2001 年 9 月 22 日
(2001 年 10 月 20 日, 2012 年 4 月 16 日 修正,
2014 年 7 月 2 日大幅加筆)

三角関数の微分について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

例年、三角関数 $\sin x$, $\cos x$ の微分の公式

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x \tag{1}$$

の教科書の証明については説明を避けている。それは、使っている教科書がたいてい

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

と三角関数の和 → 積の公式を使って証明しているからで、これは本筋からかなり離れた話になってしまう気がしているからである。

しかし、不定積分の公式を学ぶためだと思うが、どうしても $\sin x$ の微分と $\cos x$ の微分のどちらに −(マイナス) をつけるのかを間違える学生が出てくる。少なくともこの間違いだけはなくそうと、グラフで説明したり、関数の増加等で説明したが、どうも今一つであった。

それを、三角関数の微分がなぜそうなるかを、やや厳密性には欠けるが少し幾何学的に説明することで改善できないかと考えたことがあり、それを今回まとめておくことにした。

ついでに、同様に考察できる $\tan x$ の微分、そして、定積分の

$$\int_0^{\pi/2}\sin x dx = \int_0^{\pi/2}\cos x dx = 1$$

の式についても図形的な説明を試みる。

ただし、分かりやすくなっているかどうかについては少し疑問も残る。

2 $\sin x$, $\cos x$ の微分

まず、関数 $y = f(x)$ の導関数の定義は

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

である。ここで、Δy は x の増加分 Δx に対する y の増加分を表していて、f を使って書き表すと、$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ となる。

さて、三角関数 $\cos\theta$、$\sin\theta$ (θ の単位はラジアン) の値は、単位円の中心角 θ に対する円周上の点の x 座標と y 座標で与えられることを思い出す (図 1)。

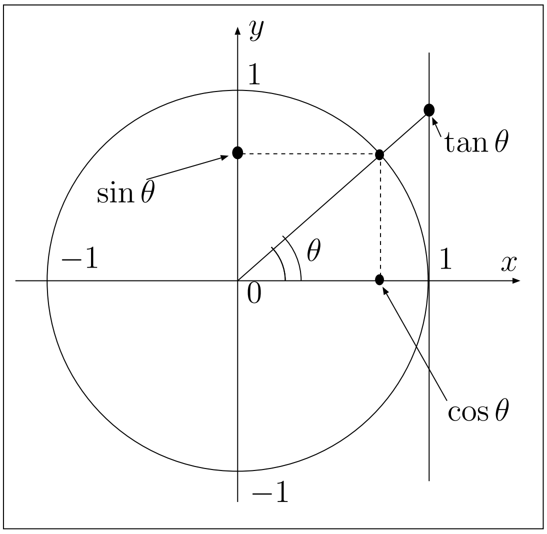

図 1: $\sin\theta$, $\cos\theta$ と単位円

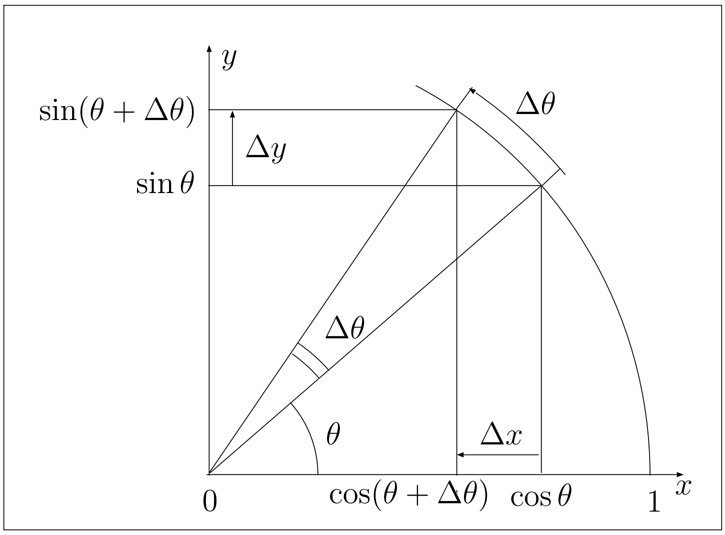

図 2: $\Delta\theta$, Δx, Δy

よって、$\cos\theta$、$\sin\theta$ の導関数は、それぞれ

$$\Delta x = \cos(\theta + \Delta\theta) - \cos\theta, \quad \Delta y = \sin(\theta + \Delta\theta) - \sin\theta$$

