **7**(1987), 467-481; **8**(1988), 61-94).

[12] X.Ding, G.-Q.Chen and P.Luo. A supplement to the papers 'Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (II)-(III)'. *Acta Mathematica Scientia* **9**(1989), 43-44.

[13] X.Ding, G.-Q.Chen and P.Luo. Convergence of the fractional step Lax-Friedrichs scheme and Godunov scheme for the isentropic system of gas dynamics. *Comm. Math. Phys.* **121**(1989), 63-84.

[14] R.J.DiPerna. Convergence of approximate solutions to conservation laws. *Arch. Rational Mech. Anal.* **82**(1983), 27-70.

[15] R.J.DiPerna. Convergence of viscosity method for isentropic gas dynamics. *Comm. Math. Phys.* **91**(1983), 1-30.

[16] L.C.Evans. *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations* CBMS regional conference ser. in Math. 74, AMS, 1990.

[17] E.Feireisl. Time-periodic solutions to quasilinear telegraph equations with large data. *Arch. Rational Mech. Anal.* **112**(1990), 45-62.

[18] M.Kružík. Explicit characterization of L^p-Young measures. *J. Math. Anal. Appl.* **198**(1996), 830-843.

[19] P.Lin. Young measures and an application of compensated compactness to one-dimensional nonlinear elastodynamics. *Trans. Amer. Math. Soc.* **329**(1992), 377-413.

[20] P.L.Lions, B.Perthame and E.Tadmor. Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-systems. *Comm. Math. Phys.* **163**(1994), 415-431.

[21] T.Makino and S.Takeno. Initial boundary value problem for the spherically symmetric motion of isentropic gas. *Japan J. Indust. Appl. Math.* **11**(1994), 171-183.

[22] P.Marcati and R.Natalini. Weak solutions to a hydrodynamic model for semiconductors and relaxation to the drift-diffusion equation. *Arch. Rational Mech. Anal.* **129**(1995), 129-145.

[23] P.Marcati and R.Natalini. Global weak entropy solutions to quasilinear wave equations of Klein-Gordon and Sine-Gordon type. *preprint* (1996), 1-23.

[24] J.Màlek, J.Nečas, M.Rokyta and M.Růžička. Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs. Chapman & Hall, London, 1996.

[25] J.A.Nohel, R.C.Rogers and A.E.Tzavaras. Weak solutions for a nonlinear system in viscoelasticity. *Comm. Partial Differential Equations* **13**(1988), 97-127.

[26] B.Rubino. Compactness framework and convergence of Lax-Friedrichs and Godunov schemes for a 2×2 nonstrictly hyperbolic system of conservation laws. *Quart. Appl. Math.* **53**(1995), 401-421.

[27] W.Rudin. Real and complex analysis. McGraw-Hill, New York 1996.

[28] M.E.Schonbek. Convergence of solutions to nonlinear dispersive equations. *Comm. Partial Differential Equations* **7**(1982), 959-1000.

[29] D.Serre. La compacité par compensation pour les systèmes hyperboliques non linéaires de deux équations a une dimension d'espace. *J. Math. Pures Appl.* **65**(1986), 423-468.

[30] D.Serre. Systèmes de lois de conservation I, IIDiderot, Paris 1996.

[31] J.Shearer. Global existence and compactness in L^p for the quasi-linear wave equation. *Comm. Partial Differential Equations* **19**(1994), 1829-1877.

[32] J.Smoller. Shock waves and reaction-diffusion equations. (2nd edition), Springer, 1991.

[33] S.Takeno. Initial boundary value problem for isentropic gas dynamics. *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **120A**(1992), 1-23.

[34] S.Takeno. Free piston problem for isentropic gas dynamics. *Japan J. Indust. Appl. Math.* **12**(1995), 163-194.

[35] S.Takeno. A time-periodic solution for a scalar conservation law. *preprint* (1996), 1-26.

[36] L.Tartar. Compensated compactness and applications to partial differential equations. 136-211, *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium*, Vol.4, ed. R.J.Knops, Research Notes in Mathematics 39, Pitman, London 1979.

[37] L.Tartar. The compensated compactness method applied to systems of conservation laws. 263-285, *Systems of nonlinear partial differential Equations*, ed. J.M.Ball, NATO ASI Series, 1983.

[38] B.Zhang. Convergence of the Godunov scheme for a simplified one-dimensional hydrodynamic model for semiconductor devices. *Comm. Math. Phys.* **157**(1993), 1-22.

[39] Y.Zhou. An L^p theorem for compensated compactness. *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **122A**(1992), 177-189.