と $\Delta\theta$ との比の極限によって得られる (図 2):

$$(\cos\theta)' = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta\theta}, \quad (\sin\theta)' = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta\theta}$$

図 2 上では Δx は x 方向の移動幅 (負の値)、Δy は y 方向の移動幅として表されていて、$\Delta\theta$ は角度変化分であるが、弧度法の角度と弧の長さの関係から、$\Delta\theta$ は移動した分の弧の長さにも等しいことがわかる。

そして、$\Delta\theta$ を 0 に近づけて行くとき、$\Delta\theta$ が 0 に近ければ、この Δx, Δy, $\Delta\theta$ (図 2) は、弧の部分を、点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ での接線で置き換えた図で考えたもので近似できる (図 3)。この、接

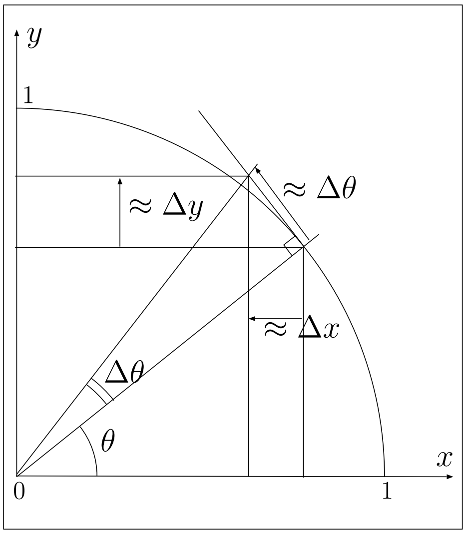

図 3: 弧を接線で近似

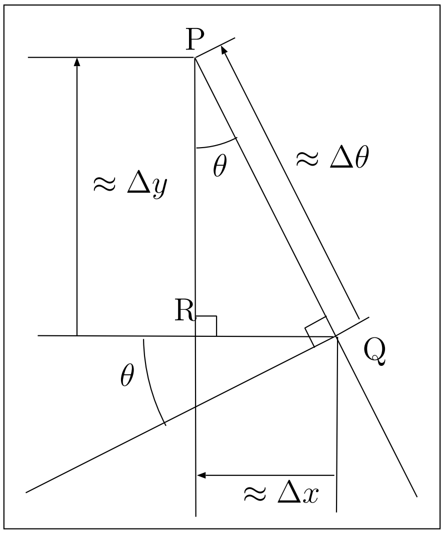

図 4: 三角形 PQR

線で近似した図 4 の三角形 PQR を考える。この三角形 PQR は、$\angle$R が直角の直角三角形であり、$\angle$P は θ に等しく

$$\mathrm{PR} \approx \Delta y, \quad \mathrm{QR} \approx -\Delta x, \quad \mathrm{PQ} \approx \Delta\theta \quad (\text{図 4 では、}\Delta y > 0,\ \Delta x < 0,\ \Delta\theta > 0)$$

となっている。よって、

$$\frac{\Delta x}{\Delta\theta} \approx -\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{PQ}} = -\sin\theta, \quad \frac{\Delta y}{\Delta\theta} \approx \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PQ}} = \cos\theta \tag{2}$$

となり、$\Delta\theta \to 0$ のとき、この近似は厳密に等しい等号になると考えられる。ゆえに

$$(\cos\theta)' = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta\theta} = -\sin\theta, \quad (\sin\theta)' = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta\theta} = \cos\theta$$

となる。

3 $\tan x$ の微分

同様の考え方で、$\tan x$ の導関数も考えることができる (図 5)。この場合、D の y 座標が $\tan\theta$,

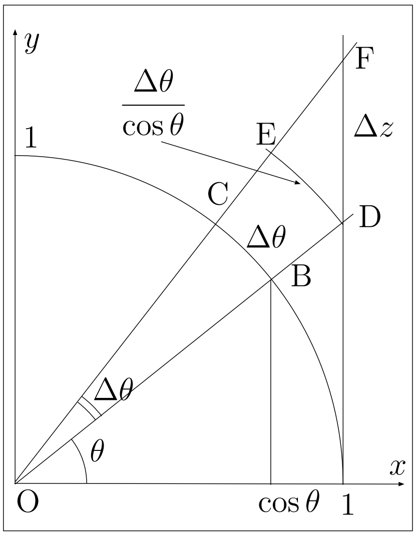

図 5: $\tan x$ の微分

F の y 座標が $\tan(\theta+\Delta\theta)$ なので、$z=\tan\theta$ の増分は、

$$\Delta z = \tan(\theta+\Delta\theta) - \tan\theta = \mathrm{DF}$$

となる。一方、扇形 OBC と ODE は相似で、OB:OD=$\cos\theta$:1 より、

$$弧\,\mathrm{DE} = \frac{弧\,\mathrm{BC}}{\cos\theta} = \frac{\Delta\theta}{\cos\theta}$$

であり、$\Delta\theta$ が 0 に近ければ、$\angle$ODE と $\angle$OED は直角に近く、DEF も $\angle$E が直角の直角三角形で近似できる。この場合、$\angle$EDF もほぼ θ に近いので、よって

$$\mathrm{FD}\cos\theta \approx \mathrm{DE} \approx \frac{\Delta\theta}{\cos\theta}, \quad \mathrm{FD} \approx \frac{\Delta\theta}{\cos^2\theta}$$

が得られる。ゆえに

$$\frac{\Delta z}{\Delta\theta} \approx \frac{1}{\cos^2\theta}$$

となり、その極限として $(\tan\theta)' = 1/\cos^2\theta$ が得られることになる。

4 $\sin x$ 等の定積分

これは、– の間違いの問題とは関係ないが、ついでにきれいな定積分の関係式

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = 1 \tag{3}$$

も図形的に説明できないかと考えた。これは、$y = \sin\theta$ のグラフの下の部分の面積を指している (図 6)。式 (3) が成り立つことは、もちろん不定積分を計算すれば容易にわかるが、ここで

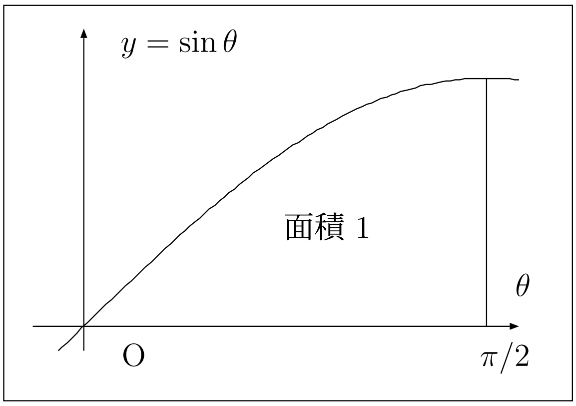

図 6: $\sin\theta$ の定積分

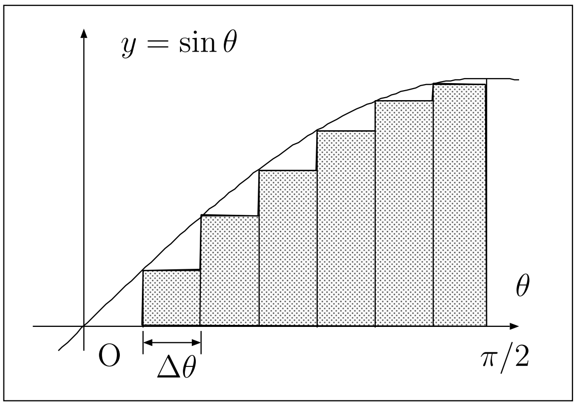

図 7: 区分求積

は不定積分を利用せず、それを図形的に説明することを考える。

この面積は、横幅を n 等分して、その分点を θ_k:

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{2n}, \quad \theta_k = k\Delta\theta \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

とするとき、n が大きければこの面積は短冊状の長方形の面積の和で近似できる (区分求積法、図 7):

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \approx \sum_{k=0}^{n-1} (\sin\theta_k)\Delta\theta \tag{4}$$

この、$(\sin\theta_k)\Delta\theta$ であるが、図 4 の QR は、(2) より

$$\mathrm{QR} = -\Delta x \approx (\sin\theta)\Delta\theta$$

となるので、図 2 の Δx の部分の絶対値である x 軸上の横幅が、この一つ一つの短冊の面積に相当することになる。

よって、$\Delta\theta$ への分割を図 8 のように円の中心角の分割に置き直して考えれば、$\sin\theta$ の定積分 (面積) を $\theta=0$ から加えていくのは、図 8 の各角度に対する x 軸上の幅を U から S まで加えていくことに対応する。

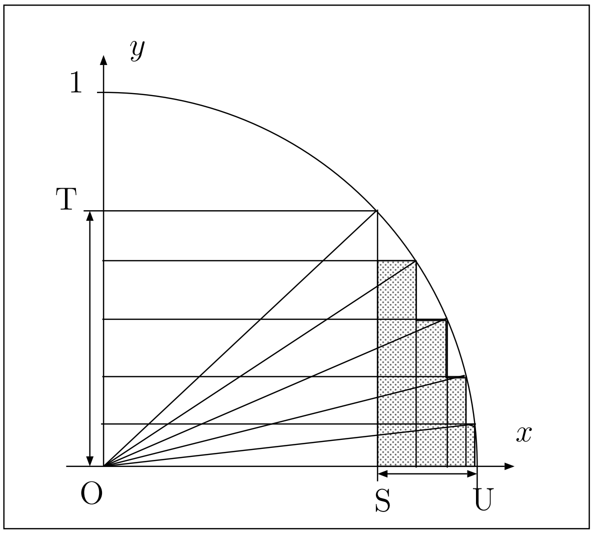

図 8: 円の中心角の分割

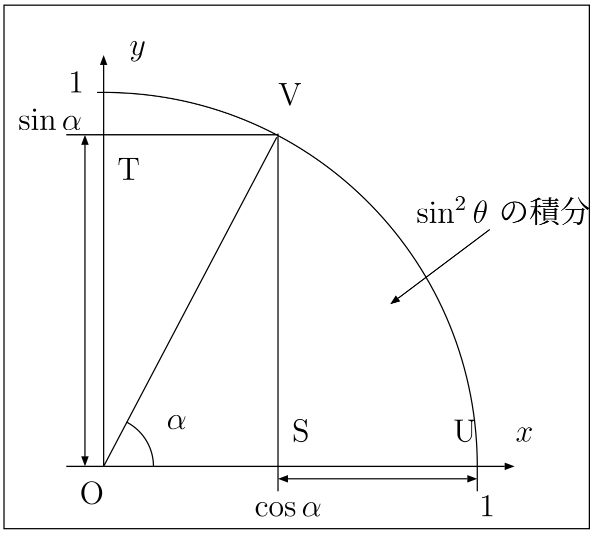

図 9: 定積分が表すもの

よって、$\sin\theta$ の $\theta=0$ から $\theta=\pi/2$ までの積分は、単位円の x 軸の右端の 1 のところから、x 軸の左端の 0 のところまでの横幅を求めることに対応する。ゆえにその積分は 1 となる。

同様に、図 4 Δx の代わりに Δy で考えれば、

$$\Delta y \approx (\cos\theta)\Delta\theta$$

より $\cos\theta$ の定積分が y 軸上の幅に対応するので、$\cos\theta$ の定積分は図 8 O から T までの幅を考えていくことに対応し、結局

$$\int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = 1$$

がわかる。今の議論を、$\pi/2$ まで伸ばさずに途中で止めて、0 から α までの定積分を考えればよりはっきりするが (図 9)、これまでの考察より

$$\int_0^{\alpha} \sin\theta d\theta = 1-\cos\alpha, \quad \int_0^{\alpha} \cos\theta d\theta = \sin\alpha$$

が得られることになる。

さらについでに、図 2 の、底辺が $-\Delta x$ で高さが $\sin\theta$ (= Q の y 座標) の縦長の長方形の面積を考えれば、この長方形の面積は

$$(\sin\theta)(-\Delta x) \approx (\sin^2\theta)\Delta\theta$$

になるので、その和は $\sin^2\theta$ の定積分に相当し、それはこのような長方形の和である円の一部分の面積に対応する (図 8 の網掛け部分)。よって、

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha \sin^2\theta d\theta &= (\text{円の SUV の部分の面積}) = (\text{扇形 OUV}) - (\text{三角形 OSV}) \\ &= \frac{\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{2}\end{aligned}$$

となる。実際、不定積分を用いて計算すれば、

$$\int_0^\alpha \sin^2\theta d\theta = \int_0^\alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha$$

となり、上の結果に等しいことがわかる。これ以外にも、図形で説明できる同種の定積分が隠れているかもしれない。

5 最後に

$\sin x$, $\cos x$ の微分を説明する 2 節の方法は、これらの図を思い出せれば、あるいは自分でこれらの図を書ければ、最初に上げた符号のミスはなくせるかも知れないが、「実際に公式の符号を覚えること」と「これらの図を書くこと」では明らかに前者の方がやさしく、2 節の方法は標準的な三角関数の微分の証明よりはやさしいかもしれないが、まだまだ簡単に理解できるレベルではなく、今後もより良い説明を検討していく必要があると思われる。

また、$\sin x$, $\cos x$ の定積分が、図形的には面積というよりも線幅 (軸への射影) によって 1 になることは今回初めて気がついたが、これは何かの機会に説明に利用できるかもしれない、と思っている。